专题七 空间向量与立体几何（测试）

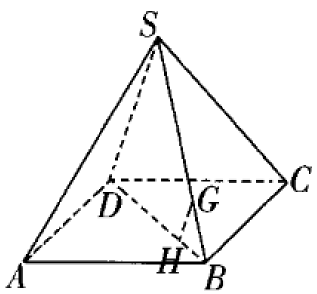
【满分：150 分】

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.已知 $\boldsymbol{a}=(2x,1,3)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2y,9)$，如果 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则 $x+y=($　　$)$

A.$-\dfrac{4}{3}$　　B.0　　C.$\dfrac{4}{3}$　　D.-1

2.如图，已知 S 为四边形 $ABCD$ 所在平面外一点，G，H 分别为 SB，BD 上的点，若 $GH//$ 平面 SCD，则(　　)



A.$GH//SA$　　B.$GH//SD$　　C.$GH//SC$　　D.以上均有可能

3.已知空间中有两个不重合的平面 α，β 和两条不重合的直线 m，n，则下列说法中正确的是(　　)

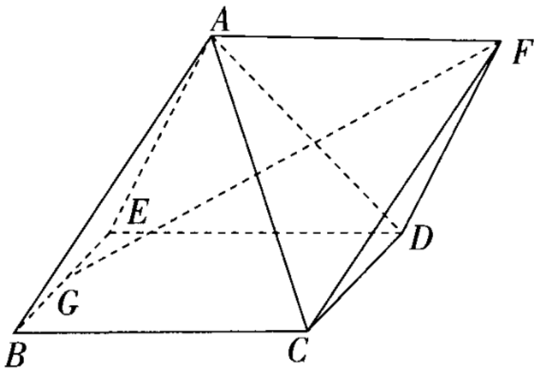
A.若 $\alpha\perp\beta$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，则 $m\perp n$

B.若 $\alpha\perp\beta$，$m\perp\alpha$，$m\perp n$，则 $n\perp\beta$

C.若 $\alpha//\beta$，$m//\alpha$，$n//\beta$，则 $m//n$

D.若 $\alpha//\beta$，$m//\alpha$，$m//n$，则 $n//\beta$

4.如图，四棱锥 $A-BCDE$ 是棱长均为 2 的正四棱锥，三棱锥 $A-CDF$ 是正四面体，G 为 BE 的中点，则下列结论错误的是(　　)



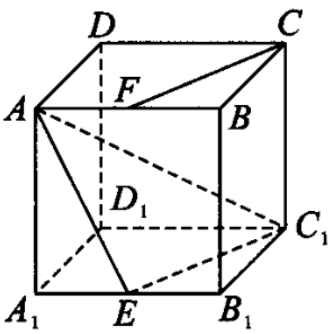
A.点 A，B，C，F 共面　　B.平面 ABE// 平面 CDF

C. $FG \perp CD$　　D. $FG \perp$ 平面 ACD

5.PA，PB，PC 是从点 P 出发的三条射线，每两条射线的夹角均为 $60°$，那么直线 PC 与平面 PAB 所成角的余弦值是(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

6.如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为线段 A_1B_1 的中点，F 为线段 AB 的中点，则直线 FC 到平面 AEC_1 的距离等于(　　)



A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

7.已知正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的上、下底面边长分别为 1 和 3，侧棱长为 2，以下底面顶点 A 为球心，$\sqrt{7}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. π

8.已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=BC=\sqrt{2}$，D 为 AC 的中点.将 $\triangle ABC$ 沿 BD 翻折，使点 C 移动至点 E，在翻折过程中，下列说法不正确的是(　　)

A.平面 $BED \perp$ 平面 ADE

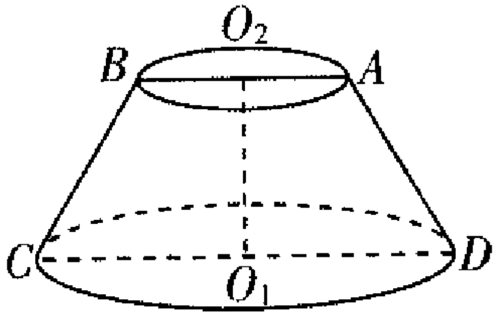
B.三棱锥 $B-ADE$ 的体积为定值

C.当二面角 $A-BD-E$ 的平面角为 $\frac{\pi}{4}$ 时，三棱锥 $E-ABD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{12}$

D.当二面角 $A-BD-E$ 为直二面角时，三棱锥 $E-ABD$ 的内切球表面积为 $\frac{4-2\sqrt{3}}{3}\pi$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9.某工厂生产出一种机械零件，如图所示，零件的几何结构为圆台 O_1O_2 ，在轴截面 $ABCD$ 中，$AB=AD=BC=4\text{ cm}$ ，$CD=2AB$ ，则下列说法正确的有(　　)



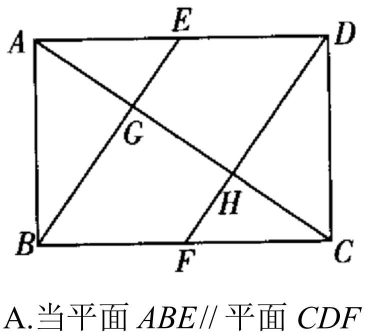
A.该圆台的高为 $\sqrt{3}\text{ cm}$

B.该圆台轴截面面积为 24 cm^2

C.该圆台轴截面面积为 $12\sqrt{3}\text{ cm}^2$

D.一只蚂蚁从点 C 沿着该圆台的侧面爬行到 AD 的中点，所经过的最短路程为 10 cm

10.如图，一张矩形白纸 $ABCD$ ，$AB=10$ ，$AD=10\sqrt{2}$ ，E，F 分别为 AD，BC 的中点，BE 交 AC 于点 G，DF 交 AC 于点 H.现分别将 $\triangle ABE$ ，$\triangle CDF$ 沿 BE，DF 折起，且点 A，C 在平面 $BFDE$ 同侧，则下列命题为真命题的是(　　)



A.当平面 ABE// 平面 CDF 时，AC// 平面 $BFDE$

B.当平面 ABE// 平面 CDF 时， $AE//CD$

C.当 A，C 重合于点 P 时， $PG \perp PD$

D.当 A，C 重合于点 P 时，三棱锥 $P-DEF$ 的外接球的表面积为 150π

11.已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $2\sqrt{2}$ ，经过棱 BB_1 上中点 E 作该正方体的截面 α ，且 $A_1C \perp \alpha$ ， α 与棱 C_1D_1 和棱 AD 的交点分别为 F，G，截面 α 将正方体分为 Ω_1，Ω_2 两个多面体，则(　　)

A.直线 FG 与 BB_1 所成角的正切值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

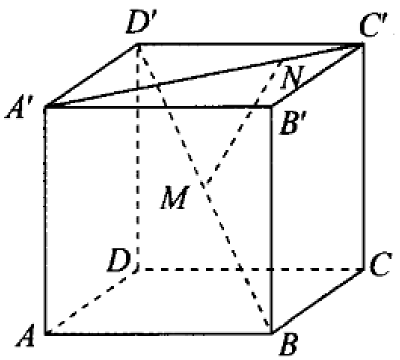
B.截面 α 为五边形

C.截面 α 的面积为 $6\sqrt{3}$

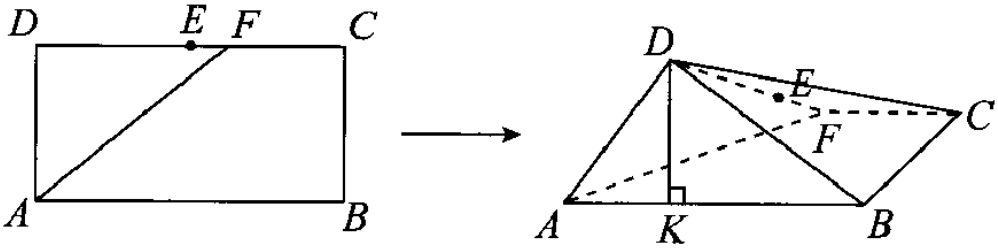
D.多面体 Ω_1，Ω_2 内均可放入体积为 $\dfrac{4\pi}{3}$ 的球

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

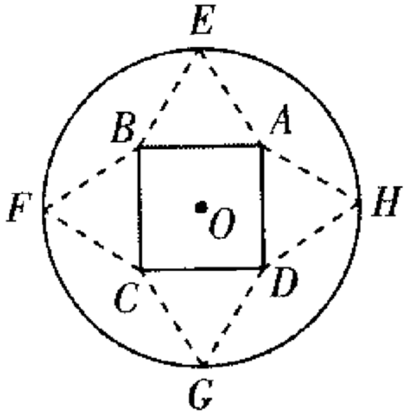
12.如图，已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 a，M 为 BD' 的中点，点 N 在 $A'C'$ 上，且 $|A'N|=3|NC'|$，则 MN 的长为__________.



13.如图，在长方形 $ABCD$ 中， $AB=2$ ， $BC=1$，E 为 DC 的中点，F 为线段 EC（端点除外）上一动点.现将△AFD 沿 AF 折起，使平面 $ABD \perp$ 平面 $ABCF$.在平面 ABD 内过点 D 作 $DK \perp AB$，垂足为 K.设 $AK=t$，则实数 t 的取值范围是_________.

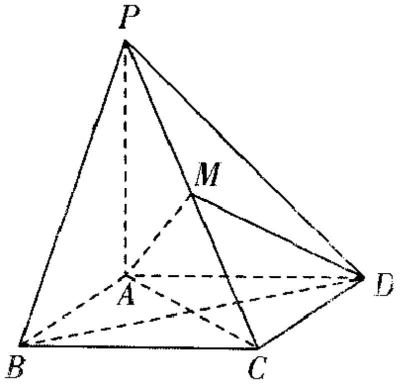


14.如图，圆形纸片的圆心为 O，半径为 12，该纸片上的正方形 $ABCD$ 的中心为 O，E，F，G，H 为圆 O 上的点，$\triangle ABE$，$\triangle BCF$，$\triangle CDG$，$\triangle ADH$ 分别是以 AB，BC，CD，DA 为底边的等腰三角形.沿虚线剪开后，分别以 AB，BC，CD，DA 为折痕折起$\triangle ABE$，$\triangle BCF$，$\triangle CDG$，$\triangle DH$ 使得点 E，F，G，H 重合，得到一个四棱锥.当该四棱锥的侧面积是底面积的 2 倍时，该四棱锥的外接球的表面积为______________.



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

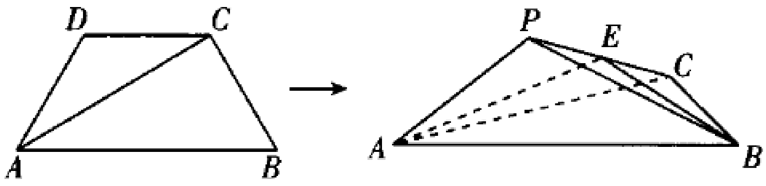
15.（13 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是以 2 为边长的菱形，$\angle BAD=120°$，且 $PB=PD$，M 为 PC 的中点.



（1）求证：平面 $PBD\perp$ 平面 PAC;

（2）若 $PC=\sqrt{2}PA=2\sqrt{2}$，求三棱锥 $M-PAD$ 的体积.

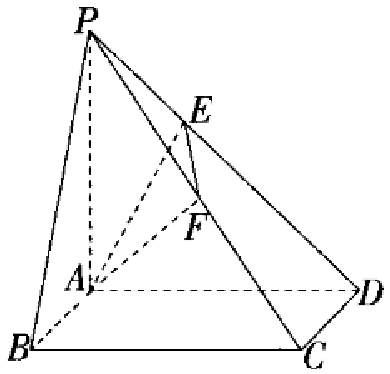
16.（15 分）如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$AD=DC=BC=2$，$\angle ABC=60°$，将$\triangle ACD$ 沿 AC 翻折，使点 D 翻折到 P 点，且 $PB=2\sqrt{2}$.



（1）证明：$BC\perp$平面 PAC；

（2）若 E 为线段 PC 的中点，求平面 AEB 与平面 ABC 夹角的余弦值.

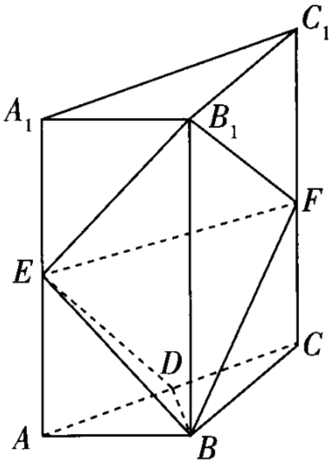
17.（15 分）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形，$PA\perp$底面 $ABCD$，$PA=AB$，点 E 在棱 PD 上，且 $2PE=ED$，F 是棱 PC 上的动点（不是端点）.



（1）若 F 是棱 PC 的中点，求证：$PB//$ 平面 AEF；

（2）求 PA 与平面 AEF 所成角的正弦值的最大值.

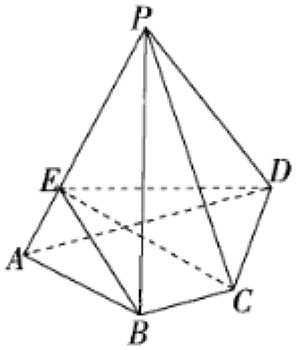
18.（17 分）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D，E，F 分别为线段 AC，AA_1，CC_1 的中点，$AB=BC$，$AA_1=4\sqrt{3}$，$AC=6$.



（1）证明：$B_1F//$ 平面 BDE；

（2）若四棱锥 $B-AEFC$ 的体积为 12，求直线 EB_1 与平面 BDE 所成角的正弦值.

19.（17 分）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\frac{3}{4}$，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$\triangle PAD$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形，四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，$BC=1$，E 为棱 PA 上一动点.



（1）若直线 EC 与平面 $ABCD$ 的夹角为 60°，求二面角 $B-CE-D$ 的正弦值；

（2）求 $\frac{ED}{EC}$ 的取值范围.

答案以及解析

1.答案：A

解析：由题设，存在$\lambda \in \mathbf{R}$，使$\boldsymbol{a}=\lambda \boldsymbol{b}$，则$\begin{cases}2x=\lambda,\\1=-2\lambda y,\\3=9\lambda,\end{cases}$可得$\begin{cases}x=\dfrac{1}{6},\\y=-\dfrac{3}{2},\\\lambda=\dfrac{1}{3},\end{cases}$所以$x+y=\dfrac{1}{6}-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{4}{3}$.故选 A.

2.答案：B

解析：因为$GH//$平面SCD，$GH\subset$平面SBD，平面$SBD\cap$平面$SCD=SD$，所以$GH//SD$，故选 B.

3.答案：A

解析：若$\alpha\perp\beta$，$m\perp\alpha$，则$m//\beta$或$m\subset\beta$，又$n\perp\beta$，所以$m\perp n$，故 A 正确；

若$\alpha\perp\beta$，$m\perp\alpha$，则$m//\beta$或$m\subset\beta$，又$m\perp n$，则$n\subset\beta$或n与β斜交或$n\perp\beta$均有可能，故 B 错误；

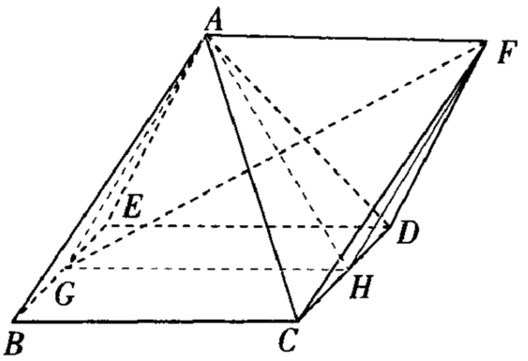
若$\alpha//\beta$，$m//\alpha$，则$m\subset\beta$或$m//\beta$，又$n//\beta$，因此m和n的位置关系可能为平行、相交或异面，故 C 错误；

若$\alpha//\beta$，$m//\alpha$，$m//n$，则$n//\beta$或$n\subset\beta$，故 D 错误.

综上，选 A.

4.答案：D

解析：A 选项：如图，取CD的中点H，连接GH，FH，AG，AH，易得$CD\perp GH$，$CD\perp AH$，$CD\perp FH$，则$CD\perp$平面AGH，$CD\perp$平面AFH，所以A，G，H，F四点共面，由题意知$AG=HF=\sqrt{3}$，$GH=AF=2$，所以四边形$AGHF$是平行四边形，所以$GH//AF$，因为$BC//GH$，所以$BC//AF$，所以A，B，C，F四点共面，故 A 正确；



B 选项：由选项 A 知 $AG//FH$，又 $AG\not\subset$ 平面 CDF， $FH\subset$ 平面 CDF，所以 $AG//$ 平面 CDF，

因为 $CD//BE$，且 $BE\not\subset$ 平面 CDF， $CD\subset$ 平面 CDF，所以 $BE//$ 平面 CDF，又 $AG\subset$ 平面

ABE， $BE\subset$ 平面 ABE，且 $AG\cap BE=G$，所以平面 $ABE//$ 平面 CDF，故 B 正确；

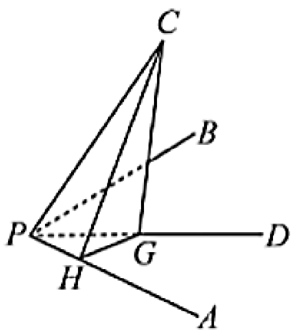
C 选项：由选项 A 可得 $CD\perp$ 平面 $AGHF$，又 $FG\subset$ 平面 $AGHF$，所以 $FG\perp CD$，故 C 正确；

D 选项：假设 $FG\perp$ 平面 ACD，则 $FG\perp AH$，由选项 A 知四边形 $AGHF$ 是平行四边形，所以

四边形 $AGHF$ 是菱形，与 $AG=\sqrt{3}$， $GH=2$ 矛盾，故 D 错误.

5.答案：C

解析：解法一：如图，设直线 PC 在平面 PAB 的射影为 PD，



作 $CG\perp PD$ 于点 G，$CH\perp PA$ 于点 H，连接 HG，

易得 $CG\perp PA$，又 $CH\cap CG=C$， $CH,CG\subset$ 平面 CHG，则 $PA\perp$ 平面 CHG，

又 $HG\subset$ 平面 CHG，则 $PA\perp HG$，

有 $\begin{cases}\cos\angle CPA=\dfrac{PH}{PC}\\ \cos\angle CPD\times\cos\angle APD=\dfrac{PG}{PC}\cdot\dfrac{PH}{PG}=\dfrac{PH}{PC}\end{cases}$，

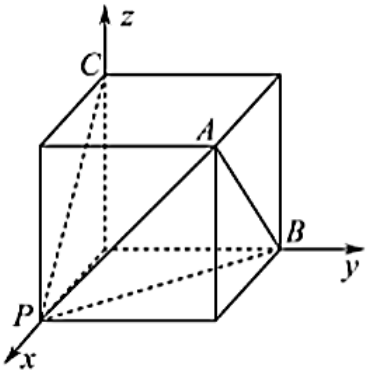
故 $\cos\angle CPA=\cos\angle CPD\times\cos\angle APD$.

已知 $\angle APC=60°$， $\angle APD=30°$，

故 $\cos\angle CPD=\dfrac{\cos\angle CPA}{\cos\angle APD}=\dfrac{\cos 60°}{\cos 30°}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 为所求.

解法二：

如图所示，把 PA，PB，PC 放在正方体中，PA，PB，PC 的夹角均为 $60°$.



建立如图所示的空间直角坐标系，设正方体棱长为 1，

则 $P(1,0,0)$， $C(0,0,1)$， $A(1,1,1)$， $B(0,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{PC}=(-1,0,1)$， $\overrightarrow{PA}=(0,1,1)$， $\overrightarrow{PC}=(-1,1,0)$，

设平面 PAB 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$， 则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=y+z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=-x+y=0\end{cases}$，

令 $x=1$， 则 $y=1$， $z=-1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,-1)$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{PC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\dfrac{-\sqrt{6}}{3}$.

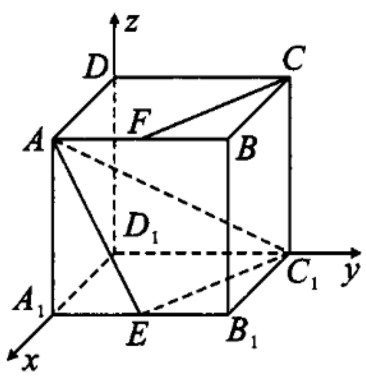
设直线 PC 与平面 PAB 所成角为 θ ，所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$， 所以

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

故选 C.

6.答案：A

解析：以点 D_1 为坐标原点， D_1A_1， D_1C_1， D_1D 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，如图，



则 $A(1,0,1)$，$C(0,1,1)$，$C_1(0,1,0)$，$E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$，$F\left(1,\frac{1}{2},1\right)$，

$\therefore \overrightarrow{C_1E}=\left(1,-\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{CF}=\left(1,-\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{EA}=\left(0,-\frac{1}{2},1\right)$，$\therefore \overrightarrow{C_1E}=\overrightarrow{CF}$，$\therefore C_1E//CF$.

$\because C_1E\subset$ 平面 AC_1E，$CF\not\subset$ 平面 AC_1E，$\therefore CF//$ 平面 AC_1E.

设平面 AC_1E 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1E}=x-\frac{1}{2}y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EA}=-\frac{1}{2}y+z=0.\end{cases}$

取 $x=1$，可得 $y=2$，$z=1$，$\therefore \boldsymbol{n}=(1,2,1)$.

$\because \overrightarrow{C_1C}=(0,0,1)$，$\therefore$ 直线 FC 到平面 AEC_1 的距离 $d=\frac{\left|\overrightarrow{C_1C}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.故选 A.

7.答案：C

解析：如图，过 B_1 作 $B_1M\perp BC$ 于点 M，过 C_1 作 $C_1N\perp BC$ 于点 N，$\because BC=3$，$B_1C_1=1$，

$\therefore BM=\frac{3-1}{2}=1$，$\because$ 侧棱长 $BB_1=2$，$\therefore B_1M=\sqrt{3}$，$\therefore \angle B_1BC=\frac{\pi}{3}$，取 BC 的中点 G，连接 AG，AM，AN，AC_1，可得 $AG=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$AM=\sqrt{AG^2+GM^2}=\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{7}$.

过 B_1 作 $B_1H\perp BA$ 于点 H，连接 AB_1.

$\because B_1H=B_1M=\sqrt{3}$，$\therefore AB_1=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$，

同理可得 AN，AC_1 的长度均为 $\sqrt{7}$，又四边形 C_1NMB_1 为矩形且 $B_1M=\sqrt{3}$，$C_1B_1=1$.

记四边形 C_1NMB_1 的对角线交点为 O，连接 OM，从而可得以 A 为球心，$\sqrt{7}$ 为半径的球面与侧