四川省南充市2023-2024学年高一下学期期末学业质量监测数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知$\frac{z}{1+\mathrm{i}}=\mathrm{i}$，则$z=$（　）

A．$-1-\mathrm{i}$　　B．$-\mathrm{i}$　　C．$-1+\mathrm{i}$　　D．1

2．若一组数据按照从小到大的顺序排列如下：12，15，17，20，23，25，27，31，36，37.则该组数据的第35百分位数为（　）

A．17　　B．20　　C．23　　D．25

3．若$\sin\theta-\cos\theta=\frac{2}{3}$，则$\sin 2\theta$的值是（　）

A．$-\frac{5}{9}$　　B．$\frac{5}{9}$　　C．$\frac{4}{9}$　　D．$-\frac{4}{9}$

4．对于两条不同直线m，n和两个不同平面α,β，以下结论中正确的是（　）

A．若$m//\alpha,n\perp\alpha$，则$m\perp n$　　B．若$\alpha//\beta,m//\alpha$，则$m//\beta$

C．若$\alpha\perp\beta,m//\alpha$，则$m\perp\beta$　　D．若$m\perp n,n\perp\alpha$，则$m//\alpha$

5．$\triangle ABC$的内角A，B，C所对应的边分别为a，b，c，若$\cos A=\frac{3}{5}$，$B=\frac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{3}$，则a的值为（　）

A．$\frac{6}{5}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\frac{8}{5}$　　D．2

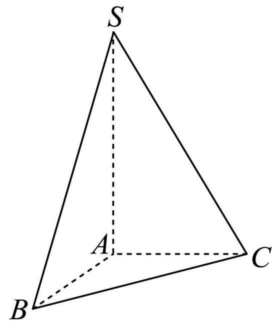
6．已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角是$\frac{3\pi}{4}$，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，则向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影向量是（　）

A．$-\sqrt{2}\vec{a}$　　B．$-\vec{a}$　　C．$-\vec{b}$　　D．$-\frac{1}{2}\vec{b}$

7．在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DC}$，$P$是线段$BD$上的一点，若$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，则实数$t$的值为（　）

A．$\frac{4}{9}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{5}{9}$

8．如图，在三棱锥$S-ABC$中，$SA\perp$平面ABC，$AB=AC=2$，$\angle BAC=120°$，若三棱锥外接球的表面积为52π，则此三棱锥的体积为（　）



A．1　　B．$\sqrt{3}$　　C．$2\sqrt{3}$　　D．$6\sqrt{3}$

二、多选题

9．函数 $f\left(x\right)=2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$，则下列说法中正确的有（　）

A．$f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

B．$f\left(x\right)$的一条对称轴方程为$x=\dfrac{5\pi}{8}$

C．$f\left(x\right)$的一个对称中心为$\left(\dfrac{\pi}{8},0\right)$

D．$f\left(x\right)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\dfrac{3\pi}{8},k\pi+\dfrac{\pi}{8}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$

10．正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$\left|AB\right|=2$，M是CC_1的中点，则下列说法中正确的有（　）

A．异面直线MB与AA_1所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

B．$A_1C\perp$平面MBD

C．过A，B，M三点作正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的截面，则截面面积为$2\sqrt{5}$

D．若P为正方体对角线BD_1上的一个动点，则$\left|PD\right|+\left|PM\right|$最小值为$\sqrt{5+\dfrac{8\sqrt{3}}{3}}$

11．在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，则下列说法中正确的有（　）

A．若$a=6$，$A=\dfrac{\pi}{3}$，则$\triangle ABC$周长的最大值为18

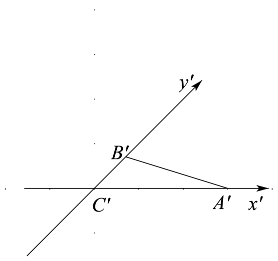
B．若$a=6$，$b+c=8$，则$\triangle ABC$面积的最大值为$6\sqrt{7}$

C．若角A的内角平分线交BC于点D，且$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{1}{2}$，$a=3$，则$\triangle ABC$面积的最大值为3

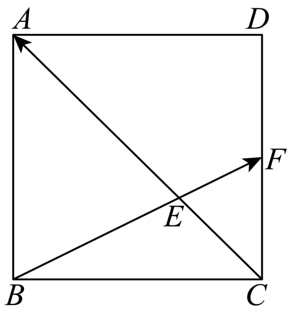
D．若$AB=3$，$AC=1$，M为BC的中点，且$AM=\sqrt{2}$，则$BC=2\sqrt{3}$

三、填空题

12．如图，水平放置的$\triangle ABC$的斜二测直观图是图中的$\triangle A'B'C'$，已知$A'C'=3$，$B'C'=1$，则AB边的实际长度是__________.



13．如图，已知正方形$ABCD$的边长为3，且$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)$，$BF$与$AC$交于点$E$，则$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE}=$ __________.



14．已知菱形$ABCD$的边长为2，且$\angle ABC=120°$，将菱形沿对角线AC翻折成直二面角$B-AC-D$，则异面直线AB与CD所成角的余弦值是__________；二面角$A-BD-C$的余弦值是__________.

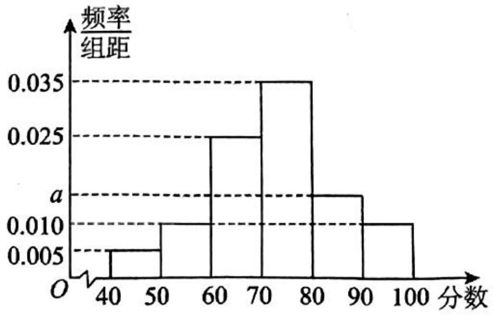
四、解答题

15．已知$\vec{a}=(m,3)$，$\vec{b}=(1,m+2)$．

(1)若$\vec{a}//\vec{b}$，求m的值；

(2)若$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，求$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角的余弦值．

16．某公司为了解员工对食堂的满意程度，随机抽取了200名员工做了一次问卷调查，要求员工对食堂的满意程度进行打分，所得分数均在$[40,100]$内，现将所得数据分成6组：$[40,50)$，$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$，并得到如图所示的频率分布直方图．

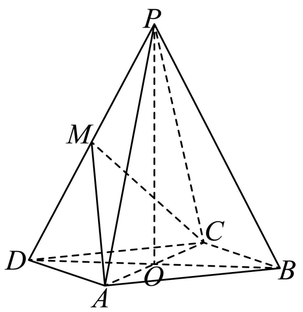


(1)求a的值，并估计这200名员工所得分数的平均数（同一组中的数据用该组区间的中点值代表）；

(2)求这200名员工所得分数的中位数（精确到0.1）；

(3)现从$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$这三组中用比例分配的分层随机抽样的方法抽取24人，求$[70,80)$这组中抽取的人数．

17．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为平行四边形，$\angle ADC=45°$，$AD=AC=2$，O是AC与BD的交点，$PO\perp$平面$ABCD$，$PO=2$，M是PD的中点．



(1)求证：$PB//$平面ACM；

(2)求证：平面$PBC\perp$平面PAC；

(3)求直线AM与平面$ABCD$所成角的正切值．

18．在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$2\sqrt{3}ac\sin B=(b+c+a)(b+c-a)$．

(1)求角A的大小；

(2)若$\sin C=4\sin B$，$a=\sqrt{13}$．

①求$\triangle ABC$的面积；

②若$\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$，求$|\overrightarrow{AD}|$．

19．对于平面向量$\overrightarrow{a_k}=(x_k,y_k)(k=1,2,\cdots)$，定义"$F_\theta$变换"：

$\overrightarrow{a_{k+1}} = F_\theta\left(\overrightarrow{a_k}\right) = \left(x_k\cos\theta - y_k\sin\theta, x_k\sin\theta + y_k\cos\theta\right)$，$\left(0<\theta<\pi\right)$

(1)若向量$\overrightarrow{a_1} = \left(2,1\right)$，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$，求$\overrightarrow{a_2}$；

(2)求证：$\left|\overrightarrow{a_k}\right| = \left|\overrightarrow{a_{k+1}}\right|$；

(3)已知$\overrightarrow{OA} = \left(x_1, y_1\right)$，$\overrightarrow{OB} = \left(x_2, y_2\right)$，且$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$不平行，$\overrightarrow{OA'} = F_\theta\left(\overrightarrow{OA}\right)$，$\overrightarrow{OB'} = F_\theta\left(\overrightarrow{OB}\right)$，

求证：$S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OA'B'}$．

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	B	A	C	D	A	C	ABD	ACD
题号	11									
答案	ACD									

1．C

【分析】根据复数的乘法即可得到答案.

【详解】$z=\mathrm{i}(1+\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$.

故选：C.

2．B

【分析】根据题意，结合百分位数的概念及计算方法，即可求解.

【详解】这组数据有 10 个数，所以$10\times35\%=3.5$，

则该组数据的35%分位数为第 4 个数据20，

故选：B.

3．B

【分析】将条件式平方，根据同角三角函数关系式，结合正弦二倍角公式即可得解.

【详解】若$\sin\theta-\cos\theta=\frac{2}{3}$，

两边同时平方可得$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{9}$，

即$2\sin\theta\cos\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta-\frac{4}{9}$，

由正弦二倍角公式及同角三角函数关系式可知$\sin2\theta=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$，

故选：B.

【点睛】本题考查了同角三角函数关系式及正弦二倍角公式的简单应用，属于基础题.

4．A

【分析】根据空间中线面之间的位置关系及性质逐一判断即可.

【详解】对于 A，若$m//\alpha,n\perp\alpha$，则$m\perp n$，故 A 正确；

对于 B，若$\alpha//\beta,m//\alpha$，则$m//\beta$或$m\subset\beta$，故 B 错误；

对于 C，若$\alpha\perp\beta,m//\alpha$，则$m\subset\beta$或$m//\beta$或$m,\beta$相交，故 C 错误；

对于 D，若$m\perp n,n\perp\alpha$，则$m//\alpha$或$m\subset\alpha$，故 D 错误.

故选：A.

5．C

【分析】根据已知条件，先求出$\sin A$，再结合正弦定理，即可求解．

【详解】$\because A\in(0,\pi)$，

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{4}{5}$，

$B=\frac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{3}$，

则由正弦定理可得，$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{4}{5}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{8}{5}$．

故选：C．

6．D

【分析】根据数量积的定义求出$\vec{a}\cdot\vec{b}$，再由投影向量的定义计算可得.

【详解】因为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角是$\frac{3\pi}{4}$，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\frac{3\pi}{4}=1\times\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1$，

所以向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影向量为$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\times\frac{\vec{b}}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\vec{b}$.

故选：D.

7．A

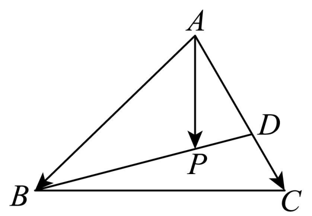
【分析】本题考查三点共线定理，依题意可得，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{3t}{2}\overrightarrow{AD}$，根据平面向量三点共线定理计算可得.

【详解】由$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DC}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$，

由已知$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，则$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{3t}{2}\overrightarrow{AD}$，

根据平面向量三点共线定理得$\frac{1}{3}+\frac{3t}{2}=1$，解得$t=\frac{4}{9}$.

故选：A



8．C

【分析】利用正弦定理求出$\triangle ABC$外接圆的半径r，根据球的表面积求出球的半径R，再由$SA\perp$平面ABC，则$R^2=r^2+\left(\frac{SA}{2}\right)^2$求出$SA$，最后根据锥体的体积公式计算可得.

【详解】因为$AB=AC=2$，$\angle BAC=120°$，所以$\angle ABC=\angle ACB=30°$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

设$\triangle ABC$外接圆的半径为r，圆心为O_1，则$2r=\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$，即$r=2$，

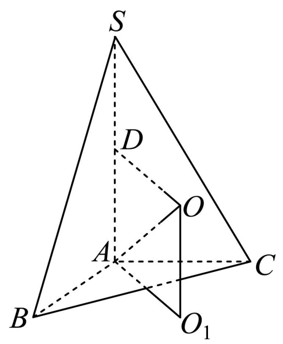
设三棱锥外接球的半径为R，球心为O，则$4\pi R^2=52\pi$，解得$R=\sqrt{13}$（负值已舍去）；

因为$SA\perp$平面ABC，所以$AO^2=AO_1^2+OO_1^2$，

即$R^2=r^2+\left(\frac{SA}{2}\right)^2$，即$13=4+\left(\frac{SA}{2}\right)^2$，解得$SA=6$（负值已舍去）；

所以$V_{S-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot SA=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times 6=2\sqrt{3}$.

故选：C



【点睛】关键点点睛：本题的关键点是找到球心位置，求出底面外接圆半径和外接球半径，再根据勾股定理求出棱锥的高.

9．ABD

【分析】对于A：根据三角恒等变换分析判断即可；对于BC：代入检验，结合对称性的性质分析判断；对于D：以$2x+\frac{\pi}{4}$为整体，结合正弦函数的单调性分析求解.

【详解】对于选项A：$f(x)=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，故A正确；

对于选项B：因为$f\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{2}=-\sqrt{2}$为最小值，

所以 $f\left(x\right)$ 的一条对称轴方程为 $x=\frac{5\pi}{8}$，故 B 正确；

对于选项 C：因为 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}$ 为最大值，

所以 $\left(\frac{\pi}{8},0\right)$ 不是 $f\left(x\right)$ 的对称中心，故 C 错误；

对于选项 D：令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\pi-\frac{3\pi}{8}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$，

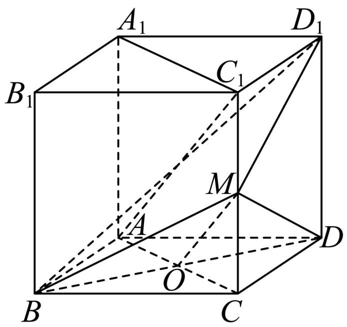
所以 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，故 D 正确；

故选：ABD.

10．ACD

【分析】利用异面直线所成角的定义可判断 A 选项；利用线面平行的判定定理和线面垂直的性质可判断 B 选项；作出截面，并计算出截面面积，可判断 C 选项；将 $\triangle BD_1M$ 、$\triangle BDD_1$ 延展至同一个平面，由 D 、P 、M 三点共线时，$|PD|+|PM|$ 取最小值可判断 D 选项.

【详解】如下图所示：



对于 A 选项，因为 $AA_1//CC_1$，则异面直线 MB 与 AA_1 所成角为 $\angle BMC$ 或其补角，

因为 $BC\perp CM$，且 $|BC|=2$，$|CM|=1$，

则 $|BM|=\sqrt{|BC|^2+|CM|^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

所以，$\cos\angle BMC=\frac{|CM|}{|BM|}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

故异面直线 MB 与 AA_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，A 正确；

对于 B 选项，连接 AC 交 BD 于点 O，连接 OM ，

因为四边形 $ABCD$ 为正方形，$AC\cap BD=O$，则 O 为 AC 的中点，

又因为 M 为 CC_1 的中点，所以，$AC_1//OM$ ，