

新疆昌吉玛纳斯县第一中学 2023-2024 学年高三下学期 3 月模拟测试数学试题

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

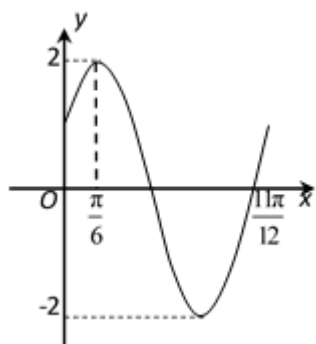
1. 已知函数 $f(x) = \frac{k}{x} (k \in \mathbb{N}_+)$, $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x-1}$, 若对任意的 $c > 1$, 存在实数 a, b 满足 $0 < a < b < c$, 使得 $g(a) = f(b) = g(c)$, 则 k 的最大值是()
A. 3 B. 2 C. 4 D. 5
2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2 \\ \log_a |x-2| + 1, & x \neq 2, a > 1 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f^2(x) + bf(x) + c$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 , 则 $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 =$ ()
A. 12 B. 11 C. 6 D. 3
3. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, $3 + ai = b - (2a-1)i$, 则 ()
A. $b=3a$ B. $b=6a$ C. $b=9a$ D. $b=12a$
4. $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 且满足: $f(x)$ 的导函数存在, 且 $\frac{f(x)}{f'(x)} < x$, 则下列不等式成立的是 ()
A. $f(2) < 2f(1)$ B. $3f(3) < 4f(4)$
C. $2f(3) < 3f(4)$ D. $3f(2) < 2f(3)$
5. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 P 为 BC 中点, 过点 P 的直线与 AB, AC 所在直线分别交于点 M, N , 若 $\vec{AM} = \lambda \vec{AB}$, $\vec{AN} = \mu \vec{AC} (\lambda > 0, \mu > 0)$, 则 $\lambda + \mu$ 的最小值为 ()
A. $\frac{5}{4}$ B. 2 C. 3 D. $\frac{7}{2}$
6. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$, 对 $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ 成立, 已知 $a = f(\ln \pi)$, $b = f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$, $c = f\left(\log_2 \frac{1}{6}\right)$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $b > a > c$ B. $b > c > a$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

7. 定义两种运算“ $\star$ ”与“ $\blacklozenge$ ”，对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ ，满足下列运算性质：① $2 \star 2018 = 1$ ， $2018 \blacklozenge 1 = 1$ ；② $(2n) \star 2018 = 2[(2n+2) \star 2018]$ ， $2018 \blacklozenge (n+1) = 2(2018 \blacklozenge n)$ ，则 $(2018 \blacklozenge 2020)(2020 \star 2018)$ 的值为()

- A. 2^{1011} B. 2^{1010} C. 2^{1009} D. 2^{1008}

8. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，且 $f(a+x) + f(a-x) = 0$ ，则 $|a|$ 的最小值为()



- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{12}$

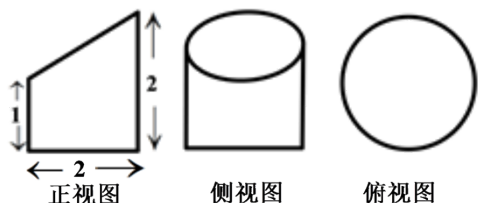
9. 若 $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中二项式系数和为 256，则二项式展开式中有理项系数之和为()

- A. 85 B. 84 C. 57 D. 56

10. 已知实数 $a > 0, b > 1$ 满足 $a + b = 5$ ，则 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b-1}$ 的最小值为()

- A. $\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{3+4\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{3+2\sqrt{2}}{6}$ D. $\frac{3+4\sqrt{2}}{6}$

11. 圆柱被一平面截去一部分所得几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为()



- A. $\frac{1}{2}\pi$ B. $\frac{3}{2}\pi$ C. 2π D. 3π

12.

2019年10月1日，中华人民共和国成立70周年，举国同庆.将2,0,1,9,10这5个数字按照任意次序排成一行，拼成一个6位数，则产生的不同的6位数的个数为

- A. 96 B. 84 C. 120 D. 360

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知关于 x 的方程 $a|\sin x| + \frac{1}{2} = \sin x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上恰有两个解，则实数 a 的取值范围是_____

14. 已知复数 $z = \frac{a+i}{1-i}$ 是纯虚数，则实数 $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $|z| = \underline{\hspace{1cm}}$.

15. $(x + \frac{1}{x} - 2)^4$ 的展开式中 x^2 的系数为_____.

16. 设 $P(x, y)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 在第一象限上的点，则 $\frac{x}{4-x} + \frac{3y}{6-y}$ 的最小值为_____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

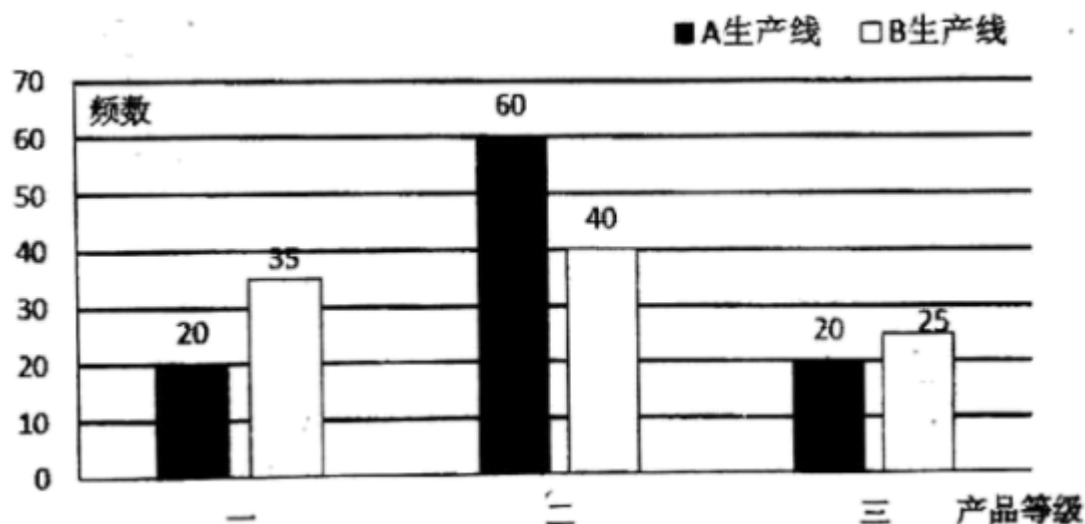
17. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=t, \\ y=4-\sqrt{3}t \end{cases}$ (t 为参数)，圆 C 的方程为

$x^2 + (y-1)^2 = 1$ ，以坐标原点 O 为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求 l 和 C 的极坐标方程；

(2) 过 O 且倾斜角为 α 的直线与 l 交于点 A ，与 C 交于另一点 B ，若 $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{12}$ ，求 $\frac{|OB|}{|OA|}$ 的取值范围.

18. (12分) 某工厂 A ， B 两条相互独立的生产线生产同款产品，在产量一样的情况下通过日常监控得知 A ， B 生产线生产的产品为合格品的概率分别为 p 和 $2p-1$ ($0.5 \leq p < 1$).



(1) 从 A ， B 生产线上各抽检一件产品，若使得至少有一件合格的概率不低于99.5%，求 p 的最小值 p_0 .

(2) 假设不合格的产品均可进行返工修复为合格品，以(1)中确定的 p_0 作为 p 的值.

①已知 A ， B 生产线的不合格产品返工后每件产品可分别挽回损失 5 元和 3 元。若从两条生产线上各随机抽检 1000 件产品，以挽回损失的平均数为判断依据，估计哪条生产线挽回的损失较多？

②若最终的合格品（包括返工修复后的合格品）按照一、二、三等级分类后，每件分别获利10元、8元、6元，现从A，B生产线的最终合格品中各随机抽取100件进行检测，结果统计如下图；用样本的频率分布估计总体分布，记该工厂生产一件产品的利润为 X ，求 X 的分布列并估算该厂产量2000件时利润的期望值。

19. (12分) 已知函数 $f(x) = bx^2 - 2ax + 2\ln x$ 。

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线为 $y = 2x + 4$ ，试求实数 a, b 的值；

(2) 当 $b = 1$ 时，若 $y = f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ， $a \geq \frac{5}{2}$ ，若不等式 $f(x_1) \geq mx_2$ 恒成立，试求实数 m 的取值范围。

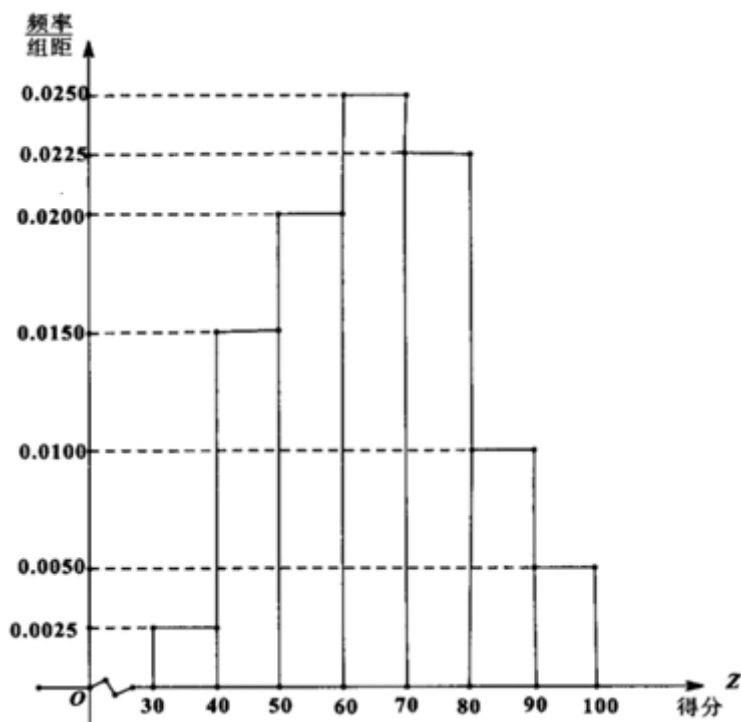
20. (12分) 已知函数 $f(x) = \sin x + \ln x - 1$ 。

(I) 求 $f(x)$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 处的切线方程；

(II) 求证： $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上存在唯一的极大值；

(III) 直接写出函数 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上的零点个数。

21. (12分) 2019年安庆市在大力推进城市环境、人文精神建设的过程中，居民生活垃圾分类逐渐形成意识。有关部门为宣传垃圾分类知识，面向该市市民进行了一次“垃圾分类知识”的网络问卷调查，每位市民仅有一次参与机会，通过抽样，得到参与问卷调查中的1000人的得分数据，其频率分布直方图如图：



(1) 由频率分布直方图可以认为，此次问卷调查的得分 Z 服从正态分布 $N(\mu, 210)$ ， μ 近似为这1000人得分的平均值（同一组数据用该区间的中点值作代表），利用该正态分布，求 $P(50.5 < Z < 94)$ ；

(2) 在(1)的条件下, 有关部门为此次参加问卷调查的市民制定如下奖励方案:

(i) 得分不低于 μ 可获赠 2 次随机话费, 得分低于 μ 则只有 1 次:

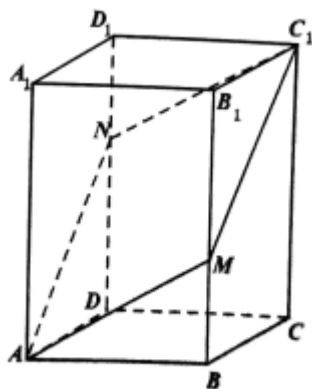
(ii) 每次赠送的随机话费和对应该概率如下:

赠送话费 (单位: 元)	10	20
概率	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

现有一位市民要参加此次问卷调查, 记 X (单位: 元) 为该市民参加问卷调查获赠的话费, 求 X 的分布列. 附:

$\sqrt{210} = 14.5$, 若 $Z: N(\mu, \delta^2)$, 则 $P(\mu - \delta < Z < \mu + \delta) = 0.6826$, $P(\mu - 2\delta < Z < \mu + 2\delta) = 0.9544$.

22. (10 分) 如图, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 1$, $AA_1 = 3$, 过顶点 A , C_1 的平面与棱 BB_1 , DD_1 分别交于 M , N 两点 (不在棱的端点处).



(1) 求证: 四边形 AMC_1N 是平行四边形;

(2) 求证: AM 与 AN 不垂直;

(3) 若平面 AMC_1N 与棱 BC 所在直线交于点 P , 当四边形 AMC_1N 为菱形时, 求 PC 长.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

根据条件将问题转化为 $\frac{\ln x + 1}{x - 1} > \frac{k}{x}$, 对于 $x > 1$ 恒成立, 然后构造函数 $h(x) = x \cdot \frac{\ln x + 1}{x - 1}$, 然后求出 $h(x)$

的范围, 进一步得到 k 的最大值.

【详解】

Q $f(x) = \frac{k}{x} (k \in \mathbb{N}_+)$, $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x-1}$, 对任意的 $c > 1$, 存在实数 a, b 满足 $0 < a < b < c$, 使得 $g(a) = f(b) = g(c)$,

$\therefore$ 易得 $g(c) = f(b) > f(c)$, 即 $\frac{\ln c + 1}{c-1} > \frac{k}{c}$ 恒成立,

$\therefore \frac{\ln x + 1}{x-1} > \frac{k}{x}$, 对于 $x > 1$ 恒成立,

设 $h(x) = x \cdot \frac{\ln x + 1}{x-1}$, 则 $h'(x) = \frac{x-2-\ln x}{(x-1)^2}$,

令 $q(x) = x-2-\ln x$, $\therefore q'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$ 在 $x > 1$ 恒成立,

Q $q(3) = 3-2-\ln 3 < 0$, $q(4) = 4-2-\ln 4 > 0$,

故存在 $x_0 \in (3, 4)$, 使得 $q(x_0) = 0$, 即 $x_0 - 2 = \ln x_0$,

当 $x \in (1, x_0)$ 时, $q(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $q(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增.

$\therefore h(x)_{\min} = h(x_0) = \frac{x_0 \ln x_0 + x_0}{x_0 - 1}$, 将 $x_0 - 2 = \ln x_0$ 代入得:

$\therefore h(x)_{\min} = h(x_0) = \frac{x_0(x_0 - 2) + x_0}{x_0 - 1} = x_0$,

Q $k \in \mathbb{N}_+$, 且 $k < h(x)_{\min} = x_0$,

$\therefore k \leq 3$

故选: A

【点睛】

本题考查了利用导数研究函数的单调性, 零点存在定理和不等式恒成立问题, 考查了转化思想, 属于难题.

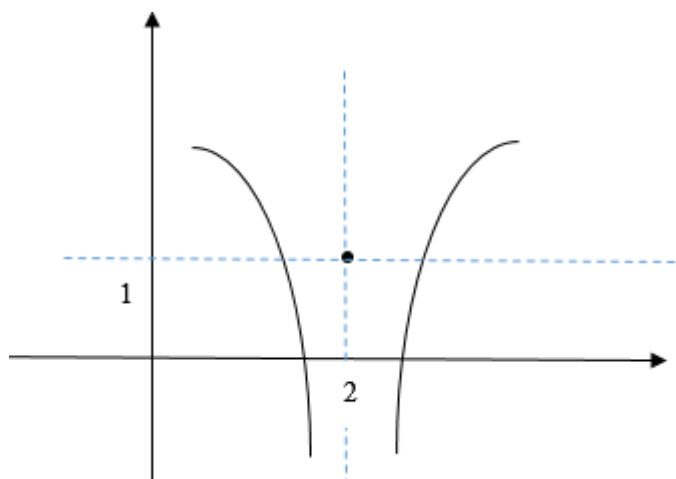
2、B

【解析】

画出函数 $f(x)$ 的图象, 利用函数的图象判断函数的零点个数, 然后转化求解, 即可得出结果.

【详解】

作出函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2 \\ \log_a |x-2| + 1, & x \neq 2, a > 1 \end{cases}$ 的图象如图所示,



令 $f(x)=t$,

由图可得关于 x 的方程 $f(x)=t$ 的解有两个或三个 ($t=1$ 时有三个, $t \neq 1$ 时有两个),

所以关于 t 的方程 $t^2+bt+c=0$ 只能有一个根 $t=1$ (若有两个根, 则关于 x 的方程 $f^2(x)+bf(x)+c=0$ 有四个或五个根),

由 $f(x)=1$, 可得 x_1, x_2, x_3 的值分别为 $1, 2, 3$,

$$\text{则 } x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=1 \times 2+2 \times 3+1 \times 3=11$$

故选 **B**.

【点睛】

本题考查数形结合以及函数与方程的应用, 考查转化思想以及计算能力, 属于常考题型.

3、 **C**

【解析】

两复数相等, 实部与虚部对应相等.

【详解】

$$\text{由 } 3+ai=b-(2a-1)i,$$

$$\text{得 } \begin{cases} 3=b \\ a=1-2a \end{cases}, \text{ 即 } a=\frac{1}{3}, b=1.$$

$$\therefore b=9a.$$

故选: **C**.

【点睛】

本题考查复数的概念, 属于基础题.

4、 **D**

【解析】

根据 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的增函数及 $\frac{f(x)}{f'(x)}$ 有意义可得 $f'(x) > 0$ ，构建新函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ，利用导数可得

$g(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的增函数，从而可得正确的选项.

【详解】

因为 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的增函数，故 $f'(x) \geq 0$.

又 $\frac{f(x)}{f'(x)}$ 有意义，故 $f'(x) \neq 0$ ，故 $f'(x) > 0$ ，所以 $f(x) < xf'(x)$.

令 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ，则 $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0$ ，

故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，所以 $g(3) > g(2)$ 即 $\frac{f(3)}{3} > \frac{f(2)}{2}$ ，

整理得到 $2f(3) > 3f(2)$.

故选：D.

【点睛】

本题考查导数在函数单调性中的应用，一般地，数的大小比较，可根据数的特点和题设中给出的原函数与导数的关系构建新函数，本题属于中档题.

5、B

【解析】

由 M ， P ， N 三点共线，可得 $\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\mu} = 1$ ，转化 $\lambda + \mu = (\lambda + \mu) \left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\mu} \right)$ ，利用均值不等式，即得解.

【详解】

因为点 P 为 BC 中点，所以 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ，

又因为 $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AN} = \mu\overrightarrow{AC}$ ，

所以 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2\lambda}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2\mu}\overrightarrow{AN}$.

因为 M ， P ， N 三点共线，

所以 $\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\mu} = 1$ ，

$$\text{所以 } \lambda + \mu = (\lambda + \mu) \left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\mu} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda} \right) + \frac{1}{2} \dots 1 + \frac{1}{2} \times 2 \sqrt{\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\lambda}} = 2,$$

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\mu}{\lambda}, \\ \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\mu} = 1 \end{cases} \quad \text{即 } \lambda = \mu = 1 \text{ 时等号成立,}$$

所以 $\lambda + \mu$ 的最小值为 1.

故选：B

【点睛】

本题考查了三点共线的向量表示和利用均值不等式求最值，考查了学生综合分析，转化划归，数学运算的能力，属于中档题.

6、A

【解析】

根据偶函数的性质和单调性即可判断.

【详解】

解：对 $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ ，且 $x_1 \neq x_2$ ，有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

$f(x)$ 在 $x \in (-\infty, 0)$ 上递增

因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$

所以 $f(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上递减

又因为 $\left| \log_2 \frac{1}{6} \right| = \log_2 6 > 2$ ， $1 < \ln \pi < 2$ ， $0 < e^{-\frac{1}{2}} < 1$

所以 $b > a > c$

故选：A

【点睛】

考查偶函数的性质以及单调性的应用，基础题.

7、B

【解析】

根据新运算的定义分别得出 2018 ◆ 2020 和 2020 ★ 2018 的值，可得选项.

【详解】

由 $(2n) \star 2018 = 2[(2n+2) \star 2018]$ ，得 $(2n+2) \star 2018 = \frac{1}{2}(2n \star 2018)$ ，

又 $2 \star 2018 = 1$ ，所以 $4 \star 2018 = \frac{1}{2}$ ， $6 \star 2018 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ， $8 \star 2018 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ ， $\dots$ ，以此类推，

$$2020 \star 2018 = (2 \times 1010) \star 2018 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1010-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1009}，$$

又 $2018 \blacklozenge (n+1) = 2(2018 \blacklozenge n)$ ， $2018 \blacklozenge 1 = 1$ ，

所以 $2018 \blacklozenge 2 = 2$ ， $2018 \blacklozenge 3 = 2^2$ ， $2018 \blacklozenge 4 = 2^3$ ， $\dots$ ，以此类推， $2018 \blacklozenge 2020 = 2^{2019}$ ，

$$\text{所以 } (2018 \blacklozenge 2020)(2020 \star 2018) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1009} \times 2^{2019} = 2^{1010}，$$

故选：B.

【点睛】

本题考查定义新运算，关键在于理解，运用新定义进行求值，属于中档题.

8、A

【解析】

a 是函数 $f(x)$ 的零点，根据五点法求出图中零点及 y 轴左边第一个零点可得.

【详解】

由题意 $\frac{3}{4}T = \frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{6}$ ， $T = \pi$ ， $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 y 轴右边的第一个零点为 $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$ ，在 y 轴左边第一个零点是

$$\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}，$$

$\therefore |a|$ 的最小值是 $\frac{\pi}{12}$ ．

故选：A.

【点睛】

本题考查三角函数的周期性，考查函数的对称性．函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的零点就是其图象对称中心的横坐标．

9、A

【解析】

先求 n ，再确定展开式中的有理项，最后求系数之和.

【详解】

解： $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中二项式系数和为 256

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/867006103161010003>