

第一讲
反比例函数面积问题

模块一

反比例函数基础复习

知识要点

反比例函数

1.概念：解析式形如 $y = \frac{k}{x}$ (常数 $k \neq 0$) 的函数

常数 k 叫做比例系数.

定义域是不为零的一切实数.

2.图像：反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (常数 $k \neq 0$) 的图像叫做双曲线，它有两支.

3.性质：

(1)当 $k > 0$ 时，反比例函数的图像经过第一、三象限；在每个象限内， y 随 x 的增大而减小；

(2)当 $k < 0$ 时，反比例函数的图像经过第二、四象限；在每个象限内， y 随 x 的增大而增大；

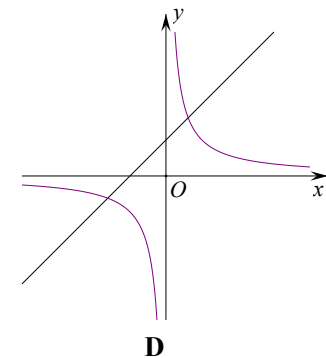
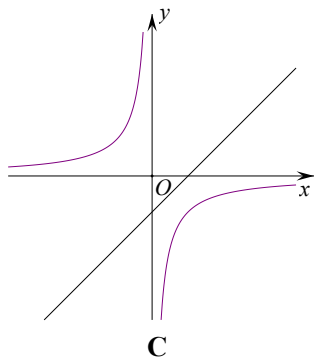
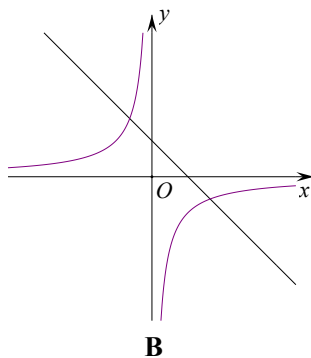
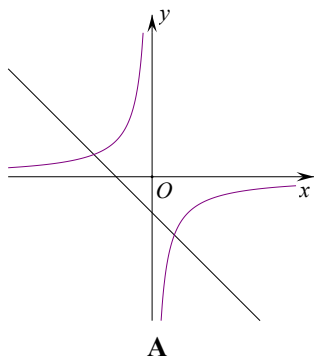
(3)图像的两支无限接近于 x 轴和 y 轴，但不会与 x 轴和 y 轴相交；

(4)双曲线上的点是关于原点成中心对称的，双曲线也是轴对称图形.

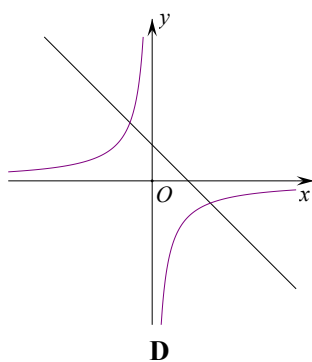
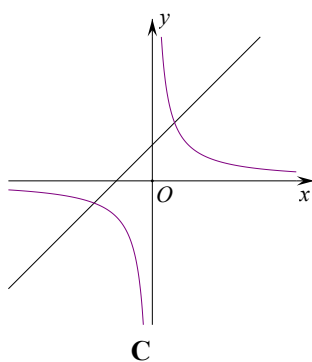
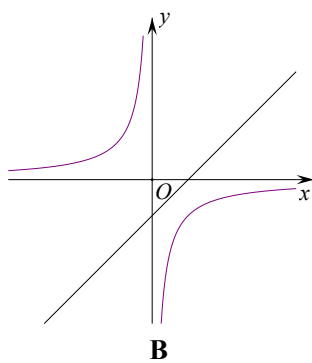
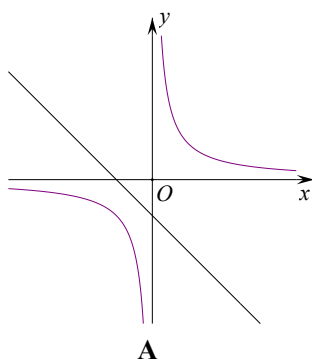
例题精讲

★☆☆☆☆

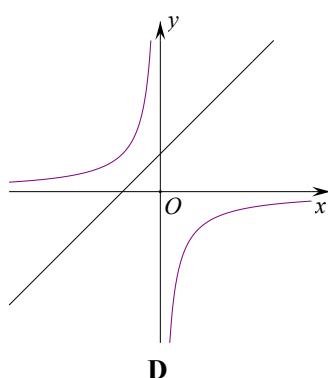
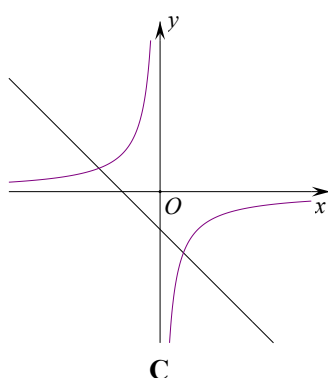
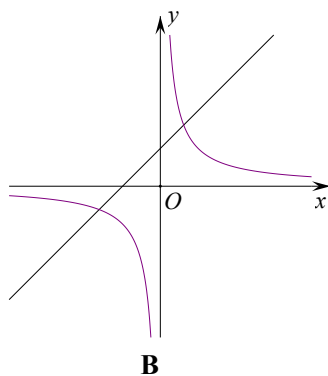
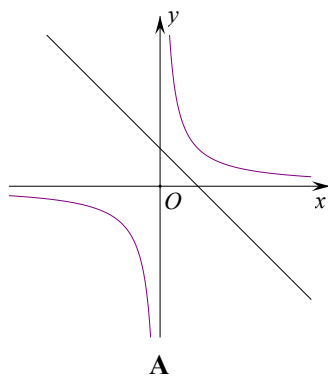
【例题1】 (1)满足函数 $y = kx - 1$ 和函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图像大致是 ()



(2) 函数 $y = kx + k$ 与 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 在同一直角坐标系中的图像大致是 ()



(3) 在同一坐标系内, 表示函数 $y = kx + b$ 与 $y = \frac{kb}{x} (k \neq 0, b \neq 0)$ 的图像只可能是下图中的 ()



【分析】 (1) A; (2) C; (3) B;

★★★★☆

【例题2】 (1) 已知一次函数 $y = x + m$ 与反比例函数 $y = \frac{m+1}{x}$ ($m \neq -1$)，它们的图像在第一象限内的交点为 $P(x_0, 3)$ 。求： x_0 的值，一次函数和反比例函数的解析式。

(2) 直线 $y = ax$ ($a > 0$) 与双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 交于 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 两点，求 $4x_1y_2 - 3x_2y_1$ 的值。

(3) 函数 $y_1 = x$ ($x \geq 0$)， $y_2 = \frac{4}{x}$ ($x > 0$) 的图像如图所示， $BC: x = a$ 为平行于 y 轴的一条直线，与 y_1 交于 C 点，与 y_2 交于点 B 。则以下结论：

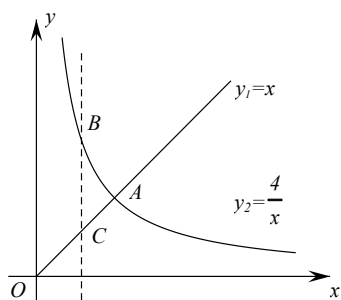
① 两函数图像的交点 A 的坐标为 $(2, 2)$ ；

② 当 $x > 2$ 时， $y_2 > y_1$ ；

③ 当 $a = 1$ 时， $BC = 3$ ；

④ 当 x 逐渐增大时， y_1 随着 x 的增大而增大， y_2 随着 x 的增大而减小。

其中正确结论的序号是_____。



【分析】 (1) $x_0 = 1$, $y = x + 2$, $y = \frac{3}{x}$.

(2) $4x_1y_2 - 3x_2y_1 = -x_1y_1 = -k = -3$.

(3) ①③④

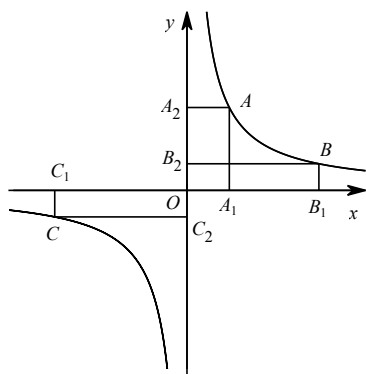
模块二 反比例函数 k 的几何意义

知识要点

(1) 矩形面积不变性：

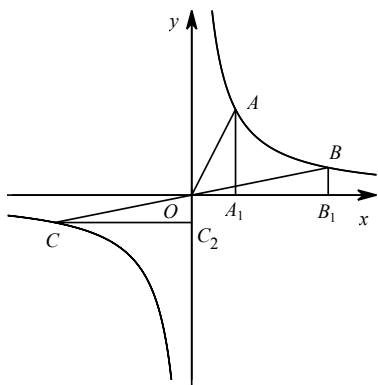
如图，在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图像上任取点 A, B, C ，过 A, B, C 向 x, y 轴作垂线，垂足分别为

$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ ，则 $S_{\text{矩形}AA_1OA_2} = S_{\text{矩形}BB_1OB_2} = S_{\text{矩形}CC_1OC_2} = |k|$ 。



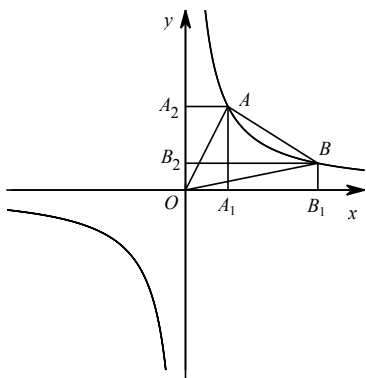
(2) 三角形面积不变性

如图，在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图像上任取点 A, B, C ，过 A, B, C 向 x 或 y 轴作垂线，垂足分别为 A_1, B_1, C_2 ，则 $S_{Rt\triangle AA_1O} = S_{Rt\triangle BB_1O} = S_{Rt\triangle OCC_2} = \frac{1}{2}|k|$ 。



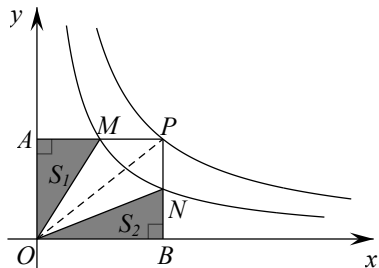
(3) 梯形面积不变性

如图，在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图像上任取点 A, B ，过 A, B 向 x, y 轴作垂线，垂足分别为 A_1, A_2, B_1, B_2 ，则 $S_{\text{梯形}ABB_1A_1} = S_{\text{梯形}ABB_2A_2} = S_{\triangle OAB}$ 。



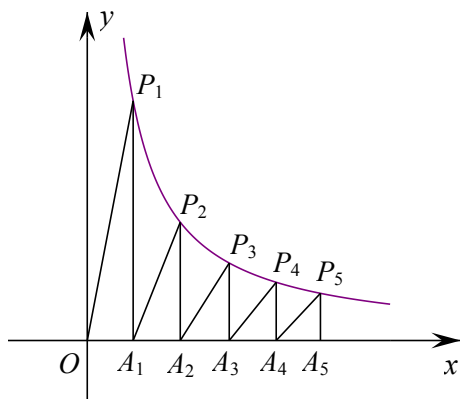
(4) 线段比例不变性

如图， P 是反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ 图像上的点，作 PA 垂直于 y 轴， PB 垂直于 x 轴，分别交 $y = \frac{k_2}{x}$ 于 M, N 两点。则①四边形 $MONP$ 的面积为定值；②若点 M 为 AP 中点，则 N 必为 PB 中点；③若点 M 为 AP 的 n 等分点时， N 必为 PB 的 n 等分点。



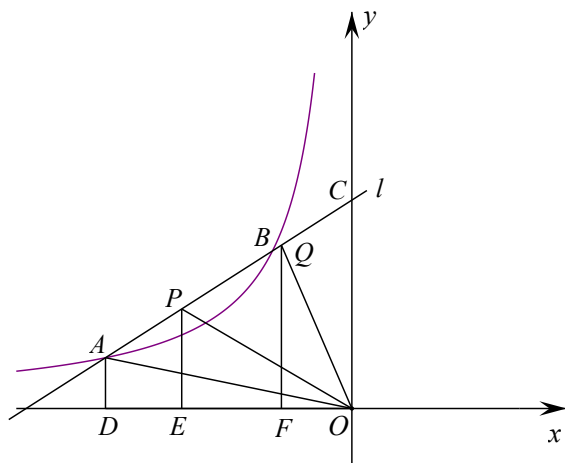
★★☆☆☆

【例题3】 (1)如图, 在 x 轴的正半轴上依次截取 $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$, 过点 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 分别作 x 轴的垂线与反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图像相交于点 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , 得直角三角形 OP_1A_1 , $A_1P_2A_2$, $A_2P_3A_3$, $A_3P_4A_4$, $A_4P_5A_5$, 并设其面积分别为 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 , 则 S_5 的值为_____.



【分析】 这是在反比例函数上找规律的问题, 在横坐标注意递增的条件下, 进而得到 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 的坐标, 及面积得求. 即 $S_5 = \frac{1}{5}$.

(2)如图, 直线 l 交 y 轴于点 C , 与双曲线 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 交于 A, B 两点, P 是线段 AB 上的点 (不与 A, B 重合), Q 为线段 BC 上的点 (不与 B, C 重合), 过点 A, P, Q 分别向 x 轴作垂线, 垂足分别为 D, E, F , 联结 OA, OP, OQ , 设 $\triangle AOD$ 的面积为 S_1 , $\triangle POE$ 的面积为 S_2 , $\triangle QOF$ 的面积为 S_3 , 则有 ()



A. $S_1 < S_2 < S_3$

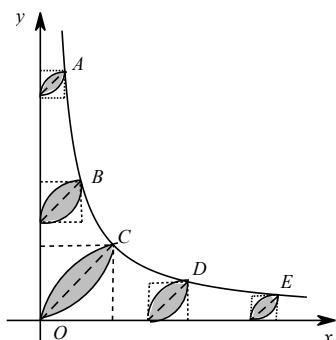
B. $S_3 < S_1 < S_2$

C. $S_3 < S_2 < S_1$

D. $S_1 = S_2 = S_3$

【分析】 B

(3) 已知 A 、 B 、 C 、 D 、 E 是反比例函数 $y = \frac{16}{x} (x > 0)$ 图像上五个整数点（横、纵坐标均为整数），分别以这些点向横轴或纵轴作垂线段，由垂线段所在的正方形边长为半径作四分之一一周的两条弧，组成如图所示的五个橄榄形（阴影部分），则这五个橄榄形的面积总和是_____（用含 π 的代数式表示）。

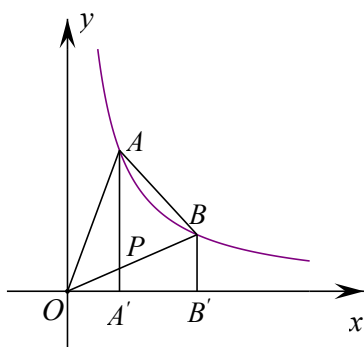


【分析】
$$S = \left(\frac{1}{4} \times \pi \times 1^2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1\right) \times 4 + \left(\frac{1}{4} \times \pi \times 2^2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2\right) \times 4 + \left(\frac{1}{4} \times \pi \times 4^2 - \frac{1}{2} \times 4 \times 4\right) \times 2$$

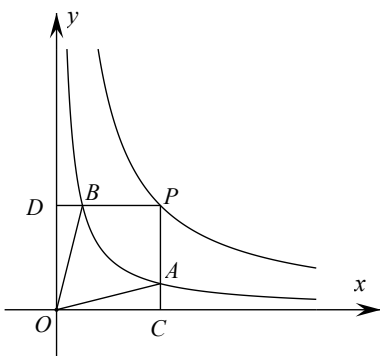
$$= 13\pi - 26$$

★★☆☆☆

【例题4】 (1) 如图，过反比例函数 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 的图像上任意两点 A 、 B ，分别作 x 轴的垂线，垂足为 A' 、 B' ，连结 OA 、 OB ， AA' 与 OB 的交点为 P ，记 $\triangle AOP$ 、梯形 $PA'B'B$ 、 $\triangle OAB$ 、梯形 $AA'B'B$ 的面积分别为 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 ，试比较它们的大小。



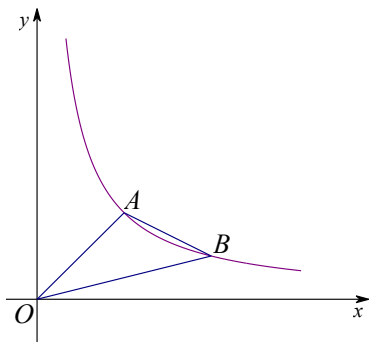
(2) 函数 $y = \frac{4}{x}$ 和 $y = \frac{1}{x}$ 在第一象限内的图像如图，点 P 是 $y = \frac{4}{x}$ 的图像上一动点， $PC \perp x$ 轴于点 C ，交 $y = \frac{1}{x}$ 的图像于点 A ， $PD \perp y$ 轴于点 D ，交 $y = \frac{1}{x}$ 的图像于点 B 。给出如下结论：
 ① $\triangle ODB$ 与 $\triangle OCA$ 的面积相等；② PA 与 PB 始终相等；③ 四边形 $PAOB$ 的面积大小不会发生变化；④ $CA = \frac{1}{3}AP$ 。其中所有正确结论的序号是_____。



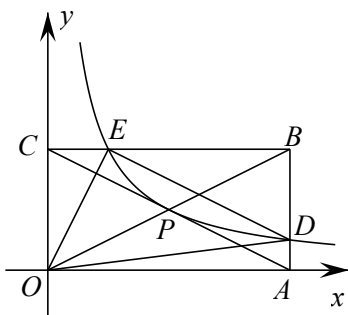
- 【分析】 (1) $S_3 = S_4 > S_1 = S_2$
 (2) ①③④

★★★☆☆

【例题5】 (1)如图, 双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 经过点 $A(2, 2)$ 与点 $B(4, m)$, 求 $\triangle AOB$ 的面积.



(2)如图, 矩形 $OACB$ 的顶点 A, C 的坐标分别是 $(4, 0)$ 和 $(0, 2)$, 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像过对角线的交点 P 并且与 AB, BC 分别交于 D, E 两点, 联结 OD, OE, DE , 则 $\triangle ODE$ 的面积为 _____.



【分析】 (1)分别将 $A(2, 2)$, $B(4, m)$ 分别代入到 $y = \frac{k}{x}$ 中, $\begin{cases} 2 = \frac{k}{2} \\ m = \frac{k}{4} \end{cases}$, 得 $\begin{cases} k = 4 \\ m = 1 \end{cases}$,

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times (1+2) \times (4-2) = 3.$$

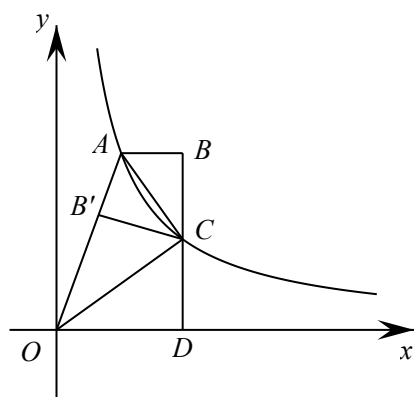
(2)易知 $P(2, 1) \therefore k = 2$

$$\therefore D(4, \frac{1}{2}), E(1, 2)$$

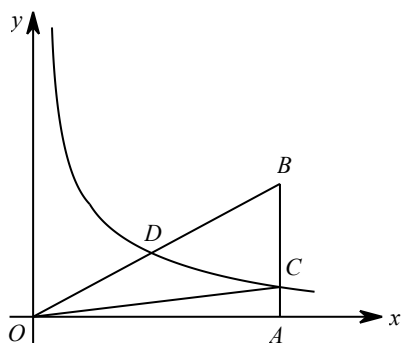
$$\therefore S_{\triangle ODE} = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{2} \right) (4-1) = \frac{15}{4}.$$

★★★☆☆

【例题6】 (1)双曲线 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 经过四边形 $OABC$ 的顶点 A 、 C ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB \parallel x$ 轴. 延长 BC 与 x 轴交于点 D ， OC 平分 $\angle AOD$. 将 $\triangle ABC$ 沿 AC 翻折后得到 $\triangle AB'C$ ， B' 点落在 OA 上，求四边形 $OABC$ 的面积.



(2)如图，已知：关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2k-1)x + k^2 = 0$ 的两根 x_1, x_2 满足 $x_1^2 - x_2^2 = 0$ ，双曲线 $y = \frac{4k}{x} (x > 0)$ ，经过 $Rt\triangle OAB$ 斜边 OB 的中点 D ，与直角边 AB 交于 C ，求 $S_{\triangle OBC}$ 。



【分析】 (1) $\because BC = B'C = CD$
 $\therefore S_{OABC} = x_C \times 2y_C - 2S_{\triangle OCD} = 2k - k = k$

(2) $\because x^2 + (2k-1)x + k^2 = 0$ 有两根，

$\therefore \Delta = (2k-1)^2 - 4k^2 \geq 0$ ，即 $k \leq \frac{1}{4}$

由 $x_1^2 - x_2^2 = 0$ 得： $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$ 。

当 $x_1 + x_2 = 0$ 时， $-(2k-1) = 0$ ，解得 $k = \frac{1}{2}$ ，不合题意，舍去

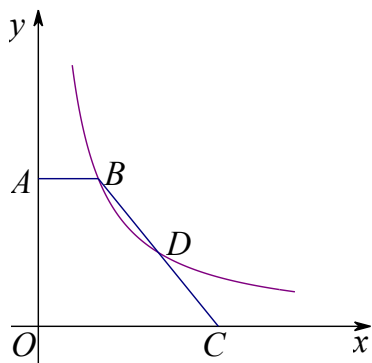
当 $x_1 - x_2 = 0$ 时， $x_1 = x_2$ ， $\Delta = (2k-1)^2 - 4k^2 = 0$ ，解得： $k = \frac{1}{4}$ 符合题意

$\therefore$ 双曲线的解析式为： $y = \frac{1}{x}$ ，

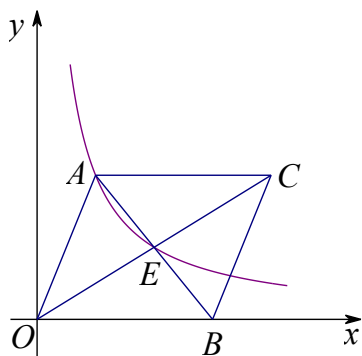
$\therefore S_{\triangle OBC} = 2 \cdot 4k - \frac{1}{2} \cdot 4k = 6k = \frac{3}{2}$ 。

★★★★☆

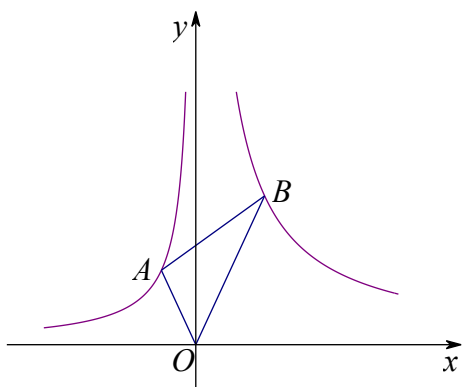
【例题7】 (1)如图，在直角梯形 $OABC$ 中， $AB \parallel OC$ ，过 B 点的双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 恰好过 BC 的中点 D ，且 $S_{ABCO} = 6$ ，求 k 的值.



(2)如图， $\square AOB C$ 的对角线交于点 E ，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象经过 A 、 E 两点，若 $\square AOB C$ 的面积为 9，求 k 的值.



(3)如图，点 A 、点 B 分别在反比例函数 $y_1 = -\frac{1}{x}$ ($x < 0$) 和 $y_2 = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象上， $\angle AOB$ 恰好被 y 轴平分，若 $\triangle OAB$ 的面积为 4，求 k 的值.



【分析】 (1)易知梯形面积为 $2|k| = 6$ ，又 $k > 0$ ，解得 $k = 3$

(2)由(1)可知， $S_{\triangle AOB} = \frac{3}{2}|k| = \frac{9}{2}$ ，解得 $k = 3$

(3)过 A 作 $AC \perp y$ 轴，交 OB 于 C 点，则 $S_{\triangle AOC} = 1$ ， $S_{\triangle ABC} = 3$ ，故 $y_B = 4y_A$ 。
 $x_B = 4x_A$ ， $k = 16x_A y_A = 16$ 。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/867023024156006154>