

2023-2024 学年安徽阜阳市临泉县第一中学高三第二学期期末考试数学试题文试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $a = \log_3 \sqrt{2}$, $b = \ln 3$, $c = 2^{-0.99}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $b > c > a$ B. $a > b > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

2. 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果，哥德巴赫猜想的内容是：每个大于 2 的偶数都可以表示为两个素数的和，例如： $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, 那么在不超过 18 的素数中随机选取两个不同的数，其和等于 16 的概率为 ()

- A. $\frac{1}{21}$ B. $\frac{2}{21}$ C. $\frac{1}{15}$ D. $\frac{2}{15}$

3. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 是 C 的右支上一点, 连接 PF_1 与 y 轴交于点 M , 若 $|F_1O| = 2|OM|$ (O 为坐标原点), $PF_1 \perp PF_2$, 则双曲线 C 的渐近线方程为 ()

- A. $y = \pm 3x$ B. $y = \pm \sqrt{3}x$ C. $y = \pm 2x$ D. $y = \pm \sqrt{2}x$

4. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$ 且 $a > b$, 则下列不等式成立的是 ()

- A. $c - a < c - b$ B. $ac^2 > bc^2$ C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $\frac{b}{a} < 1$

5. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 满足 $f(x+2) = 2f(x)$, 且当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = -x(x-2)$. 若对任意 $x \in (-\infty, m]$, 都有 $f(x) \leq \frac{40}{9}$, 则 m 的取值范围是 ().

- A. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$ B. $\left(-\infty, \frac{19}{3}\right]$ C. $(-\infty, 7]$ D. $\left(-\infty, \frac{23}{3}\right]$

6. 若 $|\vec{OA}| = 1$, $|\vec{OB}| = \sqrt{3}$, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, 点 C 在 AB 上, 且 $\angle AOC = 30^\circ$, 设 $\vec{OC} = m\vec{OA} + n\vec{OB}$ ($m, n \in \mathbf{R}$), 则 $\frac{m}{n}$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$

7. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则集合 $\complement_U(A \cup B) =$ ()

- A. $\{1, 2, 6\}$ B. $\{1, 3, 6\}$ C. $\{1, 6\}$ D. $\{6\}$

8. 已知集合 $U = \mathbf{R}$, $A = \{y | y \geq 0\}$, $B = \{y | y = \sqrt{x} + 1\}$, 则 $A \cap \complement_U B = (\quad)$

- A. $[0, 1)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

9. 已知 $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha \neq \beta$, 则下列是等式 $\sin \alpha - \sin \beta = \alpha - 2\beta$ 成立的必要不充分条件的是 ()

- A. $\sin \alpha > \sin \beta$ B. $\sin \alpha < \sin \beta$
C. $\cos \alpha > \cos \beta$ D. $\cos \alpha < \cos \beta$

10. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y \leq 1 \\ 2x + y \geq -1 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$, 若 $z = -3x + 2y$ 的最大值为 n , 则 $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中 x^2 项的系数为

()

- A. 60 B. 80 C. 90 D. 120

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ 且对于任意 $n > 1$, $n \in \mathbf{N}^*$ 满足 $S_{n+1} + S_{n-1} = 2(S_n + 1)$, 则 ()

- A. $a_4 = 7$ B. $S_{16} = 240$ C. $a_{10} = 19$ D. $S_{20} = 381$

12. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 过 F_2 的直线交椭圆于 A, B 两点, 且

$\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} = 0$, $\overrightarrow{AF_2} = 2\overrightarrow{F_2B}$, 则椭圆 E 的离心率为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC$, 点 D 是边 BC 的中点, $\triangle ABC$ 的面积为 2, 则线段 AD 的取值范围是_____.

14. 春节期间新型冠状病毒肺炎疫情在湖北爆发, 为了打赢疫情防控阻击战, 我省某医院选派 2 名医生, 6 名护士到湖北 A, B 两地参加疫情防控工作, 每地一名医生, 3 名护士, 其中甲乙两名护士不到同一地, 共有_____种选派方法.

15. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是棱 DD_1 的中点, F 是侧面 CDD_1C_1 上的动点, 且 $B_1F \parallel$ 平面 A_1BE , 记 B_1 与 F 的轨迹构成的平面为 α .

① $\exists F$, 使得 $B_1F \perp CD_1$;

② 直线 B_1F 与直线 BC 所成角的正切值的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right]$;

③ α 与平面 CDD_1C_1 所成锐二面角的正切值为 $2\sqrt{2}$;

④ 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各个侧面中, 与 α 所成的锐二面角相等的侧面共四个.

其中正确命题的序号是_____. (写出所有正确命题的序号)

16. 已知集合 $A = \{1, 4\}$, $B = \{a-5, 7\}$. 若 $A \cap B = \{4\}$, 则实数 a 的值是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $g(x) = 2(x - \ln x)$

(I) 当 $x > 0$ 时, 证明 $f(x) > g(x)$;

(II) 已知点 $P(x, xf(x))$, 点 $Q(-\sin x, \cos x)$, 设函数 $h(x) = \vec{OP} \cdot \vec{OQ}$, 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 试判断 $h(x)$ 的零点个数.

18. (12 分) 已知 $x \in \mathbb{R}$, 设 $\vec{m} = (2 \cos x, \sin x + \cos x)$, $\vec{n} = (\sqrt{3} \sin x, \sin x - \cos x)$, 记函数 $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 取最小值时 x 的取值范围;

(2) 设 $\triangle ABC$ 的角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $f(C) = 2$, $c = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S 的最大值.

19. (12 分) 设函数 $f(x) = 5 - |x+a| - |x-2|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集;

(2) 若 $f(x) \leq 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

20. (12 分) 在平面直角坐标系中, 以原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 两种坐标系中取相同的长度单位. 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} - t \\ y = 1 + \sqrt{3}t \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$.

(1) 求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若直线 l 与曲线 C 交于 M, N 两点, 求 $\triangle MON$ 的面积.

21. (12 分) 已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 2 \cos \alpha \\ y = 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = 8 + t \cos \frac{3\pi}{4} \\ y = t \sin \frac{3\pi}{4} \end{cases}$ (t 为

参数).

(1) 求 C_1 和 C_2 的普通方程;

(2) 过坐标原点 O 作直线交曲线 C_1 于点 M (M 异于 O), 交曲线 C_2 于点 N , 求 $\frac{|ON|}{|OM|}$ 的最小值.

22. (10 分) 在世界读书日期间, 某地区调查组对居民阅读情况进行了调查, 获得了一个容量为 200 的样本, 其中城镇居民 140 人, 农村居民 60 人.在这些居民中, 经常阅读的城镇居民有 100 人, 农村居民有 30 人.

(1) 填写下面列联表, 并判断能否有 99%的把握认为经常阅读与居民居住地有关?

	城镇居民	农村居民	合计
经常阅读	100	30	
不经常阅读			
合计			200

(2) 从该地区城镇居民中, 随机抽取 5 位居民参加一次阅读交流活动, 记这 5 位居民中经常阅读的人数为 X , 若用样本的频率作为概率, 求随机变量 X 的期望.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、 A

【解析】

根据指数函数与对数函数的单调性, 借助特殊值即可比较大小.

【详解】

因为 $\log_3 \sqrt{2} < \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$,

所以 $a < \frac{1}{2}$.

因为 $3 > e$,

所以 $b = \ln 3 > \ln e = 1$,

因为 $0 > -0.99 > -1$, $y = 2^x$ 为增函数,

所以 $\frac{1}{2} < c = 2^{-0.99} < 1$

所以 $b > c > a$,

故选: A.

【点睛】

本题主要考查了指数函数、对数函数的单调性, 利用单调性比较大小, 属于中档题.

2、B

【解析】

先求出从不超过 18 的素数中随机选取两个不同的数的所有可能结果, 然后再求出其和等于 16 的结果, 根据等可能事件的概率公式可求.

【详解】

解: 不超过 18 的素数有 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 共 7 个, 从中随机选取两个不同的数共有 $C_7^2 = 21$,

其和等于 16 的结果 (3,13), (5,11) 共 2 种等可能的结果,

故概率 $P = \frac{2}{21}$.

故选: B.

【点睛】

古典概型要求能够列举出所有事件和发生事件的个数, 本题不可以列举出所有事件但可以用分步计数得到, 属于基础题.

3、C

【解析】

利用三角形 $\triangle OMF_1$ 与 $\triangle PF_2F$ 相似得 $|PF_1| = 2|PF_2|$, 结合双曲线的定义求得 a, b, c 的关系, 从而求得双曲线的渐近线方程.

【详解】

设 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$,

由 $|F_1O| = 2|OM|$ ， $\triangle OMF_1$ 与 $\triangle PF_2F$ 相似，

所以 $\frac{|F_1O|}{|OM|} = \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = 2$ ，即 $|PF_1| = 2|PF_2|$ ，

又因为 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ ，

所以 $|PF_1| = 4a$ ， $|PF_2| = 2a$ ，

所以 $4c^2 = 16a^2 + 4a^2$ ，即 $c^2 = 5a^2$ ， $b^2 = 4a^2$ ，

所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm 2x$ 。

故选：C。

【点睛】

本题考查双曲线几何性质、渐近线方程求解，考查数形结合思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力。

4、A

【解析】

A 项，由 $a > b$ 得到 $-a < -b$ ，则 $c - a < c - b$ ，故 A 项正确；

B 项，当 $c = 0$ 时，该不等式不成立，故 B 项错误；

C 项，当 $a = 1$ ， $b = -2$ 时， $1 > -\frac{1}{2}$ ，即不等式 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 不成立，故 C 项错误；

D 项，当 $a = -1$ ， $b = -2$ 时， $\frac{b}{a} = 2 > 1$ ，即不等式 $\frac{b}{a} < 1$ 不成立，故 D 项错误。

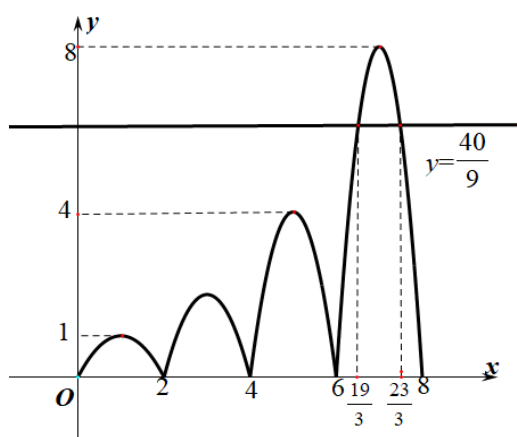
综上所述，故选 A。

5、B

【解析】

求出 $f(x)$ 在 $x \in (2n, 2n+2]$ 的解析式，作出函数图象，数形结合即可得到答案。

【详解】



当 $x \in (2n, 2n+2]$ 时, $x-2n \in (0, 2]$, $f(x) = 2^n f(x-2n) = -2^n(x-2n)(x-2n-2)$,

$f(x)_{\max} = 2^n$, 又 $4 < \frac{40}{9} < 8$, 所以 m 至少小于 7, 此时 $f(x) = -2^3(x-6)(x-8)$,

令 $f(x) = \frac{40}{9}$, 得 $-2^3(x-6)(x-8) = \frac{40}{9}$, 解得 $x = \frac{19}{3}$ 或 $x = \frac{23}{3}$, 结合图象, 故 $m \leq \frac{19}{3}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查不等式恒成立求参数的范围, 考查学生数形结合的思想, 是一道中档题.

6、B

【解析】

利用向量的数量积运算即可算出.

【详解】

解: $\angle AOC = 30^\circ$

$$\therefore \cos \angle AOC = \frac{\vec{OC} \cdot \vec{OA}}{|\vec{OC}| |\vec{OA}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{\vec{OC} \cdot \vec{OA}}{|\vec{OC}| |\vec{OA}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{(m\vec{OA} + n\vec{OB}) \cdot \vec{OA}}{|m\vec{OA} + n\vec{OB}| |\vec{OA}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{m|\vec{OA}|^2 + n\vec{OB} \cdot \vec{OA}}{\sqrt{m^2|\vec{OA}|^2 + 2mn\vec{OA} \cdot \vec{OB} + n^2|\vec{OB}|^2} |\vec{OA}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Q } |\vec{OA}| = 1, |\vec{OB}| = \sqrt{3}, \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$$

$$\therefore \frac{m}{\sqrt{m^2 + 3n^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore m^2 = 9n^2$$

又 Q 在 AB 上

$$\therefore m > 0, n > 0$$

$$\therefore \frac{m}{n} = 3$$

故选: B

【点睛】

本题主要考查了向量的基本运算的应用，向量的基本定理的应用及向量共线定理等知识的综合应用.

7、D

【解析】

根据集合的混合运算，即可容易求得结果.

【详解】

$Q A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，故可得 $\complement_U(A \cup B) = \{6\}$.

故选：D.

【点睛】

本题考查集合的混合运算，属基础题.

8、A

【解析】

求得集合 B 中函数的值域，由此求得 $\complement_U B$ ，进而求得 $A \cap \complement_U B$.

【详解】

由 $y = \sqrt{x} + 1 \geq 1$ ，得 $B = [1, +\infty)$ ，所以 $\complement_U B = (-\infty, 1)$ ，所以 $A \cap \complement_U B = [0, 1)$.

故选：A

【点睛】

本小题主要考查函数值域的求法，考查集合补集、交集的概念和运算，属于基础题.

9、D

【解析】

构造函数 $h(x) = \sin x - x$ ， $f(x) = \sin x - 2x$ ，利用导数分析出这两个函数在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上均为减函数，由 $\sin \alpha - \sin \beta = \alpha - 2\beta$ 得出 $\sin \alpha - \alpha = \sin \beta - 2\beta$ ，分 $\alpha = 0$ 、 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ 、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 三种情况讨论，利用放缩法结合函数 $y = h(x)$ 的单调性推导出 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < 0$ 或 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ，再利用余弦函数的单调性可得出结论.

【详解】

构造函数 $h(x) = \sin x - x$ ， $f(x) = \sin x - 2x$ ，

则 $h'(x) = \cos x - 1 < 0$ ， $f'(x) = \cos x - 2 < 0$ ，

所以，函数 $y = f(x)$ 、 $y = h(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上均为减函数，

当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时，则 $h(x) > h(0) = 0$ ， $f(x) > f(0) = 0$ ；当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时， $h(x) < 0$ ， $f(x) < 0$.

由 $\sin \alpha - \sin \beta = \alpha - 2\beta$ 得 $\sin \alpha - \alpha = \sin \beta - 2\beta$.

①若 $\alpha = 0$, 则 $\sin \beta - 2\beta = 0$, 即 $f(\beta) = 0 \Rightarrow \beta = 0$, 不合乎题意;

②若 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, 则 $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, 则 $h(\alpha) = \sin \alpha - \alpha = \sin \beta - 2\beta > \sin \beta - \beta = h(\beta)$,

此时, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < 0$,

由于函数 $y = \cos x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上单调递增, 函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上单调递增, 则 $\sin \alpha < \sin \beta$,

$\cos \alpha < \cos \beta$;

③若 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, 则 $h(\alpha) = \sin \alpha - \alpha = \sin \beta - 2\beta < \sin \beta - \beta = h(\beta)$,

此时 $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

由于函数 $y = \cos x$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 则 $\sin \alpha > \sin \beta$,

$\cos \alpha < \cos \beta$.

综上所述, $\cos \alpha < \cos \beta$.

故选: D.

【点睛】

本题考查函数单调性的应用, 构造新函数是解本题的关键, 解题时要注意对 α 的取值范围进行分类讨论, 考查推理能力, 属于中等题.

10、B

【解析】

画出可行域和目标函数, 根据平移得到 $n = 5$, 再利用二项式定理计算得到答案.

【详解】

如图所示: 画出可行域和目标函数,

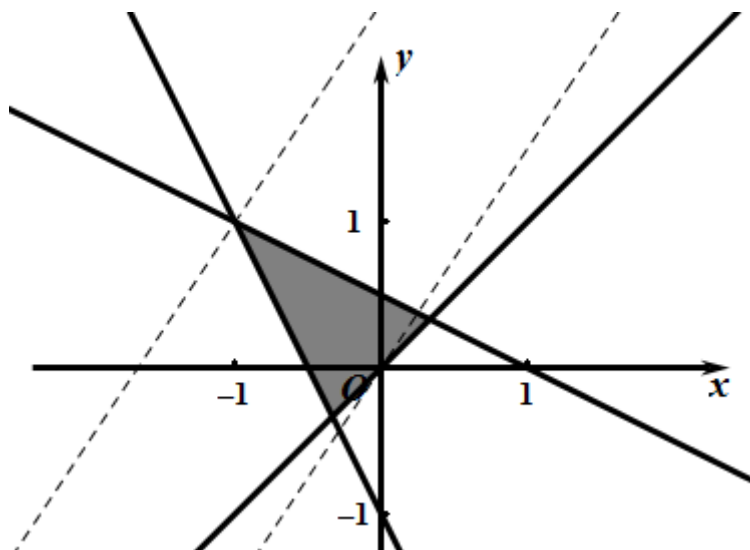
$z = -3x + 2y$, 即 $y = \frac{3}{2}x + \frac{z}{2}$, 故 z 表示直线与 y 截距的 2 倍,

根据图像知: 当 $x = -1, y = 1$ 时, $z = -3x + 2y$ 的最大值为 5, 故 $n = 5$.

$\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 展开式的通项为: $T_{r+1} = C_5^r \cdot (2x)^{5-r} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = C_5^r \cdot 2^{5-r} \cdot (-1)^r \cdot x^{5-\frac{3}{2}r}$,

取 $r = 2$ 得到 x^2 项的系数为: $C_5^2 \cdot 2^{5-2} \cdot (-1)^2 = 80$.

故选: B.



【点睛】

本题考查了线性规划求最值，二项式定理，意在考查学生的计算能力和综合应用能力.

11、D

【解析】

利用数列的递推关系式判断求解数列的通项公式，然后求解数列的和，判断选项的正误即可.

【详解】

当 $n \geq 2$ 时， $S_{n+1} + S_{n-1} = 2(S_n + 1) \Rightarrow S_{n+1} - S_n = S_n - S_{n-1} + 2 \Rightarrow a_{n+1} = a_n + 2$.

所以数列 $\{a_n\}$ 从第 2 项起为等差数列， $a_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ 2n-2, n \geq 2 \end{cases}$,

所以， $a_4 = 6$ ， $a_{10} = 18$.

$S_n = a_1 + \frac{(a_2 + a_n)(n-1)}{2} = n(n-1) + 1$ ， $S_{16} = 16 \times 15 + 1 = 241$ ，

$S_{20} = 20 \times 19 + 1 = 381$.

故选：D.

【点睛】

本题考查数列的递推关系式的应用、数列求和以及数列的通项公式的求法，考查转化思想以及计算能力，是中档题.

12、C

【解析】

根据 $\overline{AF_2} = 2\overline{F_2B}$ 表示出线段长度，由勾股定理，解出每条线段的长度，再由勾股定理构造出 a, c 关系，求出离心率.

【详解】

Q $\overline{AF_2} = 2\overline{F_2B}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/867036021133006135>