

2025 年高考第三次模拟考试

高三数学（新高考 I 卷）02·全解全析

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 58 分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | |x| < 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} | x^2 < 11\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2\}$

【答案】B

【分析】解不等式求出集合 A, B , 再求交集即可.

【详解】因为 $A = \{x | |x| < 3\} = \{x | -3 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} | x^2 < 11\} = \{0, 1, 2, 3\}$,

所以 $A \cap B = \{0, 1, 2\}$.

故选：B.

2. 设 i 为虚数单位，复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$ ，若 $\bar{z} = \frac{2+i}{i^{2025}}$ ，则 z 在复平面内对应的点位于第 () 象限

- A. 一 B. 二 C. 三 D. 四

【答案】A

【分析】由复数的运算性质化简得 $\bar{z} = 1 - 2i$ ，则 $z = 1 + 2i$ ，即答案可求.

【详解】由题意得 $\bar{z} = \frac{2+i}{i^{4 \times 506 + 1}} = \frac{2+i}{i} = 1 - 2i$,

所以 $z = 1 + 2i$ ，则 z 在复平面内对应的点位于第一象限，

故选：A.

3. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1, \vec{b} = (t, 2-t)$, $\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，则 $|\vec{a} - \vec{b}|$ 的最小值为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 1 D. 3

【答案】C

【分析】向量垂直则数量积为零，由此求出 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，求 $|\vec{a} - \vec{b}|$ ，利用平方法转化为数量积进行计算。

【详解】由 $\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，得 $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^2 = 1$ ，

$$\text{所以 } |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{1^2 - 2 \times 1 + t^2 + (2-t)^2} = \sqrt{2(t-1)^2 + 1} \dots 1,$$

所以当 $t=1$ 时， $|\vec{a} - \vec{b}|$ 的最小值为 1.

故选：C

4. 二项式 $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中，把展开式中的项重新排列，则有理项互不相邻的排法种数为（ ）

A. A_7^7 种

B. $A_4^4 A_5^3$ 种

C. $A_4^4 A_4^3$ 种

D. $A_3^3 A_4^4$ 种

【答案】D

【分析】先利用二项式 $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式的通项公式求出有理项的项数，再利用插空法求解。

【详解】二项式 $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式的通项公式为：

$$T_{r+1} = C_6^r \cdot x^{6-r} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = C_6^r \cdot x^{6-\frac{3r}{2}} \quad (0 \leq r \leq 6, r \in \mathbf{N}),$$

令 $6 - \frac{3r}{2} \in \mathbf{Z}$ ，得 $r \in \{0, 2, 4, 6\}$ ，所以展开式中的有理项有 4 项，

把展开式中的项重新排列，先把 3 项无理项全排列，

再把 4 项有理项插入形成的 4 个空中，所以有理项互不相邻的排法种数为 $A_3^3 A_4^4$ 种。

故选：D.

5. 已知圆锥的底面半径为 3，圆锥内的最大球的表面积为 9π ，则该圆锥的侧面积为（ ）

A. 9π

B. 15π

C. $10\sqrt{2}\pi$

D. $20\sqrt{3}\pi$

【答案】B

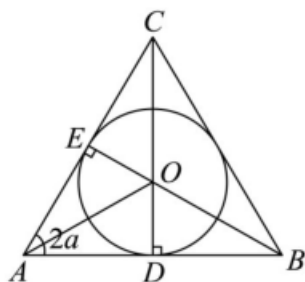
【分析】先由题设得到圆锥内的最大球的直径，再借助圆锥轴截面以及截面图中性质 $\angle COE = \angle CAB = 2\alpha$ ，

结合三角函数定义和倍角公式依次求出 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 和 $\cos 2\alpha$ ，进而由 $\cos 2\alpha = \frac{OE}{OC}$ 求出 OC ，即可依次求

出圆锥的高和母线长，进而由圆锥侧面积公式即可求解。

【详解】由球的表面积公式 $S = 4\pi R^2 = 9\pi \Rightarrow R = \frac{3}{2}$ ，即圆锥内的最大球的直径为 $\frac{3}{2}$ ，

圆锥轴截面如图，则 $AD = BD = 3$ ， $OD = OE = \frac{3}{2}$ ，



因为 $\angle COE + \angle DOE = \angle CAB + \angle DOE = \pi$ ，

所以 $\angle COE = \angle CAB$ ，设 $\angle COE = \angle CAB = 2\alpha$ ，

$$\text{则 } \sin \alpha = \frac{OD}{OA} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{AD}{OA} = \frac{3}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{则 } \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{3}{5},$$

$$\text{在 } \triangle COE \text{ 中, } \cos 2\alpha = \frac{OE}{OC} \Rightarrow OC = \frac{OE}{\cos 2\alpha} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{2},$$

所以 $CD = CO + OD = 4$ ，所以 $BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = 5$ ，

所以圆锥的侧面积为 $\pi \times 3 \times 5 = 15\pi$ 。

故选：B。

6. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 F ，点 O 为坐标原点，若 C 上存在点 P 使得 $\triangle OPF$ 为等边三角形，则 C 的离心率为 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

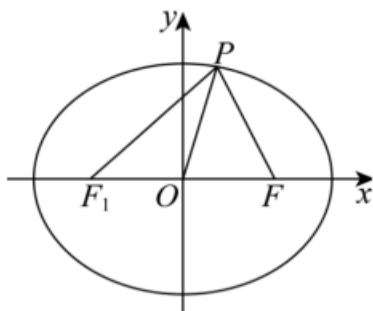
C. $\sqrt{3} - 1$

D. $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

【答案】C

【分析】利用 $\triangle OPF$ 为等边三角形构造焦点三角形 F_1PF ，根据几何关系和椭圆的定义得到 a, c 的等量关系，即可求得离心率。

【详解】设椭圆的另一焦点为 F_1 ，连接 F_1P 如图所示，



因为 $\triangle OPF$ 为等边三角形,

所以 $|OF_1| = |OF| = |OP| = c$,

所以 $\angle F_1PF = 90^\circ$, 又因为 $\angle PFO = 60^\circ$,

所以 $|PF_1| = \sin 60^\circ \times |F_1F| = \sqrt{3}c$,

由椭圆定义可知 $|PF| = 2a - |PF_1| = 2a - \sqrt{3}c = c$,

整理得: $\frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3} - 1$.

故选: C

7. 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$), $\left|f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right| = 1$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$, 且 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{24}\right)$ 上单调, 则 ω 的最大值为().

A. $\frac{9}{2}$

B. $\frac{21}{2}$

C. $\frac{33}{2}$

D. $\frac{45}{2}$

【答案】B

【分析】由题意计算出周期 T , 再由周期求 ω , 又因为 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{24}\right)$ 上单调,

所以列出不等式, 计算出 $0 < \omega \leq 12$, 判断即可.

【详解】由题意知, $\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = (2k+1) \times \frac{T}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$), 则 $T = \frac{4\pi}{3(2k+1)}$,

因为 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$, 所以 $\omega = \frac{3(2k+1)}{2}$, 又因为 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{24}\right)$ 上单调,

所以 $\frac{5\pi}{24} - \frac{\pi}{6} \leq \frac{T}{4}$, 解得 $0 < \omega \leq 12$, 则 ω 的最大值为 $\frac{21}{2}$.

故选: B.

8. 已知函数 $f(x)$ ($f(x)$ 不恒为零), 其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, 满足

$f(x+y)f(x-y) = f^2(x) - f^2(y)$, 且 $f(1) = 2$, $f(2) = 0$, 则 ()

A. $f(0)=1$

B. $f(x+4)$ 是偶函数

C. $f'(x+1)$ 关于点 $(1,0)$ 对称

D. $\sum_{k=1}^{12} f(k) = -2$

【答案】D

【分析】利用赋值法，结合函数的奇偶性与对称性直接判断 AB 选项，再结合函数的周期性可判断 D 选项，再根据复合函数求导可判断 C 选项。

【详解】A 选项：由 $f(x+y)f(x-y)=f^2(x)-f^2(y)$ ，令 $x=y=0$ ，则 $f^2(0)=f^2(0)-f^2(0)=0$ ，

即 $f(0)=0$ ，A 选项错误；

B 选项：令 $x=0$ ，可知 $f(y)f(-y)=-f^2(y)$ ，

又 $f(y)$ 不恒为 0，则 $f(-y)=-f(y)$ ，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，

令 $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \end{cases}$ ，则 $f(2) \cdot f(2t) = f^2(1+t) - f^2(1-t) = 0$ ，

即 $f^2(1+t) = f^2(1-t)$ ，即 $f^2(2-x) = f^2(x)$ ，

又 $f(2+x)f(2-x) = -f^2(x) = -f^2(2-x)$ ，

则 $f(2+x) = -f(2-x)$ ，

所以 $f(x+4) = -f(-x) = f(x)$ ，

所以 $f(x+4)$ 为奇函数，B 选项错误；

C 选项：由 B 选项可知 $f(2+x) = -f(2-x)$ ，两边同时求导可知 $f'(2+x) = f'(2-x)$ ，

即函数 $f'(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称，

所以函数 $f'(x+1)$ 关于直线 $x=1$ 对称，C 选项错误；

D 选项：由 B 选项可知 $f(x+4) = f(x)$ ，即函数 $f(x)$ 的一个周期 $T=4$ ，

由上述分析和已知条件， $f(-1)+f(1)=0, f(0)=f(2)=0$ ，

$$\text{所以 } \sum_{k=-1}^{12} f(k) = f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(11) + f(12)$$

$$= 3[f(-1) + f(0) + f(1) + f(2)] + f(-1) + f(0) = 0 - f(1) - 0 = -2, \text{ D 选项正确;}$$

故选：D.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 某农业研究所为了解种植新品种玉米的亩产量情况，从某地区随机抽查 100 亩种植新品种玉米的亩产量（单位：kg），整理出如下统计表：

亩产量	[800,900)	[900,1000)	[1100,1200)	[1200,1300)	[1300,1400]
频数	10	20	20	15	5

已知这 100 亩的亩产量均在 [800,1400] 内，根据表中数据，下列结论正确的是（ ）

- A. 这 100 亩种植新品种玉米的亩产量的极差介于 400kg 至 600kg 之间
- B. 这 100 亩种植新品种玉米的亩产量的中位数大于 1100kg
- C. 估计该地区种植新品种玉米的亩产量不低于 1000kg 的占比为 70%
- D. 估计该地区种植新品种玉米的亩产量的平均值介于 1150kg 至 1200kg 之间

【答案】AC

【分析】根据极差、中位数、平均数、频率的概念即可判断.

【详解】由表中数据可知，这 100 亩种植新品种玉米的亩产量的极差小于等于 $1400 - 800 = 600$ ，大于 $1300 - 900 = 400$ ，故 A 正确；

由表可知， $20 + 15 + 5 < 50$ ，所以亩产量的中位数小于 1100kg，故 B 错误；

估计该地区种植新品种玉米亩的产量不低于 1000kg 的占比为 $1 - 10\% - 20\% = 70\%$ ，故 C 正确；

根据表中数据，亩产量在 [1000,1100) 的有 $100 - 10 - 20 - 20 - 15 - 5 = 30$ ，

估计该地区种植新品种玉米的亩产量的平均数

$$\bar{x} < \frac{10 \times 900 + 20 \times 1000 + 30 \times 1100 + 20 \times 1200 + 15 \times 1300 + 5 \times 1400}{100} = 1125, \text{ 故 D 错误.}$$

故选：AC.

10. 棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F, M 分别是 AA_1, A_1D_1, BC_1 的中点，点 P 在线段 C_1F 上，点 Q 在底面 $ABCD$ 内部（包含边界）. 则下列说法中，正确的是（ ）

- A. 当点 Q 在棱 AD 上移动时，总存在点 P ，使得 $PQ \perp BE$ 成立

B. 当点 Q 在棱 AD 上移动时, 存在点 P 和 Q , 使得 $PQ \parallel EF$ 成立

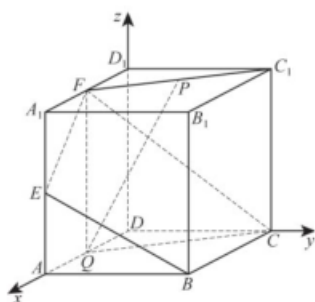
C. 三棱锥 $P-ABQ$ 体积的最大值是 $\frac{4}{3}$

D. $|MQ| + |PQ|$ 的最小值是 $\frac{7\sqrt{5}}{5}$

【答案】ACD

【分析】建立如图所示空间直角坐标系, 设 $Q(\mu, 0, 0)$, $\overrightarrow{C_1P} = \lambda \overrightarrow{C_1F}$, 根据 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$ 和 $PQ \parallel EF$, 求出 λ 的值, 判断 AB; 点 Q 在棱 DC 上时, $S_{\triangle ABQ}$ 取最大, 直接求三棱锥 $P-ABQ$ 体积, 判断 C; 在平面 BCC_1B_1 内作 M 关于 BC 的对称点 M' 取 B_1C_1 中点 H , 则必有 $|MQ| = |M'Q|$, 故只需 M', Q, P 三点共线且 $HP \perp C_1F$ 时, $|MQ| + |PQ|$ 取最小值, 求值可判定 D.

【详解】建立如图所示空间直角坐标系,



则 $B(2, 2, 0), E(2, 0, 1), F(1, 0, 2), C_1(0, 2, 2)$,

则有 $\overrightarrow{BE} = (0, -2, 1), \overrightarrow{EF} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{C_1F} = (1, -2, 0)$,

设 $Q(\mu, 0, 0), \overrightarrow{C_1P} = \lambda \overrightarrow{C_1F}$, 则 $\mu \in [0, 2], \lambda \in [0, 1]$,

则 $P(\lambda, 2-2\lambda, 2), \overrightarrow{PQ} = (\mu-\lambda, 2\lambda-2, -2)$,

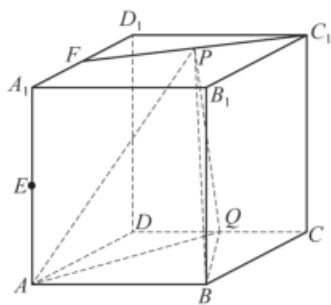
对于 A, 若 $PQ \perp BE$, 则 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{BE} = (2\lambda-2) \times (-2) + (-2) \times 1 = 0$,

解得 $\lambda = \frac{1}{2}$, 所以当点 P 为 C_1F 的中点时, 满足题意, 故 A 正确;

对于 B, 若 $PQ \parallel EF$, 则 $\frac{\mu-\lambda}{-1} = \frac{-2}{1}$, 且 $2\lambda-2=0$,

$\lambda=1, \mu=3 \notin [0, 2]$, 故 B 错误;

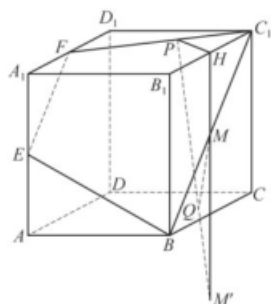
对于 C, 点 Q 在棱 DC 上时, $\triangle ABQ$ 的面积 $S_{\triangle ABQ}$ 最大,



此时, $V_{P-ABQ} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABQ} \cdot DD_1 \leq \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$, 故 C 正确;

对于 D, 在平面 BCC_1B_1 内作 M 关于 BC 的对称点 M' , 取 B_1C_1 中点 H ,

连接 $MH, PH, MQ, M'Q$, 则有 $|MQ| = |M'Q|$, H, M, M' 三点共线.



由于 $MH \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $C_1F \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 则 $M'H \perp C_1F$,

故只需 M', Q, P 三点共线且 $HP \perp C_1F$ 时, $|MQ| + |PQ|$ 取最小值.

由于 $M'H \cap HP = H, M'H, HP \subset$ 平面 $M'PH$, 这样可使 $C_1F \perp$ 平面 $M'PH$,

又 $M'P \subset$ 平面 $M'PH$, 从而 $M'P \perp C_1F$, 此时 $|MQ| + |PQ|$ 取最小值,

由 $HP \perp C_1F$, $\sin \angle PC_1H = \sin \angle D_1FC_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $|HP| = |C_1H| \sin \angle PC_1H = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

则 $|MQ| + |PQ| = |M'Q| + |PQ| = \sqrt{|MH|^2 + |PH|^2} \geq \sqrt{\frac{4}{5} + 9} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$, 故 D 正确.

故选: ACD.

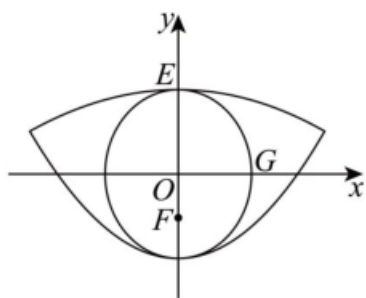
【点睛】关键点点睛: 对于 D 选项, 在平面 BCC_1B_1 内作 M 关于 BC 的对称点 M' 取 B_1C_1 中点 H , 则有

$|MQ| = |M'Q|$, 故只需 M', Q, P 三点共线且 $HP \perp C_1F$ 时, $|MQ| + |PQ|$ 取最小值, 是解题的关键和难点.

11. 数学中有许多美丽的曲线, 图中美丽的眼睛图案由两条曲线构成, 曲线 $C_1: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$, 上顶点为 E ,

右顶点为 G , 曲线 C_2 上的点满足到 $F(0, -1)$ 和直线 $y=1$ 的距离之和为定值 4, 已知两条曲线具有公共的上

下顶点，过 F 作斜率小于 0 的直线 l 与两曲线从左到右依次交于 A, B, C, D 且 $y_A \geq 1$ ，则 ()

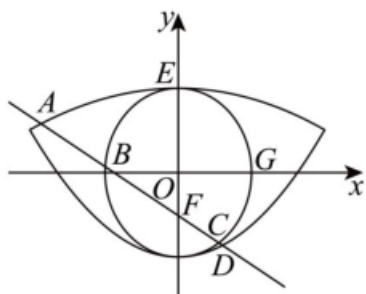


- A. 曲线 C_2 由两条抛物线的一部分组成
- B. 线段 AF 的长度与 A 点到直线 $y=5$ 的距离相等
- C. 若线段 AB 的长度为 $\frac{5}{6}$ ，则直线 l 的斜率为 $-\frac{3}{4}$
- D. 若 $S_{\triangle AFE} = 3S_{\triangle DFG}$ ，则直线 l 的斜率为 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】ABD

【分析】对于选项 A，根据题干列出等式即可判断；对于选项 B，利用抛物线的定义即可判断，对于选项 C，利用焦半径公式列出等式即可判断，对于选项 D，由焦半径，又因为 $S_{\triangle AFE} = 3S_{\triangle DFG}$ 可得 $EG \parallel l$ ，即可得到结果.

【详解】



对于 A 选项，设曲线 C_2 上任意一点 $M(x, y)$ ，

由 C_2 定义可知， x, y 满足 $\sqrt{x^2 + (y+1)^2} + |y-1| = 4$ ，

移项，平方可得： $x^2 + (y+1)^2 = (4 - |y-1|)^2 = 16 - 8|y-1| + (y-1)^2$ ，

即 $x^2 = 16 - 4y - 8|y-1| = \begin{cases} -12y + 24, & y \geq 1 \\ 4y + 8, & y < 1 \end{cases}$ ，为两条抛物线，故 A 正确；

对于 B 选项， F 和直线 $y=5$ 分别为抛物线 $x^2 = -12y + 24$ 的焦点和准线，由抛物线定义可知，故 B 正确

对于 C 选项, 设 l 与 y 轴夹角为 θ , F 同时为抛物线 $x^2 = -12y + 24$ 和椭圆的焦点, $p = 6$,

$$|AB| = |AF| - |BF| = \frac{6}{1 + \cos \theta} - \frac{3}{2 - \cos \theta} = \frac{5}{6},$$

解得 $\cos \theta = \frac{4}{5}$, 则 $k_l = -\frac{4}{3}$, 故 C 错误.

对于 D 选项, 易知 F 为抛物线 $x^2 = 4y + 8$ 和 $x^2 = -12y + 24$ 的焦点,

前者 $p = 2$, 后者 $p = 6$, AF, DF 分别为两个抛物线的较短的焦半径, 因此

$$|AF| = \frac{6}{1 + \cos \theta}, |DF| = \frac{2}{1 + \cos \theta}, |AF| = 3|DF|, \text{ 由于 } S_{\triangle AFE} = 3S_{\triangle DFG},$$

则 $d_{E-l} = d_{G-l}$, 因此 $EG \parallel l$, 所以 $k_l = k_{EG} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故 D 正确,

故选: ABD

【点睛】关键点点睛: 抛物线的求解, 一般利用定义和二级结论直接能够列出等式求解.

第二部分 (非选择题 共 92 分)

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_4 = S_{11}$, $a_5 = 2$, 则 $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{14}{3}$

【分析】利用等差数列的通项公式和下标和的性质求解即可.

【详解】因为数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $S_4 = S_{11}$,

所以 $S_{11} - S_4 = a_5 + a_6 + \dots + a_{11} = 7a_8 = 0$, 即 $a_8 = 0$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = \frac{1}{3}(a_8 - a_5) = -\frac{2}{3}$,

所以 $a_1 = a_5 - 4d = \frac{14}{3}$,

故答案为: $\frac{14}{3}$

13. 一组从小到大排列的数据: 0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, x , 11, 12, 若删去 x 前后它们的 80 百分位数相同, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 11

【分析】根据百分位数计算规则得到第 80 百分位数, 从而得到方程, 解得即可.

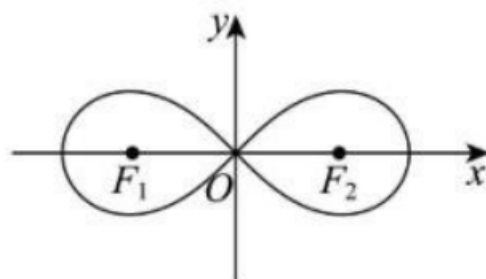
【详解】原来有 10 个数据, $10 \times 80\% = 8$, 原来第 80 百分位数为 $\frac{x+11}{2}$,

删去 x 后有 9 个数据, $9 \times 80\% = 7.2$, 则第 80 百分位数 11,

依题意可得 $\frac{x+11}{2}=11$ ，解得 $x=11$ 。

故答案为：11

14. 2025 春节档国产影片《哪吒之魔童闹海》接连破全球票房记录，影片中哪吒与敖丙是不可分割的二人组，其中敖丙的武器“盘龙冰锤”相撞后形成了如图所示的曲线，可以用来表示数学上特殊的曲线.如图所示的曲线 C 过坐标原点 O ， C 上的点到两定点 $F_1(-a,0)$ ， $F_2(a,0)$ ($a>0$) 的距离之积为定值.当 $a=3$ 时， C 上第一象限内的点 P 满足 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{9}{2}$ ，则 $|PF_1|^2 - |PF_2|^2 =$ _____.



【答案】 $18\sqrt{3}$

【分析】由题意，得到曲线 C 的方程，利用三角形面积公式求出 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ ，此时点 P 是曲线 C ：

$(x^2 + y^2)^2 = 18(x^2 - y^2)$ 与以 F_1F_2 为直径的圆 $x^2 + y^2 = 9$ 在第一象限内的交点，联立求出点 O 的横坐标，再代入求解即可。

【详解】因为原点 O 在 C 上，

所以 C 上的点到 F_1 ， F_2 的距离之积为 $|OF_1| \cdot |OF_2| = a^2$ ，

设 (x, y) 为 C 上任意一点，

此时 $a^2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$ ，

整理得 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ ，

因为 $\triangle PF_1F_2$ 的面积 $S = \frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\angle F_1PF_2 = \frac{9}{2}$ ， $|PF_1| \cdot |PF_2| = a^2 = 9$ ，

所以 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ ，

所以点 P 是曲线 C ： $(x^2 + y^2)^2 = 18(x^2 - y^2)$ 与以 F_1F_2 为直径的圆 $x^2 + y^2 = 9$ 在第一象限内的交点，

联立 $\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = 18(x^2 - y^2) \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ ，

解得 $x_p = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

所以 $|PF_1|^2 - |PF_2|^2 = (x_p + 3)^2 + y_p^2 - (x_p - 3)^2 - y_p^2 = 12x_p = 18\sqrt{3}$.

故答案为: $18\sqrt{3}$.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 满足 $\frac{\sin A}{\sin C} - 1 = \frac{\sin^2 A - \sin^2 C}{\sin^2 B}$, 且 $A > C$.

(1) 求证: $B = 2C$;

(2) 已知 BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, 若 $a = 4$, 求线段 BD 长度的取值范围.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, 2\sqrt{2}\right)$

【分析】(1) 由正弦定理得 $b^2 = c^2 + ac$, 又由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$, 结合整理可得角的关系;

(2) 由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin C}$, 又因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形且 $B = 2C$, 结合三角函数值域可求得线段 BD 长度的取值范围.

【详解】(1) 由题意得 $\frac{\sin A - \sin C}{\sin C} = \frac{\sin^2 A - \sin^2 C}{\sin^2 B}$, 由正弦定理得 $\frac{a - c}{c} = \frac{a^2 - c^2}{b^2} = \frac{(a + c)(a - c)}{b^2}$,

因为 $A > C$, 则 $a \neq c$, 即 $a - c \neq 0$, 可得 $\frac{1}{c} = \frac{a + c}{b^2}$, 整理得 $b^2 = c^2 + ac$,

由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$, 整理得 $c = a - 2c\cos B$,

由正弦定理得 $\sin C = \sin A - 2\sin C\cos B$,

故 $\sin C = \sin(B + C) - 2\sin C\cos B$, 整理得 $\sin C = \sin(B - C)$,

又因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 则 $C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 可得 $B - C \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $C = B - C$, 即 $B = 2C$.

(2) 在 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin C}$,

所以 $BD = \frac{BC\sin C}{\sin \angle BDC} = \frac{4\sin C}{\sin 2C} = \frac{2}{\cos C}$,

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且 $B = 2C$, 所以 $\begin{cases} 0 < C < \frac{\pi}{2} \\ 0 < 2C < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \pi - 3C < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 解得 $\frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{4}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/867123056032010056>