

2024-2025 学年上海市松江区高三上学期开学摸底考数学检测试卷

(一)

一、填空题（本大题共有 12 小题，满分 54 分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，1-6 题每个空格填对得 4 分，7-12 题每个空格填对得 5 分，否则一律得 0 分.

1. 若集合 $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$, 则 $A \cup B =$ _____.

2. 不等式 $1 - |x| < 0$ 的解集为_____.

3. 若 $z = \sqrt{2} + i$ (i 为虚数单位), 则 z^2 的共轭复数为_____.

4. 若角 α 的终边经过点 $P(3, -4)$, 则 $\cos \alpha + \tan \alpha =$ _____.

5. 某校高一(1)班有学生 40 人, 其中共青团员 15 人, 全班分成 4 个小组, 第一组有学生 10 人, 共青团员 4 人, 从该班任选一个作学生代表. 已知选到的是共青团员, 求他是第一组学生的概率_____.

6. 若 $\left(x - \frac{a}{x}\right)^9$ 的二项展开式中 x^3 的系数是 -84 , 则实数 $a =$ _____.

7. 已知圆 $C: (x+2)^2 + (y-4)^2 = 1$, 则圆心 C 到直线 $l: kx + y - k + 3 = 0$ 的最大距离为_____.

8. 设当 $x = \theta$ 时, 函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ 取得最大值, 则 $\cos \theta$ _____.

9. 已知 $M(x, y)$ 为函数 $f(x) = \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 图像上的任意一点, 则 $x + 2y$ 的最大值为_____.

11. 已知两个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - 2\vec{b}|$, 则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为_____.

12. 定义 $H_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + 2^{n-1}a_n}{n}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的“均值”, 已知数列 $\{b_n\}$ 的“均

值” $H_n = 2^{n+1}$, 记数列 $\{b_n - kn\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n \leq S_6$ 对任意正整数 n 恒成立, 则实数 k 的取值范围为_____.

12. 若关于 x 的方程 $tx^2 - 2t\ln x + 3(t-4) = 0$ 在区间 $(0, e)$ 内有两个不同的实数解, 那么实数 t 的取值范围是_____.

二、选择题（本大题共有 4 题，满分 18 分，第 13、14 题每题 4 分，第 15、16 题每题 5 分）
 每题有且只有一个正确选项。考生应在答题纸的相应位置，将代表正确选项的小方格涂黑。

13. “ $x = 4$ ”是“ $x \geq 3$ ”成立的（ ）条件。

- A. 充分非必要 B. 必要非充分 C. 充分必要 D. 既非充分又非必要

14. 若甲乙两人从 4 门课程中各选修 2 门，则甲乙所选的课程中恰有 1 门相同的选法有（ ）

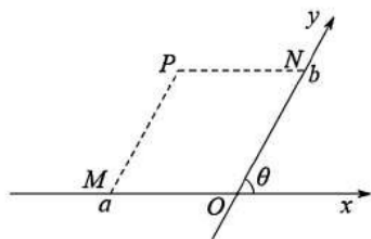
- A. 6 种 B. 12 种 C. 24 种 D. 30 种

15. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，线段 B_1D_1 上有两个动点 E, F ，若

$EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，则下列结论中错误的是（ ）

- A. $AC \perp BE$ B. $EF \parallel$ 平面 $ABCD$
 C. 异面直线 AE, BF 所成的角为定值 D. 三棱锥 $A - BEF$ 的体积为定值

16. 我们知道，互相垂直且有公共原点的两条数轴构成平面直角坐标系。如果坐标系中两条坐标轴的原点重合且不互相垂直，那么这样的坐标系称为“斜坐标系”。在斜坐标系中，两条坐标轴的公共原点称为斜坐标系的原点，其坐标记为 $(0, 0)$ 。在 x 轴（ y 轴）上的点的纵坐标（横坐标）为 0，如图，在斜坐标系中，如果 x 轴与 y 轴相交所成的角为 θ ，过平面任意一点 P ，分别作坐标轴的平行线，交 x 轴于点 M ，交 y 轴于点 N ，将点 M 在 x 轴上的坐标 a ，点 N 在 y 轴上的坐标 b 称为点 P 在该坐标系中的坐标，记为 $P(a, b)$ 。若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是该坐标系中的任意两点，则点 A, B 之间的距离 $|AB|$ 为（ ）



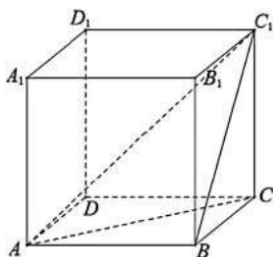
- A. $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
 B. $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\theta + (y_1 - y_2)^2}$
 C. $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 - 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\theta + (y_1 - y_2)^2}$

D. $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 \pm 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\theta + (y_1 - y_2)^2}$

三、解答题（本大题满分 78 分）本大题共有 5 题，解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤

17.（本题满分 14 分，第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分）

如图，已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a .



(1) 求直线 AC_1 和平面 $ABCD$ 所成角的大小；

(2) 求二面角 $C_1 - AB - C$ 的大小.

18.（本题满分 14 分，第 1 小题 7 分，第 2 小题 7 分）

已知 $f(x) = x + a\sin x$ ，曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(\pi, \pi)$ 处的切线斜率为 2.

(1) 求 a 的值；

(2) 求不等式 $f(x+1) + f(3-2x) > 0$ 的解集.

19.（本题满分 14 分，第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分）

在课后 2021 年 8 月，义务交于阶段“双减”政策出台，某初中在课后延时服务开设奥数、科技、体育等特色课程，为了进一步了解学生选课的情况，所及选取了 400 人进行问卷调查，整理后获得如下统计表：

	喜欢奥数	不喜欢奥数	总计
已选奥数课（A 组）	150	50	200
未选奥数课（B 组）	90	110	200
总计	240	160	400

(1) 若从样本内喜欢奥数的 240 人中用分层抽样方法随机抽取 32 人，则应在 A 组、B 组各抽取多少人？

(2) 能否有 99.5% 的把握认为选报奥数延时课与喜欢奥数有关？

附：

$P(\chi^2 \geq k)$	0.010	0.005	0.001
k_0	6.635	7.879	10.828

参考公式: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

20. (本题满分 18 分, 第 1 小题 4 分, 第 2 小题 6 分, 第 3 小题 8 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 $C_1: 2x^2 - y^2 = 1$.

(1) 过 C_1 的左顶点引 C_1 的一条渐进线的平行线, 求该直线与另一条渐进线及 x 轴围成的三角形的面积;

(2) 设斜率为 1 的直线 l 交 C_1 于 P 、 Q 两点, 若 l 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切, 求证 $OP \perp OQ$;

(3) 设椭圆 $C_2: 4x^2 + y^2 = 1$, 若 M 、 N 分别是 C_1 、 C_2 上的动点, 且 $OM \perp ON$, 求证 O 到直线 MN 的距离是定值.

21. (本题满分 18 分, 第 1 小题 4 分, 第 2 小题 6 分, 第 3 小题 8 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中的相邻两项 a_{2k-1}, a_{2k} 是关于 x 的方程 $x^2 - (3k + 2^k)x + 3k \cdot 2^k = 0$ 的两个根,

且 $a_{2k-1} \leq a_{2k} (k=1, 2, 3, \dots)$.

(1) 求 a_1, a_3, a_5, a_7 ;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} ;

(3) 记 $f(n) = \frac{1}{2} \left(\frac{|\sin n|}{\sin n} + 3 \right)$, $T_n = \frac{(-1)^{f(2)}}{a_1 a_2} + \frac{(-1)^{f(3)}}{a_3 a_4} + \frac{(-1)^{f(4)}}{a_5 a_6} + \dots + \frac{(-1)^{f(n+1)}}{a_{2n-1} a_{2n}}$, 求证:

$$\frac{1}{6} \leq T_n \leq \frac{5}{24}.$$

开学考数学答案

一、填空题（本大题共有 12 小题，满分 54 分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，1-6 题每个空格填对得 4 分，7-12 题每个空格填对得 5 分，否则一律得 0 分.

1. 【正确答案】 $\{1, 2, 3, 4\}$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

2. 【正确答案】 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$$1 - |x| < 0 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow x > 1, \text{ 或 } x < -1.$$

3. 【正确答案】 $1 - 2\sqrt{2}i$

$$z^2 = (\sqrt{2} + i)^2 = 1 + 2\sqrt{2}i, \text{ 则 } z^2 \text{ 的共轭复数为 } 1 - 2\sqrt{2}i.$$

4. 【正确答案】 $-\frac{11}{15}$

$$\cos \alpha + \tan \alpha = \frac{3}{5} + \frac{-4}{3} = -\frac{11}{15}.$$

5. 【正确答案】 $\frac{4}{15}$

设事件 A 表示“选到第一组学生”，事件 B 表示“选到共青团员”，

$$\text{由题意, } P(A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4},$$

要求的是在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的条件概率 $P(A|B)$ ，

不难理解，在事件 B 发生的条件下，有 15 种不同的选择，

$$\text{其中属于第一组的有 4 种选择, 因此 } P(A|B) = \frac{4}{15}.$$

6. 【正确答案】 1

$$\text{设 } T_{r+1} = C_9^r x^{9-r} \left(-\frac{a}{x}\right)^r = C_9^r (-a)^r x^{9-2r} \text{ 为含的项, 则 } 9-2r=3 \Rightarrow r=3,$$

$$\therefore C_9^3 (-a)^3 = -84 \Rightarrow a = 1.$$

7. 【正确答案】 $\sqrt{58}$

直线经过的定点为 $(1, -3)$ ，当圆心 $(-2, 4)$ 与定点 $(1, -3)$ 的连线与直线垂直时，距离最大为

$$\sqrt{3^2+7^2}=\sqrt{58}.$$

8. 【正确答案】 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow \theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow \cos \theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

9. 【正确答案】 $2\pi+4$

$$\text{设 } g(x)=x+2y=x+2\cos x \Rightarrow g'(x)=1-2\sin x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}, x=\frac{5\pi}{6},$$

则可知当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right)$, $g(x)$ 单调递增, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 时, $g(x)$ 单调递减

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}, g(2\pi)=2\pi+4>g\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

则 $x+2y$ 的最大值为 $2\pi+4$.

10. 【正确答案】 $\frac{1}{2}\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|}$

$$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-2\vec{b}| \Rightarrow \vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{b}^2,$$

则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为 $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{1}{2}\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|}$.

11. 【正确答案】 $\left[\frac{16}{7}, \frac{7}{3}\right]$

$$\text{因为 } H_n=\frac{b_1+2b_2+\text{L}+2^{n-1}b_n}{n}=2^{n+1}, \text{ 所以 } b_1+2b_2+\text{L}+2^{n-1}b_n=n\cdot 2^{n+1},$$

$$\text{所以 } b_1+2b_2+\text{L}+2^{n-2}b_{n-1}=(n-1)\cdot 2^n (n\geq 2),$$

$$\text{所以 } 2^{n-1}b_n=n\cdot 2^{n+1}-(n-1)\cdot 2^n=(n+1)\cdot 2^n,$$

$$\text{对 } b_1 \text{ 也成立, 所以 } b_n=2(n+1), \text{ 则 } b_n-kn=(2-k)n+2,$$

所以数列 $\{b_n-kn\}$ 为等差数列,

记数列 $\{b_n - kn\}$ 为 $\{c_n\}$. 故 $S_n \leq S_6$ 对任意的 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 恒成立,

可化为: $c_6 \geq 0, c_7 \leq 0$, 即 $\begin{cases} 6(2-k)+2 \geq 0 \\ 7(2-k)+2 \leq 0 \end{cases}$, 解得 $\frac{16}{7} \leq k \leq \frac{7}{3}$.

12. 【正确答案】 $\left(\frac{12}{e^2+1}, 3\right)$

$$tx^2 - 2t\ln x + 3(t-4) = 0 \Rightarrow t(x^2 - 2\ln x + 3) = 12 \Rightarrow x^2 - 2\ln x + 3 = \frac{12}{t},$$

$$\text{设 } f(x) = x^2 - 2\ln x + 3, f'(x) = 2x - \frac{2}{x},$$

则可知当 $x \in (0, 1)$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x)$ 单调递减,

若关于 x 的方程 $tx^2 - 2t\ln x + 3(t-4) = 0$ 在区间 $(0, e)$ 内有两个不同的实数解,

$$\text{则 } \frac{12}{t} \in (f(1), f(e)) = (4, e^2 + 1) \Rightarrow t \in \left(\frac{12}{e^2+1}, 3\right).$$

二、选择题 (本大题共有 4 题, 满分 18 分, 第 13、14 题每题 4 分, 第 15、16 题每题 5 分)

每题有且只有一个正确选项. 考生应在答题纸的相应位置, 将代表正确选项的小方格涂黑.

13. 【正确答案】 A

由小范围推大范围可知为充分非必要条件, 故选 A.

14. 【正确答案】 C

则甲乙所选的课程中恰有 1 门相同的选法有 $C_4^1 C_3^1 C_2^1 = 24$, 故选 C.

15. 【正确答案】 C

对于 A, $\because AC \perp$ 平面 BB_1D_1D , 又 $BE \subset$ 平面 BB_1D_1D ,

$\therefore AC \perp BE$ 故 A 正确;

对于 B, $\because B_1D_1 \parallel$ 平面 $ABCD$, 又 E, F 在直线 B_1D_1 上运动,

$\therefore EF \parallel$ 平面 $ABCD$, 故 B 正确;

对于 D, 由于点 B 到直线 B_1D_1 的距离不变, 故 $\triangle BEF$ 的面积为定值,

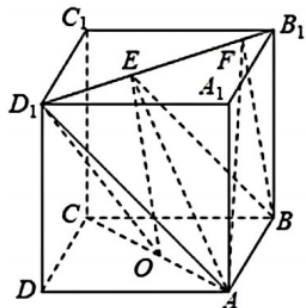
又点 A 到平面 BEF 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 故三棱锥 $A-BEF$ 的体积为定值, 故 D 正确;

对于 C, 当点 E 在 D_1 处, F 为 B_1D_1 的中点时, 异面直线 AE, BF 所成的角是 $\angle OD_1A$,

当 E 在上底面的中心时, F 在 B_1 的位置, 异面直线 AE, BF 所成的角是 $\angle OEA$,

显然两个角不相等, 故 C 不正确,

故选 C.



16. 【正确答案】B

设 x 轴方向的单位向量为 $\vec{i}$, y 轴方向的单位向量为 $\vec{j}$,

则 $\vec{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$,

得 $\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$,

由向量的数量积运算, 得 $|\vec{AB}|^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB}$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cos \theta = \cos \theta$,

从而得 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos \theta + (y_1 - y_2)^2}$, 故选 B.

三、解答题 (本大题满分 78 分) 本大题共有 5 题, 解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤

17. 【正确答案】(1) $\arctan \frac{\sqrt{2}}{2}$; (2) $\frac{\pi}{4}$

(1) $\because CC_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore$ 直线 AC_1 和平面 $ABCD$ 所成角为 $\angle CAC_1$,

$$\therefore \tan \angle CAC_1 = \frac{CC_1}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

则直线 AC_1 和平面 $ABCD$ 所成角的大小为 $\arctan \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) $\because BC_1 \perp AB, BC \perp AB$,

则二面角 $C_1 - AB - C$ 的平面角为 $\angle CBC_1 = \frac{\pi}{4}$.

18. 【正确答案】(1) -1 ; (2) $(-\infty, 4)$

(1) 由题意知点 $P(\pi, \pi)$ 在曲线上,

$$Q \quad f(x) = x + a \sin x, \therefore f'(x) = 1 + a \cos x,$$

$$\therefore f'(\pi) = 1 + a \cos \pi = 1 - a = 2 \Rightarrow a = -1.$$

(2) 由 (1) 知 $f(x) = x - \sin x \Rightarrow f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ 恒成立, 则 $y = f(x)$ 在 R 上为严格增函数, 且为奇函数,

$$\text{则 } f(x+1) + f(3-2x) > 0 \Rightarrow f(x+1) > -f(3-2x) = f(2x-3),$$

$$\therefore x+1 > 2x-3 \Rightarrow x < 4,$$

则不等式 $f(x+1) + f(3-2x) > 0$ 的解集为 $(-\infty, 4)$.

19. 【正确答案】(1) 20, 12; (2) 有关

$$(1) \text{ 应在 A 组抽取 } \frac{32}{240} \times 150 = 20, \text{ 应在 B 组抽取 } \frac{32}{240} \times 90 = 12.$$

(2) 零假设为 H_0 : 选报奥数延时课与喜欢奥数无关. 根据列联表中的数据, 经计算得到

$$\chi^2 = \frac{400 \times (150 \times 110 - 90 \times 50)^2}{200 \times 200 \times 240 \times 160} = 37.5 > 7.879,$$

因此依据 $\alpha = 0.005$ 的独立性检验, 可以推断 H_0 不成立,

因此有 99.5% 的把握认为选报奥数延时课与喜欢奥数有关.

20. 【正确答案】(1) $\frac{\sqrt{2}}{8}$; (2) 见解析; (3) 是

$$(1) \text{ 双曲线 } C_1: 2x^2 - y^2 = 1, \text{ 左顶点 } A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \text{ 渐近线方程: } y = \pm\sqrt{2}x.$$

$$\text{过点 } A \text{ 与渐近线 } y = \sqrt{2}x \text{ 平行的直线方程为 } y = \sqrt{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \text{ 即 } y = \sqrt{2}x + 1.$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y = -\sqrt{2}x \\ y = \sqrt{2}x + 1 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{所以所求三角形的面积 } S = \frac{1}{2} |OA| |y| = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

(2) 设直线 PQ 的方程是 $y = x + b$. 因直线与已知圆相切,

$$\text{故 } \frac{|b|}{\sqrt{2}} = 1, \text{ 即 } b^2 = 2.$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = x + b \\ 2x^2 - y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 得 } x^2 - 2bx - b^2 - 1 = 0.$$

$$\text{设 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), \text{ 则 } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2b \\ x_1 x_2 = -b^2 - 1 \end{cases}.$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 2x_1 x_2 + b(x_1 + x_2) + b^2$$

$$= 2(-b^2 - 1) + b \cdot 2b + b^2 = b^2 - 2 = 0$$

故 $OP \perp OQ$.

(3) 当直线 ON 垂直于 x 轴时,

$$|ON| = 1, |OM| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 则 } O \text{ 到直线 } MN \text{ 的距离为 } \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

当直线 ON 不垂直于 x 轴时,

设直线 ON 的方程为 $y = kx$ (显然 ) , 则直线 OM 的方程为 $y = -\frac{1}{k}x$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx \\ 4x^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x^2 = \frac{1}{4+k^2} \\ y^2 = \frac{k^2}{4+k^2} \end{cases}, \text{ 所以 } |ON|^2 = \frac{1+k^2}{4+k^2}.$$

$$\text{同理 } |OM|^2 = \frac{1+k^2}{2k^2-1}.$$

设 O 到直线 MN 的距离为 d , 因为 $(|OM|^2 + |ON|^2)d^2 = |OM|^2 |ON|^2$,

$$\text{所以 } \frac{1}{d^2} = \frac{1}{|OM|^2} + \frac{1}{|ON|^2} = \frac{3k^2+3}{k^2+1} = 3, \text{ 即 } d = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

综上, O 到直线 MN 的距离是定值.

21. 【正确答案】(1) $a_1 = 2, a_3 = 4, a_5 = 8, a_7 = 12$; (2) $S_{2n} = \frac{3n^2 + 3n}{2} + 2^{n+1} - 2$; (3) 见

解析;

(1) 由题设: $(x-3k)(x-2^k)=0$, 即两根为 $3k, 2^k$, 又 $a_{2k-1} \leq a_{2k} (k=1,2,3,\dots)$,

当 $1 \leq k \leq 3, k \in \mathbf{N}^*$ 时, $3k > 2^k$, 即 $a_{2k} = 3k, a_{2k-1} = 2^k$;

当 $k \geq 4, k \in \mathbf{N}^*$ 时, $3k < 2^k$, 即 $a_{2k} = 2^k, a_{2k-1} = 3k$;

$$\therefore a_1 = a_{2 \times 1 - 1} = 2, a_3 = a_{2 \times 2 - 1} = 4, a_5 = a_{2 \times 3 - 1} = 8, a_7 = a_{2 \times 4 - 1} = 12.$$

()

2

$$S_{2n} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = (3 + 6 + \dots + 3n) + (2 + 2^2 + \dots + 2^n) = \frac{3n^2 + 3n}{2} + 2^{n+1} - 2.$$

$$(3) T_n = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 a_4} - \frac{1}{a_5 a_6} - \frac{1}{a_7 a_8} + \dots + \frac{(-1)^{f(n+1)}}{a_{2n-1} a_{2n}}, \text{ 而 } T_1 = \frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{6},$$

$$T_2 = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 a_4} = \frac{5}{24},$$

当 $n \geq 3$ 时,

$$T_n = \frac{1}{6} + \frac{1}{a_3 a_4} - \frac{1}{a_5 a_6} + \dots + \frac{(-1)^{f(n+1)}}{a_{2n-1} a_{2n}} \geq \frac{1}{6} + \frac{1}{a_3 a_4} - \left(\frac{1}{a_5 a_6} + \dots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} \right) \geq$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6 \cdot 2^2} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6 \cdot 2^2} - \frac{1}{24} \left(1 - \frac{1}{2^{n-3}} \right) > \frac{1}{6},$$

同时,

$$T_n = \frac{5}{24} - \frac{1}{a_5 a_6} - \frac{1}{a_7 a_8} \dots + \frac{(-1)^{f(n+1)}}{a_{2n-1} a_{2n}} \leq \frac{5}{24} - \frac{1}{a_5 a_6} + \left(\frac{1}{a_7 a_8} + \dots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} \right) \leq$$

$$\frac{5}{24} - \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = \frac{5}{24} - \frac{1}{9 \cdot 2^n} < \frac{5}{24},$$

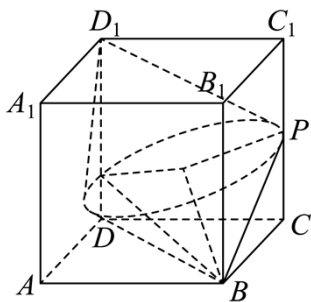
$\therefore$ 综上, $\frac{1}{6} \leq T_n \leq \frac{5}{24}$, 得

2024-2025 学年上海市松江区高三上学期开学摸底考数学检测试卷

(二)

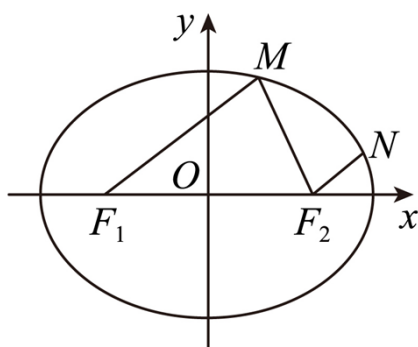
一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分，第 1-6 题每题 4 分，第 7-12 题每题 5 分）

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | 0 < x < 3\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
2. 在复平面内, 复数 z 对应的点的坐标是 $(1, 2)$, 则 $i \cdot z =$ _____.
3. 在 $(\sqrt{x} - 2)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为 _____.
4. 双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的两条渐近线的夹角为 _____.
5. 已知向量 $\vec{a} = (-1, 2)$, $\vec{b} = (x^2, 2)$, 且 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{3}{5}$, 则 $x =$ _____.
6. 数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导, 若 $f'(2) = 3$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+3\Delta x) - f(2-\Delta x)}{\Delta x} =$ _____.
7. 已知随机变量 X 的分布为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, 且 $Y = aX + 3$, 若 $E[Y] = -2$, 则实数 $a =$ _____.
8. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, P 为棱 CC_1 的中点, $\triangle BPD_1$ 以 BD_1 为轴旋转一周, 则得到的旋转体的表面积是 _____.



9. 已知集合 $A = \left\{ x \mid \frac{2}{x-2} \geq 1, x \in \mathbf{R} \right\}$. 设函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x + a (x \in A)$ 的值域为 B , 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围为 _____.
10. 已知 2 件次品和 3 件正品放在一起, 现需要通过检测将其区分, 每次随机检测一件产品, 检测后不放回, 直到检测出 2 件次品或者检测出 3 件正品时检测结束, 则恰好检测四次停止的概率为 _____ (用数字作答).
11. 如图, 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, M, N

为椭圆上两点，满足 $F_1M \parallel F_2N$ ，且 $|F_2N|:|F_2M|:|F_1M|=1:2:3$ ，则椭圆 C 的离心率为_____.



12. 已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\vec{d}$ 都是平面向量，且 $|\vec{a}|=|2\vec{a}-\vec{b}|=|5\vec{a}-\vec{c}|=1$ ，若 $\langle \vec{a}, \vec{d} \rangle = \frac{\pi}{4}$ ，则 $|\vec{b}-\vec{d}|+|\vec{c}-\vec{d}|$ 的最小值为_____.

二、选择题（本大题共有 4 题，满分 18 分，第 13-14 题每题 4 分，第 15-16 题每题 5 分）

13. “ $a=2$ ”是“直线 $y=-ax+2$ 与 $y=\frac{a}{4}x-1$ 垂直”的

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

14. 已知 m ， n 是两条不同直线， α ， β 是两个不同平面，则下列命题错误的是（ ）.

A. 若 α ， β 不平行，则在 α 内不存在与 β 平行的直线
B. 若 m ， n 平行于同一平面，则 m 与 n 可能异面
C. 若 m ， n 不平行，则 m 与 n 不可能垂直于同一平面
D. 若 α ， β 垂直于同一平面，则 α 与 β 可能相交

15. 在 $\triangle ABC$ 中， P_0 是边 AB 上一定点，满足 $\vec{P_0B} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ ，且对于边 AB 上任一点 P ，恒有

$\vec{PB} \cdot \vec{PC} \geq \vec{P_0B} \cdot \vec{P_0C}$ ，则 $\triangle ABC$ 为（ ）

A. 等腰三角形 B. 钝角三角形
C. 直角三角形 D. 锐角三角形

16. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{|x|}$ ，若函数 $g(x) = [f(x)]^2 + af(x) - e^2 - ae$ 恰有 5 个不同的零点，则实

数 a 的取值范围是（ ）

A. $(-\infty, -2e)$ B. $(-\infty, -e)$ C. $(-\infty, -\frac{2}{e})$ D. $(-\infty, -\frac{1}{e})$

三、解答题（本大题共有 5 题，满分 78 分）解答下列各题必须写出必要的步骤.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/867011163012010053>