高三总复习第五十三讲 双曲线　　　姓名_______.

1. 双曲线定义：

①到两个定点 F_1 与 F_2 的距离之差的绝对值等于定长〔＜$|F_1F_2|$〕的点的轨迹〔$\left||PF_1|-|PF_2|\right|=2a<|F_1F_2|$〔$a$ 为常数〕〕.这两个定点叫双曲线的焦点.

要注意两点：〔1〕距离之差的绝对值.〔2〕$2a<|F_1F_2|$，这两点与椭圆的定义有本质的不同.

当 $|MF_1|-|MF_2|=2a$ 时，曲线仅表示焦点 F_2 所对应的一支；

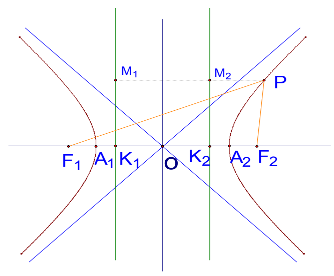
当 $|MF_1|-|MF_2|=-2a$ 时，曲线仅表示焦点 F_1 所对应的一支；

当 $2a=|F_1F_2|$时，轨迹是一直线上以 F_1、F_2 为端点向外的两条射线；

当 $2a>|F_1F_2|$时，动点轨迹不存在.

②动点到一定点 F 的距离与它到一条定直线 l 的距离之比是常数 $e(e>1)$时，这个动点的轨迹是双曲线.这定点叫做双曲线的焦点，定直线 l 叫做双曲线的准线.

2.双曲线图像中线段的几何特征：



⑴实轴长 $A_1A_2=2a$，虚轴长 2b, 焦距 $F_1F_2=2c$.

⑵顶点到焦点的距离：

$|A_1F_1|=|A_2F_2|=c-a$，$|A_1F_2|=|A_2F_1|=a+c$

⑶顶点到准线的距离：

$|A_1K_1|=|A_2K_2|=a-\dfrac{a^2}{c}$；$|A_1K_2|=|A_2K_1|=a+\dfrac{a^2}{c}$

⑷焦点到准线的距离：$|F_1K_1|=|F_2K_2|=c-\dfrac{a^2}{c}$ 或 $|F_1K_2|=|F_2K_1|=c+\dfrac{a^2}{c}$

⑸两准线间的距离：$|K_1K_2|=\dfrac{2a^2}{c}$

⑹ ΔPF_1F_2 中结合定义 $\left||PF_1|-|PF_2|\right|=2a$ 与余弦定理 $\cos\angle F_1PF_2$，将有关线段 $|PF_1|$、$|PF_2|$、$|F_1F_2|$ 和角结合起来，$S_{\Delta PF_1F_2}=b^2\cot\dfrac{\angle F_1PF_2}{2}$.

⑺离心率：$e=\dfrac{PF_1}{PM_1}=\dfrac{PF_2}{PM_2}=\dfrac{A_1F_1}{A_1K_1}=\dfrac{A_2F_2}{A_2K_2}=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}\in$〔1，+∞〕

⑻焦点到渐近线的距离：虚半轴长 b.

⑼通径的长是 $\dfrac{2b^2}{a}$，焦准距 $\dfrac{b^2}{c}$，焦参数 $\dfrac{b^2}{a}$〔通径长的一半〕.

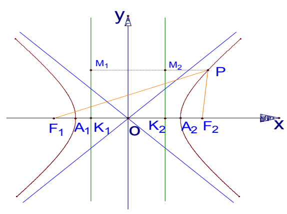
其中 $c^2=a^2+b^2$.$\left||PF_1|-|PF_2|\right|=2a$.

3. 双曲线标准方程的两种形式：

①$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$c=\sqrt{a^2+b^2}$，焦点是 F_1〔$-c$，0〕，F_2〔c，0〕

②$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$，$c=\sqrt{a^2+b^2}$，焦点是 F_1〔0，$-c$〕、F_2〔0，c〕.

4.双曲线的性质：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$〔$a>0$，$b>0$〕



⑴范围：$|x|\geqslant a$，$y\in\mathbf{R}$

⑵对称性：关于 x、y 轴均对称，关于原点中心对称

⑶顶点：轴端点 A_1〔$-a$，0〕，A_2〔a，0〕

⑷渐近线：

①假设双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow$ 渐近线方程 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0\Rightarrow y=\pm\dfrac{b}{a}x$

②假设渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x \Rightarrow \dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0 \Rightarrow$ 双曲线可设为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda$

③假设双曲线与 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 有公共渐近线，可设为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda$〔$\lambda>0$，焦点在 x 轴上，$\lambda<0$，焦点在 y 轴上〕

④特别地当 $a=b$ 时 $\Leftrightarrow$ 离心率 $e=\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow$ 两渐近线互相垂直，分别为 y=$\pm x$，此时双曲线为等轴双曲线，可设为 $x^2-y^2=\lambda$；$y=\dfrac{b}{a}x$，$y=-\dfrac{b}{a}x$

⑸准线：l_1：$x=-\dfrac{a^2}{c}$，l_2：$x=\dfrac{a^2}{c}$，两准线之距为 $K_1K_2=2\cdot\dfrac{a^2}{c}$

⑹焦半径：$|PF_1|=e(x+\dfrac{a^2}{c})=ex+a$，〔点 P 在双曲线的右支上 $x\ge a$〕；

$|PF_2|=e(\dfrac{a^2}{c}-x)=ex-a$，〔点 P 在双曲线的右支上 $x\ge a$〕；

当焦点在 y 轴上时，标准方程及相应性质〔略〕.

⑺与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 共渐近线的双曲线系方程是 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda\,(\lambda\neq0)$.

⑻与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 共焦点的双曲线系方程是 $\dfrac{x^2}{a^2+k}-\dfrac{y^2}{b^2-k}=1$

题型一：双曲线定义问题

1.“$ab<0$”是“曲线 $ax^2+by^2=1$ 为双曲线”的(　　)

A.充分不必要条件　B.必要不充分条件　C

2.假设 $k\in\mathbf{R}$，那么“$k>3$”是“方程 $\dfrac{x^2}{k-3}-\dfrac{y^2}{k+3}=1$ 表示双曲线”的(　　)

A.充分不必要条件.　B.必要不充分条件.　C.充要条件.　D.既不充分也不必要条件.

3.动圆与两圆 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2-8x+12=0$ 都外切,那么动圆圆心轨迹是　(　　)

A. 圆　　B. 椭圆　　C. 双曲线　　D. 双曲线的一支

4.双曲线 $mx^2+y^2=1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍，那么 $m=$(　　)

A. $-\dfrac{1}{4}$　　B. -4　　C. 4　　D. $\dfrac{1}{4}$

5. 双曲线的离心率为 2，焦点是〔-4，0〕,〔4，0〕，那么双曲线方程为__________.

6.双曲线中心在原点，一个顶点的坐标为 $(3,0)$,且焦距与虚轴长之比为 $5:4$，那么双曲线的标准方程是____________________.

7.给出问题：F_1、F_2 是双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{20}=1$ 的焦点，点 PP 到焦点 F_1 的距离等于 9，求点 P 到焦点 F_2 的距离.某学生的解答如下：双曲线的实轴长为 8，由$||PF_1|-|PF_2||=8$，即$|9-|PF_2||=8$，得$|PF_2|=1$ 或 17.

该学生的解答是否正确？假设正确，请将他的解题依据填在下面横线上；假设不正确，将正确结果填在下面横线上.　__________.

8. 过双曲线 $x^2-y^2=8$ 的左焦点 F_1 有一条弦 PQ 在左支上，假设|PQ|=7，F_2 是双曲线的右焦点，那么△PF_2Q 的周长是_______.

题型二：双曲线的渐近线问题

1.双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的渐近线方程是(　　)

A. $y=\pm\dfrac{3}{2}x$　　B. $y=\pm\dfrac{2}{3}x$　　C. $y=\pm\dfrac{9}{4}x$　　D. $y=\pm\dfrac{4}{9}x$

2.过点（2，－2）且与双曲线$\frac{x^2}{2}$－y^2=1 有公共渐近线的双曲线方程是(　　)

A. $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{4}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$　　C. $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{2}=1$　　D. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$

3.双曲线$x^2-y^2=4$的两条渐近线与直线$x=3$围成一个三角形区域,表示该区域的不等式组是(　　)

A $\begin{cases}x-y\geq 0\\ x+y\geq 0\\ 0\leq x\leq 3\end{cases}$　B. $\begin{cases}x-y\geq 0\\ x+y\leq 0\\ 0\leq x\leq 3\end{cases}$　C. $\begin{cases}x-y\leq 0\\ x+y\leq 0\\ 0\leq x\leq 3\end{cases}$　D. $\begin{cases}x-y\leq 0\\ x+y\geq 0\\ 0\leq x\leq 3\end{cases}$

题型三：双曲线的离心率问题

1.双曲线$\frac{x}{a}$—$\frac{y}{b}$＝1的一条渐近线方程为 y＝$\frac{4}{3}$x，那么双曲线的离心率为(　　)

A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{5}{4}$　　D. $\frac{3}{2}$

2.双曲线$\frac{x2}{a2}$ － $\frac{y2}{2}$ =1(a>$\sqrt{2}$)的两条渐近线的夹角为$\frac{\pi}{3}$,那么双曲线的离心率为(　　)

A.2　　B.$\sqrt{3}$　　C.$\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　D.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

3. F_1,F_2是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$的左、右焦点,过$F_1$且垂直于$x$轴的直线与双曲线的左支交于A、B 两点,假设$\Delta ABF_2$是正三角形,那么双曲线的离心率为 (　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

4.过双曲线 M: $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左顶点 A 作斜率为 1 的直线l,假设l与双曲线 M 的两条渐近线分别相交于 B、C,且|AB|=|BC|,那么双曲线 M 的离心率是 (　　)

A. $\sqrt{10}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

5.在给定双曲线中，过焦点垂直于实轴的弦长为$\sqrt{2}$，焦点到相应准线的距离为$\frac{1}{2}$，那么该双曲线的离心率为(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 2　　C . $\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

6. 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$=1（a＞b＞0）与双曲线$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}$=1（m＞0, n＞0）有相同的焦点（–c，0）和（c，0）. 假设 c 是 a 与 m 的等比中项，n^2是 m^2与 c^2的等差中项，那么椭圆的离心率等于________.

7. 假设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$, 那么双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的离心率为_____

8.双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (a>0,b<0)的右焦点为 F，假设过点 F 且倾斜角为 60°的直线与双曲线的右支有且只有一个交点，那么此双曲线离心率的取值范围是

A.(1,2)　　B. (1,2)　　C.[2,+∞)　　D.(2,+∞)

题型四：双曲线的距离问题

1.如果双曲线的两个焦点分别为$F_1(-3,0)$、$F_2(3,0)$，一条渐近线方程为$y=\sqrt{2}x$，那么它的两条准线间的距离是（　　）

A. $6\sqrt{3}$　　B. 4　　C. 2　　D. 1

2.如果双曲线$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}$=1 上一点 P 到它的右焦点的距离是 8，那么 P 到它的右准线距离是

A.10　　　　　　B. $\frac{32\sqrt{7}}{7}$　　　　$\sqrt{7}$　　　　D. $\frac{32}{5}$

3.设 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1$ 上一点，双曲线的一条渐近线方程为 $3x-2y=0$，F_1、F_2 分别是双曲线的左、右焦点.假设$|PF_1|=3$，那么$|PF_2|$等于(　　)

A.1 或 5　　　　B.6　　　　C.7

4.双曲线 $3x^2-y^2=9$，那么双曲线右支上的点 P 到右焦点的距离与点 P 到右准线的距离之比等于(　　)

A. $\sqrt{2}$　　　　B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　　　C. 2　　　　D. 4

5.假设双曲线 $\frac{x^2}{m}-y^2=1$ 上的点到左准线的距离是到左焦点距离的 $\frac{1}{3}$，那么 m=(　　)

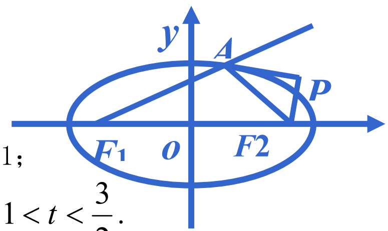
A. $\frac{1}{2}$　　　　B. $\frac{3}{2}$　　　　C. $\frac{1}{8}$　　　　D. $\frac{9}{8}$

6.双曲线 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$ 的右焦点为 F，假设过点 F 的直线与双曲线的右支有且只有一个交点，那么此直线斜率的取值范围是

A.($-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$)　　B. (-$\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$)　　C.[$-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$]　　D. [-$\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$]

7.圆 C 过双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的一个顶点和一个焦点，且圆心在此双曲线上，那么圆心到双曲线中心的距离是____________.

题型五：轨迹问题



1. 假设方程 $\frac{x^2}{4-t}+\frac{y^2}{t-1}=1$ 所表示的曲线为 C，给出以下四个命题：

①假设 C 为椭圆，那么 1<t<4；　②假设 C 为双曲线，那么 t>4 或 t<1；

③曲线 C 不可能是圆；　④假设 C 表示椭圆，且长轴在 x 轴上，那么 $1<t<\frac{3}{2}$.

其中真命题的序号为________________〔把所有正确命题的序号都填在横线上〕

2.椭圆 $x^2+2y^2=8$ 的两焦点分别为 F_1、F_2，A 为椭圆上任一点。AP 是⊿AF_1F_2 的外角平分线，且 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{F_2P}=0$.那么点 P 的轨迹方程是__________________________.

3.双曲线 $x^2-y^2=4$ 的两焦点分别为 F_1、F_2，A 为双曲线上任一点。AP 是∠F_1AF_2 的平分线，且 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{F_2P}=0$.那么点 P 的轨迹是　　　　〔　　〕

A.椭圆的一局部　　　　C.圆的一局部

A〔0，2〕可以作____条直线与双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 有且只有一个公共点.

17.　4.　$\frac{16}{3}$　　$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$　　$\frac{1}{8}$　　$\frac{\sqrt{5}}{2}$

7. 双曲线的渐进线方程 $y=\pm\frac{3}{4}x$，那么双曲线的离心率为 $\frac{5}{4},\frac{5}{3}$

双曲线 $x^2-y^2=4$,直线 l: $y=k(x-1)$,试讨论实数 k 的取值范围.

(1)直线 l 与双曲线有两个公共点；

〔2〕直线 l 与双曲线有且只有一个公共点；

〔3〕直线 l 与双曲线没有公共点；

中心在原点的双曲线 C 的右焦点为〔2，0〕，右顶点为$(\sqrt{3},0)$

〔1〕求双曲线 C 的方程；

〔2〕假设直线$l: y=kx+\sqrt{2}$与双曲线 C 恒有两个不同的交点 A 和 B，且$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>2$〔其中 O 为原点〕. 求 k 的取值范围.

解：〔Ⅰ〕设双曲线方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,b>0).$

由得$a=\sqrt{3}, c=2,$再由$a^2+b^2=2^2,$得$b^2=1.$

故双曲线 C 的方程为$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1.$

〔Ⅱ〕将$y=kx+\sqrt{2}$代入$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$得 $(1-3k^2)x^2-6\sqrt{2}kx-9=0.$

由直线 l 与双曲线交于不同的两点得$\begin{cases}1-3k^2\neq 0,\\ \Delta=(6\sqrt{2}k)^2+36(1-3k^2)=36(1-k^2)>0.\end{cases}$

即$k^2\neq\dfrac{1}{3}$且$k^2<1.$ ① 设$A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)$，那么

$x_A+x_B=\dfrac{6\sqrt{2}k}{1-3k^2}, x_Ax_B=\dfrac{-9}{1-3k^2},$由$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>2$得$x_Ax_B+y_Ay_B>2,$

而$x_Ax_B+y_Ay_B=x_Ax_B+(kx_A+\sqrt{2})(kx_B+\sqrt{2})=(k^2+1)x_Ax_B+\sqrt{2}k(x_A+x_B)+2$

$=(k^2+1)\dfrac{-9}{1-3k^2}+\sqrt{2}k\dfrac{6\sqrt{2}k}{1-3k^2}+2=\dfrac{3k^2+7}{3k^2-1}.$

于是$\dfrac{3k^2+7}{3k^2-1}>2,$即$\dfrac{-3k^2+9}{3k^2-1}>0,$解此不等式得

$\dfrac{1}{3}<k^2<3.$ ②

由①、②得 $\dfrac{1}{3}<k^2<1.$

故 k 的取值范围为$(-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3})\cup(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1).$

例 1 根据以下条件，求双曲线方程：

〔1〕与双曲线$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$有共同的渐近线，且过点〔－3，$2\sqrt{3}$〕；

〔2〕与双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}$=1有公共焦点，且过点〔$3\sqrt{2}$，2〕.

分析：设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$=1，求双曲线方程，即求$a$、$b$，为此需要关于$a$、$b$的两个方程，由题意易得关于$a$、$b$的两个方程.

解法一：〔1〕设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$=1，

由题意，得 $\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{4}{3}\\ \frac{(-3)^2}{9}-\frac{(2\sqrt{3})^2}{16}=1\end{cases}$

解得$a^2=\frac{9}{4}$，$b^2=4$.

所以双曲线的方程为$\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{4}$=1.

〔2〕设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$=1.

由题意易求$c=2\sqrt{5}$.

又双曲线过点〔$3\sqrt{2}$，2〕，

∴$\frac{(3\sqrt{2})^2}{a^2}-\frac{4}{b^2}$=1.

又∵a^2+b^2=〔$2\sqrt{5}$〕^{2}，

∴$a^2=12$，$b^2=8$.

故所求双曲线的方程为$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}$=1.

解法二：〔1〕设所求双曲线方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=\lambda$〔$\lambda\neq0$〕，

将点〔-3，$2\sqrt{3}$〕代入得$\lambda=\frac{1}{4}$，

所以双曲线方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=\frac{1}{4}$.

〔2〕设双曲线方程为$\frac{x^2}{16-k}-\frac{y^2}{4+k}=1$，

将点〔$3\sqrt{2}$，2〕代入得$k=4$，所以双曲线方程为$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$.

点评：求双曲线的方程，关键是求a、b，在解题过程中应熟悉各元素〔a、b、c、e及准线〕之间的关系，并注意方程思想的应用.假设双曲线的渐近线方程$ax\pm by=0$，可设双曲线方程为$a^2x^2-b^2y^2=\lambda$

（$\lambda\neq0$）.

双曲线的方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$，直线l通过其右焦点F_2，且与双曲线的右支交于A、B两点，将A、B与双曲线的左焦点F_1连结起来，求$|F_1A|\cdot|F_1B|$的最小值.

解：设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

A到双曲线的左准线$x=-\frac{a^2}{c}=-\frac{4}{\sqrt5}$的距离$d=|x_1+\frac{4}{\sqrt5}|=x_1+\frac{4}{\sqrt5}$，

由双曲线的定义，$\frac{|AF_1|}{d}=e=\frac{\sqrt5}{2}$,

$\therefore |AF_1|=\frac{\sqrt5}{2}(x_1+\frac{4}{\sqrt5})=\frac{\sqrt5}{2}x_1+2$,

同理，$|BF_1|=\frac{\sqrt5}{2}x_2+2$,

$\therefore |F_1A|\cdot|F_1B|=(\frac{\sqrt5}{2}x_1+2)(\frac{\sqrt5}{2}x_2+2)=\frac{5}{4}x_1x_2+\sqrt5(x_1+x_2)+4$　　　(1)

双曲线的右焦点为$F_2(\sqrt5,0)$,

(1)当直线的斜率存在时设直线AB的方程为：$y=k(x-\sqrt5)$，

由$\begin{cases}y=k(x-\sqrt5)\\ \frac{x^2}{4}-y^2=1\end{cases}$　消去y得　$(1-4k^2)x^2+8\sqrt5k^2x-20k^2-4=0$,

$\therefore x_1+x_2=\frac{8\sqrt5k^2}{4k^2-1}$，　$x_1x_2=-\frac{20k^2+4}{4k^2-1}$，

代入(1)整理得

$$|F_1A|\cdot|F_1B|=\frac{40k^2}{4k^2-1}+\frac{25k^2+5}{4k^2-1}+4=\frac{65k^2+5}{4k^2-1}+4$$

$$=\frac{65(k^2-\frac{1}{4})+\frac{85}{4}}{4k^2-1}+4=\frac{81}{4}+\frac{85}{4(4k^2-1)}$$

$\therefore |F_1A|\cdot|F_1B|>\frac{81}{4}$;

(2)当直线AB垂直于x轴时，容易算出$|AF_2|=|BF_2|=\frac{1}{2}$，

$\therefore |AF_1|=|BF_1|=2a+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$(双曲线的第一定义)，$\therefore |F_1A|\cdot|F_1B|=\frac{81}{4}$

由(1), (2)得：当直线 AB 垂直于 x 轴时$|F_1A|\cdot|F_1B|$ 取最大值$\frac{81}{4}$.

例 6　24.双曲线的方程是 $16x^2-9y^2=144$.

〔1〕求这双曲线的焦点坐标、离心率和渐近线方程;

〔2〕设 F_1 和 F_2 是双曲线的左、右焦点，点 P 在双曲线上，且$|PF_1|\cdot|PF_2|=32$，求$\angle F_1PF_2$ 的大小.

解:〔1〕由 $16x^2-9y^2=144$ 得 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，

∴$a=3$，$b=4$，$c=5$.焦点坐标 F_1〔-5，0〕，F_2〔5，0〕，离心率 $e=\frac{5}{3}$，渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$.

〔2〕$||PF_1|-|PF_2||=6$，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}$

$=\frac{(|PF_1|-|PF_2|)^2+2|PF_1||PF_2|-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{36+64-100}{64}=0$.

∴$\angle F_1PF_2=90°$.

双曲线的方程是 $16x^2-9y^2=144$.

〔1〕求这双曲线的焦点坐标、离心率和渐近线方程;

〔2〕设 F_1 和 F_2 是双曲线的左、右焦点，点 P 在双曲线上，且$|PF_1|\cdot|PF_2|=32$，求$\angle F_1PF_2$ 的大小.

解:〔1〕由 $16x^2-9y^2=144$ 得 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，

∴$a=3$，$b=4$，cF_1〔-5，0〕，F_2〔5，0〕，离心率 $e=\frac{5}{3}$，渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$.

〔2〕$||PF_1|-|PF_2||=6$，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}$

$=\frac{(|PF_1|-|PF_2|)^2+2|PF_1||PF_2|-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{36+64-100}{64}=0$.

∴$\angle F_1PF_2=90°$.

求与圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 及 $(x+3)^2+y^2=9$ 都外切的动圆圆心的轨迹方程.

解：设动圆的半径为 r，那么由动圆与定圆都外切得

$|MF_1|=3+r,|MF_2|=1+r$，

又因为$|MF_1|-|MF_2|=(3+r)-(1+r)=2$，

由双曲线的定义可知，点 M 的轨迹是双曲线的一支.

所求动圆圆心的轨迹是双曲线的一支，其方程为：$\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{8}=1 \quad (x\ge 1)$

8　求与双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$共渐近线且过 $A(3\sqrt{3},-3)$ 的双曲线的方程.

分析：因所求的双曲线与双曲线共渐近线，故可先设出双曲线系，再把点代入，求得 K 的值即可。

解：设与$\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$共渐近线且过$A(3\sqrt{3},-3)$的

双曲线的方程为$\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=\lambda$。

那么 $\frac{(3\sqrt{3})^2}{4^2}-\frac{(-3)^2}{3^2}=\lambda$ ，从而有$\lambda=\frac{11}{16}$。

所求双曲线的方程为$\frac{x^2}{11}-\frac{16y^2}{99}=1$。

$x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 与点 P〔1，2〕，过 P 点作直线 l 与双曲线交于 A、B 两点，假设 P 为 AB 中点.

〔1〕求直线 AB 的方程;

〔2〕假设 Q〔1，1〕，证明不存在以 Q 为中点的弦.

〔1〕解：设过 P〔1，2〕点的直线 AB 方程为 $y-2=k$〔$x-1$〕，

代入双曲线方程得

〔$2-k^2$〕x^2+〔$2k^2-4k$〕$x-$〔k^4-4k+6〕$=0$.

设 A〔x_1，y_1〕，B〔x_2，y_2〕，

那么有 $x_1+x_2=-\frac{2k^2-4k}{2-k^2}$，

由 $\frac{x_1+x_2}{2}=x_p=1$，

$\therefore \frac{2k^2-4k}{k^2-2}k=1$.

又 $k=1$ 时，$\varDelta=16>0$，从而直线 AB 方程为 $x-y+1=0$.

〔2〕证明：按同样方法求得 $k=2$，而当 $k=2$ 时，$\varDelta<0$，所以这样的直线不存在.

培养能力

F_1,F_2是双曲线$\frac{x^2}{2}-y^2=1$的左、右焦点,P、Q 为右支上的两点,直线 PQ 过F_2,且倾斜角为α,那么

$|PF_1|+|QF_1|-|PQ|$的值为 (　　)

A. $4\sqrt{2}$　　B. 8　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 随α的大小变化

答案: A.解析: 用双曲线定义列方程可解

6. 过双曲线$2x^2-y^2-2=0$的右焦点作直线l交曲线于A、B两点,假设$|AB|=4$那么这样的直线存在 (　　)

A. 0条　　B. 1条　　C. 2条　　D. 3条

答案: D.解析: $l\perp$x轴时的焦点弦长AB=4最短为通径,故交右半支弦长为4的直线恰有一条;过右焦点交左右两支的符合要求的直线有两条.

7. 直线$y=-\frac{1}{3}x+5$与曲线$\frac{x|x|}{9}+\frac{y^2}{25}=1$的交点个数是 (　　)

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个.

答案: D.解析: (0, 5)点为完整双曲线和椭圆的极值点,故y=5为其切线,当直线斜率不为0时,直线必与每个曲线交于两点.

8. P为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上一点,$F_1$为一个焦点,以$PF_1$为直径的圆与圆$x^2+y^2=a^2$的位置关系为 (　　)

A. 内切　B. 外切　C. 内切或外切　D. 无公共点或相交.

答案: C.解析: 用两圆内切或外切的条件判断

9. 设$\theta\in(0,\ \frac{\pi}{4})$,那么二次曲线$x^2\cot\theta-y^2\tan\theta=1$的离心率的取值范围是 (　　)

A. $(0,\ \frac{1}{2})$　　B. $(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2})$　　C. $(\sqrt{2},\ +\infty)$　　D. $(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2})$

答案: C.解析: $e=\frac{\sqrt{\tan\theta+\cot\theta}}{\sqrt{\tan\theta}}=\sqrt{1+\cot^2\theta}$

10. 设F_1,F_2是双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$的两个焦点,点P在双曲线上且满足$\angle F_1PF_2=90^\circ$,那么ΔPF_1F_2的面积为 (　　)

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

答案: A.解析: 勾股定理,双曲线定义联立方程组h或面积公式.

11. 设F_1,F_2是双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$的左、右焦点,P在双曲线上,当ΔF_1PF_2的面积为1时,$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$的值为(　　)

A. 0　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2