

## 专题 11 解三角形综合压轴小题归类



## 目录

|                        |    |
|------------------------|----|
| 题型一：三角形几解求参.....       | 1  |
| 题型二：判断三角形形状：化角为边型..... | 2  |
| 题型三：判断三角形形状：化边为角型..... | 3  |
| 题型四：面积公式的应用.....       | 3  |
| 题型五：求边长或者周长.....       | 4  |
| 题型六：解三角形求角度.....       | 5  |
| 题型七：范围与最值：知角和边求周长..... | 6  |
| 题型八：范围与最值：知角和边求面积..... | 7  |
| 题型九：范围与最值：判断角型.....    | 8  |
| 题型十：范围与最值：无长度求比值型..... | 9  |
| 题型十一：范围与最值：正切型最值.....  | 9  |
| 题型十二：正余弦定理与三角形外心.....  | 10 |
| 题型十三：正余弦定理与角平分线.....   | 11 |
| 题型十四：正余弦定理与中线.....     | 12 |
| 题型十五：正余弦定理与三角形高.....   | 14 |
| 题型十六：解三角形综合应用.....     | 15 |



## 题型一：三角形几解求参

## 指 | 点 | 迷 | 津

判断三角形解的个数有 2 种：

画图法：以已知角的对边为半径画弧，通过与邻边的交点个数判断解的个数。

- ①若无交点，则无解；
- ②若有一个交点，则有一个解；
- ③若有两个交点，则有两个解；
- ④若交点重合，虽然有两个交点，但只能算作一个解。

1. (23-24 高三·陕西榆林·) 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，若  $B = 60^\circ$ ， $b = 3\sqrt{3}$ ， $\triangle ABC$  只有一个解，则  $c$  的取值范围为 ( )

- A.  $(0, 3\sqrt{3})$       B.  $(0, 3\sqrt{3}]$       C.  $(3\sqrt{3}, 6)$       D.  $(0, 3\sqrt{3}] \cup \{6\}$

2. (23-24 高三·江苏南通·) 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ，若满足条件  $A = \frac{\pi}{6}$ ， $c = 2$  的  $\triangle ABC$  有两个，则  $a$  的取值范围为 ( )

- A.  $(1, 2)$       B.  $(2, +\infty)$       C.  $[1, 2)$       D.  $(1, 2]$

3. (2023·四川绵阳·模拟预测) 命题  $P$ ：“若  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  满足  $AB = DE = x, BC = EF = 2, \cos A = \cos D = \frac{4}{5}$ ，则  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ”。已知命题  $P$  是真命题，则  $x$  的值不可以是 ( )

- A. 1      B. 2      C.  $\frac{10}{3}$       D.  $\frac{7}{3}$

4. (23-24 高三下·浙江·) 在  $\triangle ABC$  中， $\angle A = \frac{\pi}{3}$ ， $AB = 4, BC = a$ ，且满足该条件的  $\triangle ABC$  有两个，则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(0, 2)$       B.  $(2, 2\sqrt{3})$       C.  $(2, 4)$       D.  $(2\sqrt{3}, 4)$

5. (22-23 高三·北京) 已知在  $\triangle ABC$  中， $\angle B = 60^\circ, b = \sqrt{3}$ ，若满足条件的三角形有且只有一个，则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $\{a | 0 < a < \sqrt{3}\}$       B.  $\{a | 0 < a < \sqrt{3} \text{ 或 } a = 2\}$   
 C.  $\{a | 0 < a \leq \sqrt{3}\}$       D.  $\{a | 0 < a \leq \sqrt{3} \text{ 或 } a = 2\}$

## 题型二：判断三角形形状：化角为边型



### 题型三：判断三角形形状：化边为角型

#### 指 | 点 | 迷 | 津

正余弦定理：化边为角型

1. (22-23 高三·上海青浦·阶段练习) 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 $A, B, C$ 的对边分别是 $a, b, c$ , 下列命题中, 真命题的个数是 ( )

- (1) 若 $a^2 \tan B = b^2 \tan A$ , 则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形;
- (2) 若 $\sin A = \cos B$ , 则 $\triangle ABC$ 是直角三角形;
- (3) 若 $\cos A \cos B \cos C < 0$ , 则 $\triangle ABC$ 是钝角三角形;
- (4) 若 $\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A) = 1$ , 则 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

2. (22-23 高三·福建福州·)  $\triangle ABC$ 中三个角的对边分别记为 $a, b, c$ , 其面积记为 $S$ , 有以下命题: ①

$S = \frac{1}{2}a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin A}$ ; ②若 $2\cos B \sin A = \sin C$ , 则 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形; ③

$\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A \sin B \cos C$ ; ④ $(a^2 + b^2)\sin(A-B) = (a^2 - b^2)\sin(A+B)$ , 则 $\triangle ABC$ 是等腰或直角三角形. 其中正确的命题是

A. ①②③                  B. ①②④                  C. ②③④                  D. ①③④

3. (23-24 高三·重庆·)  $\triangle ABC$ 中, 角 $A, B, C$ 所对应的边分别是 $a, b, c$ ,  $c = a \cos B + b \cos A$ , 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ( )

- A. 等腰三角形                                      B. 直角三角形
- C. 等腰直角三角形                                D. 等腰或直角三角形

4. (23-24 高三·广东广州·) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 $A, B, C$ 所对的边为 $a, b, c$ 若 $\frac{b^2}{c^2} = \frac{\tan B}{\tan C}$ , 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ( )

- A. 等腰三角形                                      B. 直角三角形
- C. 等腰三角形或直角三角形                      D. 等腰直角三角形

5. (2024·山东·二模) 在 $\triangle ABC$ 中, 设内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ , 设甲:  $b - c = a(\cos C - \cos B)$ , 设乙:  $\triangle ABC$ 是直角三角形, 则 ( )

- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件  
 B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件  
 C. 甲是乙的充要条件  
 D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

### 题型四：面积公式的应用

#### 指 | 点 | 迷 | 津

三角形面积，不仅仅有常见的“底乘高”，还有以下：

$$\textcircled{1} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{abc}{4R}$$

1. (23-24 高三·重庆·) 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $\triangle ABC$  的面积为  $S$ ,

$$S = \left( \frac{1}{2}b^2 - c^2 \right) \sin A, \quad \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C} = \frac{2}{\tan B}, \quad \text{则 } A = ( \quad )$$

- A.  $120^\circ$       B.  $135^\circ$       C.  $150^\circ$       D.  $165^\circ$

2. (2023·江西景德镇·模拟预测) 已知  $\triangle ABC$  中, 设角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,  $\triangle ABC$  的面积为  $S$ , 若  $3\sin^2 B + 2\sin^2 C = \sin A(\sin A + 2\sin B \sin C)$ , 则  $\frac{S}{b^2}$  的值为 ( )

- A.  $\frac{1}{4}$       B.  $\frac{1}{2}$       C. 1      D. 2

3. (2023·海南·二模) 在锐角三角形  $ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ , 已知  $a = \sqrt{3}$ ,  $(b^2 + c^2 - 3)\tan A = \sqrt{3}bc$ ,  $2\cos^2 \frac{A+B}{2} = (\sqrt{2} - 1)\cos C$ , 则  $\triangle ABC$  的面积

- A.  $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$       B.  $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$       C.  $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$       D.  $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$

4. (21-22 高三上·江西宜春·) 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $b = 2, A = \frac{\pi}{3}$ , 且  $\frac{c}{1-\cos C} = \frac{b}{\cos A}$ , 则  $\triangle ABC$  的面积为

- A.  $\sqrt{3}$       B.  $2\sqrt{3}$       C.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  或  $\sqrt{3}$       D.  $\sqrt{3}$  或  $2\sqrt{3}$

5. (23-24 高三·广西百色)  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $b \sin C + c \sin B = 4a \sin B \sin C$ ,  $b^2 + c^2 - a^2 = 8$ , 则  $\triangle ABC$  的面积为 ( )

- A.  $\frac{2}{3}$       B.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$       C.  $\frac{8}{3}$       D.  $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

### 题型五：求边长或者周长

#### 指 | 点 | 迷 | 津

解三角形，主要考查正弦定理、余弦定理，还考查三角形面积公式，两角差的正弦公式，同角间的三角函数关系，正切函数性质等等. 注意正弦定理在进行边角转换时等式必须是齐次，关于边  $a, b, c$  的齐次式或关于角的正弦  $\sin A, \sin B, \sin C$  的齐次式，齐次分式也可以用正弦定理进行边角转换. 求范围问题，通常是把量表示为三角形某个角的三角函数形式，利用此角的范围求得结论.

1. (23-24 高三·湖北黄冈·) 在  $\triangle ABC$  中，内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $2b \sin A = 3\sqrt{3}$ ,  $a = 3$ ,  $\angle B$  为钝角,  $b - c = 2$ , 则  $b =$  ( )

- A. 5      B. 6      C. 7      D. 8

2. (23-24 高三·江苏淮安·) 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 若  $A = 60^\circ$ ,  $a = \sqrt{6}$ ,  $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$ , 则  $c =$  ( )

- A. 1      B. 2      C. 4      D. 6

3. (23-24 高三·山西长治·) 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对应的边分别为  $a, b, c$ ,  $a = 2c = 2$ ,  $\tan \frac{A+B}{2} + \tan \frac{C}{2} = 4$ , 则  $b =$  ( )

- A.  $\sqrt{2}$       B.  $\sqrt{3}$       C. 2      D.  $\sqrt{5}$

4. (23-24 高三·四川成都) 在  $\triangle ABC$  中， $a, b, c$  分别为内角  $A, B, C$  的对边，若  $3 \sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B + 2 \sin A \sin B$ ,  $\cos C = \frac{3}{5}$ , 且  $S_{\triangle ABC} = 4$ , 则  $c =$  ( )

- A.  $\frac{4\sqrt{6}}{3}$       B. 4      C.  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$       D. 5

5. (23-24 高三·江苏南京) 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  对边分别为  $a, b, c$ . 若  $2b \cos C = 2a - c$ ,  $A = \frac{\pi}{4}$ ,  $b = 3$ , 则实数  $a$  的值为 ( )

A. 6

B. 3

C.  $\sqrt{6}$ D.  $\sqrt{3}$ 

## 题型六：解三角形求角度

### 指 | 点 | 迷 | 津

求三角形角度, 要涉及到角的锐钝的判断, 可以通过余弦值的正负判断。如果不能直接判断, 那么借助其他角来判断。如涉及到锐角三角形, 则三个角都要转化判断锐钝。

1. (23-24 高三下·江苏南京) 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $a, b, c$  分别为角  $A, B, C$  的对边. 若  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3 \cos C$ , 且

$\cos(A - B) = -\frac{\sqrt{3}}{6}$ , 则  $\cos C =$  ( )

A.  $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$ B.  $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  或  $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$ 

2. (23-24 高三·青海西宁) 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ , 若

$\frac{a \sin A + b \sin B - c \sin C}{a \sin B} = 2 \sin C$ , 则  $C$  的大小为 ( )

A.  $\frac{\pi}{6}$ B.  $\frac{\pi}{4}$ C.  $\frac{\pi}{2}$ D.  $\frac{2\pi}{3}$ 

3. (23-24 高三·安徽蚌埠) 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\cos B + \cos C = 2 \sin A \sin B$ ,  $a = \sqrt{3}b$ , 则  $C =$  ( )

A.  $\frac{\pi}{6}$ B.  $\frac{\pi}{4}$ C.  $\frac{\pi}{3}$ D.  $\frac{\pi}{2}$ 

4. (2024·江西宜春·模拟预测) 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 若  $(a^2 + c^2 - b^2) \tan B = \sqrt{3}ac$ , 则  $\cos 5B =$  ( )

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       D.  $\pm\frac{1}{2}$

5. (24-25 高三·江苏·假期作业) 记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 若  $a^2 \tan B = b^2 \tan A$ ,  $(a+c)(a-c) = b(b-\sqrt{3}c)$ , 则  $B =$  ( )

- A.  $\frac{\pi}{6}$  或  $\frac{\pi}{2}$       B.  $\frac{\pi}{6}$       C.  $\frac{\pi}{2}$  或  $\frac{2\pi}{3}$       D.  $\frac{\pi}{6}$  或  $\frac{\pi}{3}$

## 题型七：范围与最值：知角和边求周长

### 指 | 点 | 迷 | 津

解三角形中最值或范围问题，通常涉及与边长，周长有关的范围问题，与面积有关的范围问题，或与角度有关的范围问题，

常用处理思路：

①余弦定理结合基本不等式构造不等关系求出答案；

②正弦定理求边长范围，利用三角函数的范围求出边长范围，利用三角函数求角范围，求边长范围。

1. (23-24 高三·江苏淮安) 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ，若  $a = \sqrt{3}$ ，且  $\sqrt{3} \cos B + \sin B = c$ ，则  $\triangle ABC$  的周长的取值范围为 ( )

- A.  $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$       B.  $[\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$       C.  $(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$       D.  $[2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$

2. (23-24 高三·黑龙江大庆) 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ， $S$  为  $\triangle ABC$  的面积， $a = 2$ ，且  $2S = a^2 - (b-c)^2$ ，则  $\triangle ABC$  的周长的取值范围是 ( )

- A.  $(2, 2\sqrt{5}]$       B.  $(4, 2\sqrt{5} + 2]$       C.  $(6, 2\sqrt{5} + 2]$       D.  $(4, \sqrt{5} + 2]$

3. (2024·全国·模拟预测) 在锐角  $\triangle ABC$  中，若  $\sqrt{3} \sin A \left( \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos C}{c} \right) = \sin B \sin C$ ，且  $\sqrt{3} \sin C + \cos C = 2$ ，则  $a+b$  能取到的值有 ( )

- A. 5      B. 4      C.  $2\sqrt{3}$       D. 3

4. (22-23 高三·福建福州) 设锐角  $\triangle ABC$  的三个内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $c=1, A=2C$ , 则  $\triangle ABC$  周长的取值范围为 ( )

- A.  $(3, 2+\sqrt{2}]$     B.  $(3, 3+\sqrt{3}]$     C.  $(2+\sqrt{2}, 3+\sqrt{3})$     D.  $(2+\sqrt{2}, 3+\sqrt{3}]$

5. (22-23 高三上·福建泉州·开学考试) 在锐角  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $S$  为  $\triangle ABC$  的面积,  $a=2$ , 且  $2S=a^2-(b-c)^2$ , 则  $\triangle ABC$  的周长的取值范围是 ( )

- A.  $(4, 6]$     B.  $(4, 2\sqrt{5}+2]$   
C.  $(6, 2\sqrt{5}+2]$     D.  $(4, \sqrt{5}+2]$

## 题型八：范围与最值：知角和边求面积

### 指 | 点 | 迷 | 津

三角形面积，不仅仅有常见的“底乘高”，还有以下：

$$\textcircled{1} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{abc}{4R}$$

②  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$

1. (23-24 高三·山东淄博) 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 若  $\sin^2 A - \sin^2 C + \sin^2 B = \sin A \sin B$ , 且  $c=3$ , 则  $\triangle ABC$  面积的最大值为 ( )

- A.  $\sqrt{3}$     B.  $\frac{9\sqrt{3}}{4}$     C.  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$     D.  $2\sqrt{3}$

2. (23-24 高三·山东聊城) 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $c=2$ ,  $a^2 + b^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}ab\sin C + 4$ , 则  $\triangle ABC$  面积的最大值为 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     B. 1    C.  $\sqrt{3}$     D.  $2\sqrt{3}$

3. (23-24 高三·陕西渭南·阶段练习) 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $a=2$ ,  $A=30^\circ$ , 则  $\triangle ABC$  面积的最大值为 ( )

- A.  $3\sqrt{3}$       B.  $2\sqrt{3}$       C.  $3+\sqrt{3}$       D.  $2+\sqrt{3}$

4. (22-23 高三下·山西·阶段练习) 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,  $c=1$ ,  $a\sin A + 2b\sin B = \sin C$ , 则  $\triangle ABC$  面积的最大值是 ( )

- A.  $\frac{1}{9}$       B.  $\frac{1}{6}$       C.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

5. (20-21 高三·安徽·阶段练习) 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ , 且  $\sin(B+C) + 2\sin A \cos B = 0$ . 若  $b=2$ , 则  $\triangle ABC$  面积的最大值为 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       B.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$       C.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$       D.  $2\sqrt{3}$

## 题型九：范围与最值：判断角型

### 指 | 点 | 迷 | 津

求复合型角,

1. 以给了函数值的角度为基角来拆角。

1. (23-24 高三·广东湛江·阶段练习) 记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知

$\frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}$ , 若  $\triangle ABC$  为锐角三角形, 则角  $B$  的取值范围是 ( )

- A.  $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$       B.  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$       C.  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$       D.  $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

2. (23-24 高三·湖南株洲·期末) 在锐角  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $a = c - 2a \cos B$ ,

则  $\frac{12\sin^2 A}{4\sin A - \sin C}$  的取值范围为 ( )

- A.  $[2\sqrt{2}, +\infty)$       B.  $(2\sqrt{2}, +\infty)$       C.  $[2\sqrt{2}, 3]$       D.  $(2\sqrt{2}, 3)$

3. (23-24 高三·江苏连云港) 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 若  $\sqrt{2}\sin A = \sin(C-B)$ , 则角  $A$  的最大值是 ( )

- A.  $30^\circ$       B.  $45^\circ$       C.  $60^\circ$       D.  $90^\circ$

4. (23-24 高三·上海)  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 满足  $a^2 - (b-c)^2 \leq bc$ , 则角  $A$  的范围是 ( )

- A.  $\left(0, \frac{\pi}{6}\right]$       B.  $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$       C.  $\left[\frac{\pi}{6}, \pi\right)$       D.  $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$

5. (2024·安徽合肥·模拟预测) 已知  $\triangle ABC$  角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$  满足  $\frac{2b}{a-c} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin B}$ , 则角  $B$  的最大值为 ( )

- A.  $\frac{\pi}{6}$       B.  $\frac{\pi}{4}$       C.  $\frac{\pi}{3}$       D.  $\frac{2\pi}{3}$

## 题型十：范围与最值：无长度求比值型

### 指 | 点 | 迷 | 津

解三角形：最值范围

1. 可以用余弦定理+均值不等式来求解。

2. 可以利用正弦定理 结合角与角所对应的边 转化为角的形式 再进行三角恒等变形 化一 求解最值与范

1. (23-24 高三·江苏南京·阶段练习) 在锐角  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$  若

$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{3b-c}{4b}}$ , 则  $\frac{a}{b+c}$  的取值范围是 ( )

- A.  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$       B.  $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$       C.  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$       D.  $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2. (23-24 高三·吉林) 已知锐角  $\triangle ABC$  是单位圆的内接三角形, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且

$\sin^2 A + \sin^2 C - \sin^2 B = 4\sin^2 A \cos B - 2\sin A \sin B \cos C$ ，则  $\frac{bc}{a}$  的取值范围是 ( )

- A.  $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$       B.  $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$       C.  $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$       D.  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3}\right)$

3. (23-24 高三·陕西商洛) 记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，若  $b \sin A + \sqrt{3}a \cos B = 0$ ， $b^2 = 3ac$ ，则  $\frac{b}{a+c} =$  ( )

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$       D.  $\frac{1}{3}$

4. (23-24 高三·湖北·阶段练习) 在锐角  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，且  $\triangle ABC$  的面积  $S = bc(1 - \cos A)$ ，则  $\frac{a^2}{bc}$  的取值范围为 ( )

- A.  $\left[\frac{4}{5}, +\infty\right)$       B.  $\left[\frac{4}{5}, \frac{16}{15}\right)$       C.  $\left[\frac{4}{5}, \frac{32}{35}\right)$       D.  $\left[\frac{32}{35}, \frac{16}{15}\right)$

5. (23-24 高三·江苏南通) 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ，若  $c - b = 2b \cos A$ ，则  $\frac{c}{a-b}$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-1, 2)$       B.  $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$       C.  $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$       D.  $(2, 3)$

## 题型十一：范围与最值：正切型最值

## 指 | 点 | 迷 | 津

1. 正切主要恒等式:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad (\pi(\alpha + \beta))$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \quad (\pi(\alpha - \beta))$$

正切和差公式变形:

$$\tan \alpha \pm \tan \beta = \tan(\alpha \pm \beta)(1 \mp \tan \alpha \tan \beta),$$

1. (23-24 高三上·四川南充·阶段练习)  $\triangle ABC$  的周长为 18, 若  $\cos \frac{A-B}{2} = 2 \sin \frac{C}{2}$ , 则  $\triangle ABC$  的内切圆半径的最大值为 ( )

- A. 1                      B.  $\sqrt{3}$                       C. 2                      D. 4

2. (2022·黑龙江哈尔滨·二模) 在锐角  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $\triangle ABC$  的面积为  $S$ , 若  $\sin(A+C) = \frac{2S}{b^2 - a^2}$ , 则  $\tan A + \frac{1}{3 \tan(B-A)}$  的取值范围为 ( )

- A.  $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$     B.  $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}\right]$     C.  $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}\right)$     D.  $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}\right)$

3. (23-24 高三上·山东德州·阶段练习) 在锐角  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $S$  为  $\triangle ABC$  的面积, 且  $2S = a^2 - (b-c)^2$ , 则  $\frac{b^2 + c^2}{bc}$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

4. (22-23 高三下·四川南充·开学考试) 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 若  $\frac{\sin A \sin C}{\sin B} = \frac{b^2 - c^2 - a^2}{b^2 + c^2 - a^2}$ , 则  $\tan C$  的取值范围为\_\_\_\_\_

5. (21-22 高三上·江苏南通·) 在锐角  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $a^2 + 2ab \cos C = 3b^2$ , 则  $\tan A \tan B \tan C$  的最小值是\_\_\_\_\_.

## 题型十二：正余弦定理与三角形外心

### 指 | 点 | 迷 | 津

三角形所在的外接圆的处理方法：

1. 外接圆的圆心到三角形的三个顶点的距离相等。锐角三角形外心在三角形内部。直角三角形外心在三角形斜边中点上。

钝角三角形外心在三角形外。

1. (2023 高三上·全国·专题练习) 在  $\triangle ABC$  中,  $D$  为边  $AC$  上一点,  $AB = AC = 6, AD = 4$ , 若  $\triangle ABC$  的外心恰在线段  $BD$  上, 则  $BC = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. (21-22 高三上·河南·阶段练习) 在钝角三角形  $ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $A > \frac{\pi}{2}$ ,  $a = 2$ , 点  $O$  为  $\triangle ABC$  的外心,  $\triangle OBC$  的面积为  $\sqrt{3}$ , 则  $\triangle OAB$  与  $\triangle OAC$  的面积之和的最大值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

3. (17-18 高三·湖南·开学考试) 若点  $O$  是等腰  $\triangle ABC$  的外心, 且  $\angle BOC = 120^\circ$ , 底边  $BC = 2$ , 则  $\triangle ABC$  的面积是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

4. (22-23 高三·四川达州) 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 满足  $a = 3$ ,  $b + 6\cos B = 2c$ , 若  $M$  为  $\triangle ABC$  的外心,  $AM$  的延长线交  $BC$  于  $D$ , 且  $MD = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 则  $A = \underline{\hspace{2cm}}$ ;  $\triangle ABC$  的面积为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

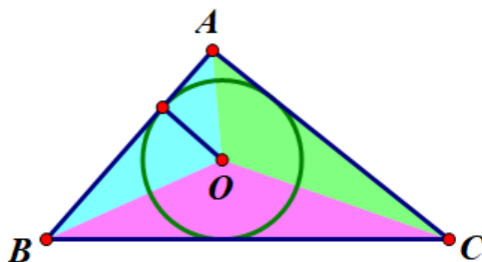
5. (22-23 高三·湖北·阶段练习) 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $AB = 2, AC = 5, \angle BAC = 60^\circ$ ,  $P$  是  $\triangle ABC$  的外心, 则  $\angle APB$  的余弦值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

## 题型十三：正余弦定理与角平分线

### 指 | 点 | 迷 | 津

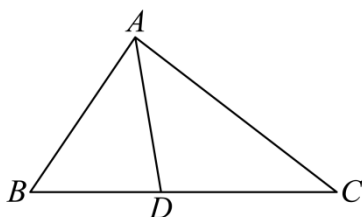
内切圆圆心，是三角形三个内角角平分线的交点， $\triangle ABC$  的三边长分别为  $a, b, c$ ， $\triangle ABC$  的面积为  $S$ ，内切圆

半径为  $r$ ，则  $r = \frac{2S}{a+b+c}$ 。



$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}(a+b+c)r \Leftrightarrow r = \frac{2S_{\triangle}}{a+b+c}$$

1. (2023·江西·模拟预测) 如图，若  $AD$  是  $\triangle ABC$  的角平分线，则  $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$ ，该结论由英国数学家斯库顿发现，故称之为斯库顿定理，常用于解决三角形中的一些角平分线问题。若图中  $BD=4$ ， $AD=5$ ， $AB=6$ ，在  $\triangle ABC$  内任取一点  $P$ ，则点  $P$  恰好落在  $\triangle ABD$  内的概率为 ( )



- A.  $\frac{5}{9}$       B.  $\frac{3}{5}$       C.  $\frac{4}{9}$       D.  $\frac{4}{5}$
2. (2023·青海玉树·模拟预测) 在  $\triangle ABC$  中，角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  所对的边分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，若  $a \sin A = b \sin B + (c-b) \sin C$ ， $AD$  为  $\triangle ABC$  的角平分线，且  $AD=2\sqrt{3}$ ， $c=2b$ ，则  $a$  的值为 ( )
- A.  $2\sqrt{3}$       B.  $3\sqrt{3}$       C.  $4\sqrt{7}$       D.  $6\sqrt{7}$
3. (22-23 高三·浙江杭州·期中) 在  $\triangle ABC$  中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $AD$  是  $\angle BAC$  的角平分线， $AB=3$ ， $AC=4$ ， $E$  是  $AC$  的中点，则  $DE$  的长度为 ( )
- A.  $\frac{2\sqrt{37}}{7}$       B.  $\frac{2\sqrt{17}}{7}$       C.  $\frac{\sqrt{37}}{7}$       D.  $\frac{\sqrt{17}}{7}$
4. (21-22 高三上·浙江·阶段练习) 已知  $\triangle ABC$  内接于半径为 2 的  $\odot O$ ，内角  $A, B, C$  的角平分线分别与  $\odot O$

相交于  $D, E, F$  三点, 若  $AD \cdot \cos \frac{A}{2} + BE \cdot \cos \frac{B}{2} + CF \cdot \cos \frac{C}{2} = \lambda(\sin A + \sin B + \sin C)$ , 则  $\lambda =$

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

5. (21-22 高三·河北保定) 在  $\triangle ABC$  中,  $B = \frac{\pi}{3}$ ,  $M$  为  $AC$  边上的一点, 且  $BM = 2$ , 若  $BM$  为  $\angle ABC$  的角平分线, 则  $\frac{2}{AM} - \frac{1}{CM}$  的取值范围为

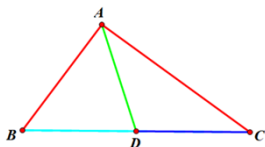
- A.  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$     B.  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right]$     C.  $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$     D.  $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right]$

#### 题型十四：正余弦定理与中线

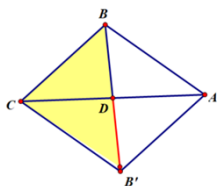
# 指 | 点 | 迷 | 津

中线的处理方法

1. 向量法:  $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \Leftrightarrow |\vec{AD}|^2 = \frac{1}{4}(|\vec{AB}|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + |\vec{AC}|^2)$



2. 补全为平行四边形。再转而在新三角形中用正余弦定理



2. 余弦定理法（补角法）:

如图设  $BD = DC$ ,

在  $\triangle ABD$  中, 由余弦定理得  $AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 \times AD \times BD \times \cos \angle ADB$ , ①

在  $\triangle ACD$  中, 由余弦定理得  $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \times AD \times DC \times \cos \angle ADC$ , ②

因为  $\angle ADB + \angle ADC = \pi$ , 所以  $\cos \angle ADB + \cos \angle ADC = 0$

所以①+②式即可

3. 延伸补形法: 如图所示, 延伸中线, 补形为平行四边形



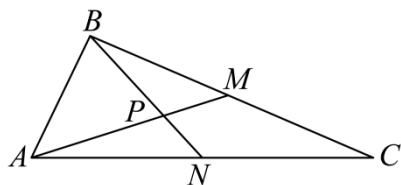
1. (23-24 高三·海南海口)  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \sin B \sin C$ ,  $a = 4$ ,  $BC$  边上的中线为  $\sqrt{6}$ , 则  $\triangle ABC$  的面积为 ( )

- A.  $\sqrt{3}$       B.  $2\sqrt{3}$       C. 3      D. 4

2. (23-24 高三·江苏镇江·阶段练习) 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $b = 2$ ,  $b^2 + c^2 - a^2 = bc$ , 若  $BC$  边上的中线  $AD = \sqrt{7}$ , 则  $\triangle ABC$  的外接圆面积是 ( )

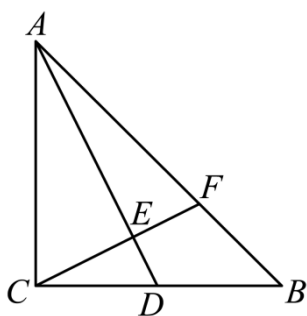
- A.  $4\pi$       B.  $8\pi$       C.  $12\pi$       D.  $16\pi$

3. (22-23 高三·四川成都) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=2$ ,  $AC=5$ ,  $\angle BAC=60^\circ$ ,  $BC$ ,  $AC$ 边上的两条中线 $AM$ ,  $BN$ 相交于点 $P$ , 则 $\angle APB$ 的余弦值为 ( )



- A.  $\frac{\sqrt{13}}{13}$       B.  $\frac{2\sqrt{13}}{13}$       C.  $\frac{2\sqrt{91}}{91}$       D.  $\frac{4\sqrt{91}}{91}$

4. (20-21 高三四川自贡·开学考试) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中,  $\angle ACB=90^\circ$ ,  $AC=BC$ ,  $AD$ 为中线, 过点 $C$ 作 $CE \perp AD$ 于点 $E$ , 延长 $CE$ 交 $AB$ 于点 $F$ , 若 $AC=1$ , 则 $CF$ 的值为 ( )



- A.  $\frac{3}{4}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       C.  $\frac{2}{3}$       D.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$

5. (2022 高三·全国·专题练习) 在等腰 $\triangle ABC$ 中,  $AC=BC$ ,  $BC$ 边上的中线 $AD=4$ , 则 $\triangle ABC$ 面积 $S$ 的最大值为 ( )

- A.  $\frac{16}{3}$       B.  $\frac{28}{3}$       C.  $\frac{32}{3}$       D.  $\frac{64}{3}$

## 题型十五：正余弦定理与三角形高

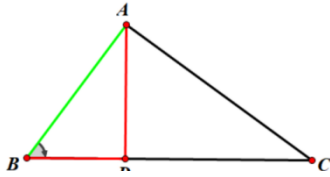
## 指 | 点 | 迷 | 津

三角形高的处理方法：

1. 等面积法：两种求面积公式

$$\text{如 } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}BC \times AD = \frac{1}{2}c^2$$

2. 三角函数法：



1. (23-24 高三·河南郑州) 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ ，若  $c \cos A + a \cos C = 6$ ， $AC$  边上的高为  $3\sqrt{3}$ ，则  $\angle ABC$  的最大值为 ( )

- A.  $\frac{\pi}{6}$       B.  $\frac{\pi}{3}$       C.  $\frac{\pi}{2}$       D.  $\frac{2\pi}{3}$

2. (23-24 高三广西·阶段练习) 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，若  $c = 4$ ， $b = 2$ ， $\angle BAC$  的平分线  $AD$  的长为  $\sqrt{6}$ ，则  $BC$  边上的高  $AH$  的长为 ( )

- A.  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$       B.  $\sqrt{5}$       C.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{15}}{2}$

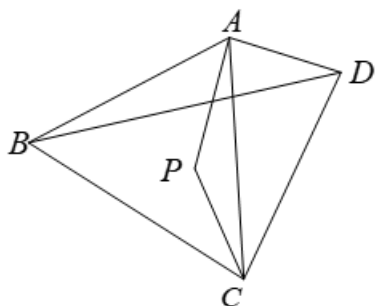
3. (2024·广东佛山·一模) 已知  $\triangle ABC$  中， $AB = 2BC = 2$ ， $AB$  边上的高与  $AC$  边上的中线相等，则  $\tan B =$  \_\_\_\_\_.

4. (2022 高三·全国·专题练习) 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对的边为  $a, b, c$ ，若  $AB$  边上的高为  $\frac{1}{4}AB$ ，则  $\frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin A}$  的最大值是 \_\_\_\_\_.

5. (2011·江苏南京·一模)  $\triangle ABC$  中， $BC$  边上的高  $AD = BC$ ，角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ ，则  $\frac{b}{c} + \frac{c}{b}$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

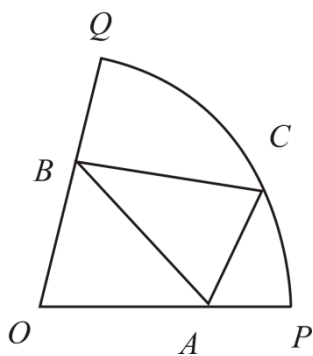
## 题型十六：解三角形综合应用

1. (20-21 高三·江苏南京) 如图所示, 在平面四边形  $ABCD$  中, 已知  $S_{\triangle ABD} = |AD|^2 + |BD|^2 - |AB|^2$ ,  $\angle BAD + \angle BCD = \pi$ ,  $\angle ABC = \angle BCD$ , 记  $BD$  的中垂线与  $AC$  的中垂线交于一点  $P$ , 恰好  $CP$  为  $\angle ACB$  的角平分线, 则  $\left| \frac{BD}{AP} \right|^2 = ( \quad )$



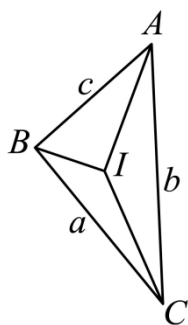
- A.  $\frac{14 + \sqrt{14}}{34}$       B.  $\frac{34 + 2\sqrt{17}}{17}$       C.  $\frac{1}{8}$       D.  $\frac{28 + 2\sqrt{17}}{17}$

2. (21-22 高三·浙江) 如图, 已知  $OPQ$  是半径为 1, 圆心角为  $75^\circ$  的扇形, 点  $A, B, C$  分别是半径  $OP, OQ$  及扇形弧上的三个动点 (不同于  $O, P, Q$  三点), 则  $\triangle ABC$  周长的最小值是 ( )



- A.  $\frac{\sqrt{6} + 1}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$       C.  $\frac{2\sqrt{6} + 1}{4}$       D.  $\frac{2\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

3. (2021·安徽合肥·二模) 已知点  $I$  在  $\triangle ABC$  内部,  $AI$  平分  $\angle BAC$ ,  $\angle IBC = \angle ACI = \frac{1}{2} \angle BAC$ , 对满足上述条件的所有  $\triangle ABC$ , 下列说法正确的是 ( )



- A.  $\triangle ABC$  的三边长一定成等差数列  
 B.  $\triangle ABC$  的三边长一定成等比数列  
 C.  $\triangle ABI$ ,  $\triangle ACI$ ,  $\triangle BCI$  的面积一定成等差数列  
 D.  $\triangle ABI$ ,  $\triangle ACI$ ,  $\triangle BCI$  的面积一定成等比数列

4. (23-24 高三·安徽六安·阶段练习)  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $c=2$ ,  $\frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\sin A}{2 - \cos A}$ ,  $M$  和  $N$  分别是  $\triangle ABC$  的重心和内心, 且  $MN \parallel BC$ , 则  $a =$  ( )

- A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 6

5. (23-24 高三·北京) 已知在  $\triangle ABC$  中,  $B = \frac{\pi}{3}, AC = \sqrt{3}$ , 设  $k \in [0, 2]$ , 记  $AB + k \cdot BC$  的最大值为  $f(k)$ , 则  $f(k)$  的最小值为 ( )

- A.  $\sqrt{3}$                       B. 2                      C.  $2\sqrt{3}$                       D.  $2\sqrt{7}$

参考答案与试题解析

## 专题 11 解三角形综合压轴小题归类



### 目录

|                        |   |
|------------------------|---|
| 题型一：三角形几何求参.....       | 1 |
| 题型二：判断三角形形状：化角为边型..... | 3 |
| 题型三：判断三角形形状：化边为角型..... | 7 |
| 题型四：面积公式的应用.....       | 9 |

|                        |    |
|------------------------|----|
| 题型五：求边长或者周长.....       | 12 |
| 题型六：解三角形求角度.....       | 14 |
| 题型七：范围与最值：知角和边求周长..... | 16 |
| 题型八：范围与最值：知角和边求面积..... | 19 |
| 题型九：范围与最值：判断角型.....    | 21 |
| 题型十：范围与最值：无长度求比值型..... | 24 |
| 题型十一：范围与最值：正切型最值.....  | 28 |
| 题型十二：正余弦定理与三角形外心.....  | 32 |
| 题型十三：正余弦定理与角平分线.....   | 35 |
| 题型十四：正余弦定理与中线.....     | 38 |
| 题型十五：正余弦定理与三角形高.....   | 42 |
| 题型十六：解三角形综合应用.....     | 46 |

## 题型突围 · 精准提分

### 题型一： 三角形几解求参

#### 指 | 点 | 迷 | 津

判断三角形解的个数有 2 种：

画图法：以已知角的对边为半径画弧，通过与邻边的交点个数判断解的个数。

- ①若无交点，则无解；
- ②若有一个交点，则有一个解；
- ③若有两个交点，则有两个解；
- ④若交点重合，虽然有两个交点，但只能算作一个解。

1. (23-24 高三·陕西榆林·) 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，若  $B = 60^\circ$ ， $b = 3\sqrt{3}$ ， $\triangle ABC$  只有一个解，则  $c$  的取值范围为 ( )

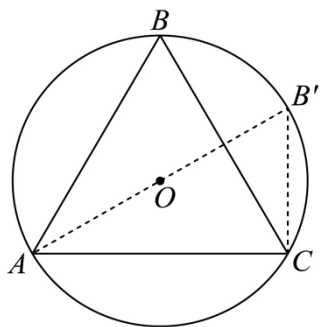
- A.  $(0, 3\sqrt{3})$       B.  $(0, 3\sqrt{3}]$       C.  $(3\sqrt{3}, 6)$       D.  $(0, 3\sqrt{3}] \cup \{6\}$

【答案】D

【分析】利用正弦定理求外接圆半径，结合圆的性质分析求解.

【详解】 $\triangle ABC$  的外接圆  $O$  的半径  $R = \frac{b}{2\sin B} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 3$ ,

如图所示,  $AC = 3\sqrt{3}$ ,  $AB'$  是圆的直径.



可知点  $B$  在优弧  $\widehat{AC}$  上 (不包括端点),

当  $B$  为  $B'$  时, 此时  $c$  取到最大值  $2R = 6$ ;

当点  $B$  从点  $A$  到  $B'$  时, 此时  $c$  越来越大, 且  $c \in (0, 6)$ ;

当点  $B$  从点  $B'$  到  $C$  时, 此时  $c$  越来越小, 且  $c \in (3\sqrt{3}, 6)$ ;

综上所述: 若  $\triangle ABC$  只有一个解, 则  $c$  的取值范围为  $(0, 3\sqrt{3}] \cup \{6\}$ .

故选: D.

2. (23-24 高三·江苏南通·) 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 若满足条件  $A = \frac{\pi}{6}$ ,  $c = 2$  的  $\triangle ABC$  有两个, 则  $a$  的取值范围为 ( )

- A.  $(1, 2)$       B.  $(2, +\infty)$       C.  $[1, 2)$       D.  $(1, 2]$

【答案】A

【分析】根据给定条件, 利用正弦定理用  $a$  表示  $\sin C$ , 再借助  $\sin C$  的范围求解即得.

【详解】在  $\triangle ABC$  中, 由正弦定理得  $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ , 则  $\sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{6}}{a} = \frac{1}{a}$ ,

由满足条件  $A = \frac{\pi}{6}$ ,  $c = 2$  的  $\triangle ABC$  有两个, 得  $\frac{\pi}{6} < C < \frac{5\pi}{6}$ , 且  $C \neq \frac{\pi}{2}$ , 即  $\frac{1}{2} < \sin C < 1$ ,

因此  $\frac{1}{2} < \frac{1}{a} < 1$ , 所以  $1 < a < 2$ .

故选: A

3. (2023·四川绵阳·模拟预测) 命题  $P$ : “若  $\triangle ABC$  与  $\triangle DEF$  满足  $AB = DE = x, BC = EF = 2, \cos A = \cos D = \frac{4}{5}$ , 则  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ”. 已知命题  $P$  是真命题, 则  $x$  的值不可以是 ( )

A. 1

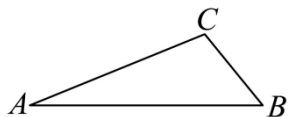
B. 2

C.  $\frac{10}{3}$ D.  $\frac{7}{3}$ 

【答案】D

【分析】根据已知可知三角形有唯一解，根据已知结合正弦定理，以及  $x$  与 2 的大小关系、正弦函数的取值范围，求解即可得出答案.

【详解】



在  $\triangle ABC$  中，由已知可得， $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{3}{5}$ .

又  $\cos A = \frac{4}{5} > 0$ ，所以  $A$  为锐角.

由正弦定理可得， $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$ ,

所以， $\sin C = \frac{AB \sin A}{BC} = \frac{\frac{3}{5}x}{2} = \frac{3}{10}x$ .

要使命题  $P$  是真命题，则  $C$  有唯一满足条件的解.

若  $0 < x < 2$ ，则  $\sin C < \frac{3}{5}$ ，显然  $C$  有唯一满足条件的解；

若  $x = 2$ ，则  $C = A$ ，满足；

若  $x > 2$ ，且  $\sin C < 1$ ，即  $\frac{3}{10}x < 1$ ，

即  $2 < x < \frac{10}{3}$ ，此时  $C$  有两解满足条件，此时命题  $P$  是假命题；

当  $x = \frac{10}{3}$  时，此时有  $\sin C = 1$ ， $C = \frac{\pi}{2}$  有唯一解，满足；

当  $x > \frac{10}{3}$  时，此时有  $\sin C > 1$ ，显然  $C$  无解，不满足.

综上所述，当  $0 < x \leq 2$  或  $x = \frac{10}{3}$  时，命题  $P$  是真命题.

故选：D.

4. (23-24 高三下·浙江·) 在  $\triangle ABC$  中， $\angle A = \frac{\pi}{3}$ ,  $AB = 4$ ,  $BC = a$ ，且满足该条件的  $\triangle ABC$  有两个，则  $a$  的取值范围是 ( )

A. (0,2)

B.  $(2, 2\sqrt{3})$ 

C. (2,4)

D.  $(2\sqrt{3}, 4)$ 

【答案】D

【分析】由正弦定理求出  $\sin C$ ，由  $\sin C < 1$ ，且  $BC < AB$ ，可得  $a$  的取值范围.

【详解】由正弦定理可得： $\frac{a}{\sin A} = \frac{4}{\sin C}$ ，所以  $\sin C = \frac{2\sqrt{3}}{a} < 1$ ，所以  $a > 2\sqrt{3}$ ，

因为满足条件的  $\triangle ABC$  有两个，所以  $BC < AB$ ，即  $a < 4$ ，所以  $a$  的取值范围是  $(2\sqrt{3}, 4)$

故选：D

5. (22-23 高三·北京) 已知在  $\triangle ABC$  中， $\angle B = 60^\circ, b = \sqrt{3}$ ，若满足条件的三角形有且只有一个，则  $a$  的取值范围是 ( )

A.  $\{a \mid 0 < a < \sqrt{3}\}$

B.  $\{a \mid 0 < a < \sqrt{3} \text{ 或 } a = 2\}$

C.  $\{a \mid 0 < a \leq \sqrt{3}\}$

D.  $\{a \mid 0 < a \leq \sqrt{3} \text{ 或 } a = 2\}$

【答案】D

【分析】由正弦定理和三角形解的个数可得答案.

【详解】由正弦定理可得  $a = \frac{b}{\sin B} \sin A = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin A = 2 \sin A$ ，

若满足条件的三角形有且只有一个，则  $0^\circ < A \leq 60^\circ$  或  $A = 90^\circ$ ，

所以  $0 < \sin A \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  或  $\sin A = 1$ ，

可得  $0 < a \leq \sqrt{3}$  或  $a = 2$ 。

故选：D.

## 题型二：判断三角形形状：化角为边型

### 指 | 点 | 迷 | 津

正余弦定理：化角为边型

“化角为边”是解决三角形形状问题的常用方法，也是高考命题的热点.

1. (2021 高三·全国·专题练习) 设  $\triangle ABC$  的三边长为  $BC = a$ ， $CA = b$ ， $AB = c$ ，若  $\tan \frac{A}{2} = \frac{a}{b+c}$ ，

$\tan \frac{B}{2} = \frac{b}{a+c}$ ，则  $\triangle ABC$  是 ( )。

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰三角形或直角三角形

D. 等腰直角三角形

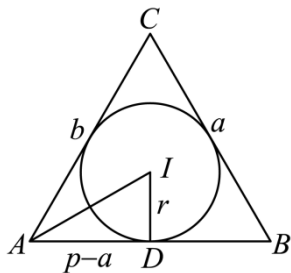
【答案】B

【分析】若三角形各边长为  $a$ 、 $b$ 、 $c$  且内切圆半径为  $r$ ,

法一: 由内切圆的性质有  $\tan \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$ 、 $\tan \frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}$ , 根据边角关系可得  $a=b$  或  $a^2+b^2=c^2$ , 注意讨论所得关系验证所得关系的内在联系;

法二: 由半角正切公式、正弦定理可得  $A=B$  或  $A+B=\frac{\pi}{2}$ , 结合三角形内角的性质讨论所得关系判断三角形的形状.

【详解】设  $P=\frac{1}{2}(a+b+c)$ ,  $\triangle ABC$  的内切圆半径为  $r$ , 如图所示,



法一:

$$\therefore \tan \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} = \frac{a}{b+c} \quad ①; \quad \tan \frac{B}{2} = \frac{r}{p-b} = \frac{b}{a+c} \quad ②.$$

$$① \div ②, \text{ 得: } \frac{p-b}{p-a} = \frac{a}{b+c} \cdot \frac{a+c}{b}, \text{ 即 } \frac{2(p-b)}{2(p-a)} = \frac{a(a+c)}{b(b+c)}.$$

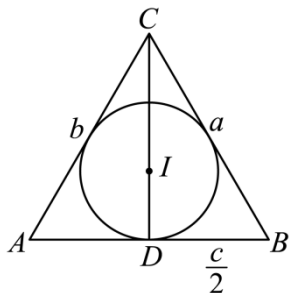
$$\text{于是 } b(b+c)(c+a-b) = a(a+c)(b+c-a),$$

$$ab^2 - b^3 + bc^2 = a^2b - a^3 + ac^2, \quad (a-b)(a^2 + b^2 - c^2) = 0,$$

$$\text{从而得 } a=b \text{ 或 } a^2 + b^2 = c^2,$$

$\therefore \angle A = \angle B$  或  $\angle C = 90^\circ$ . 故  $\triangle ABC$  为等腰三角形或直角三角形,

(1) 当  $a=b$  时, 内心  $I$  在等腰三角形  $CAB$  的底边上的高  $CD$  上,



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}} \cdot c, \text{ 从而得 } r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{c \cdot \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}}{2a+c}.$$

$$\text{又 } p-a = \frac{1}{2}(b+c-a) = \frac{1}{2}c, \text{ 代入 } ① \text{ 式, 得 } \frac{c \cdot \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}}{(2a+c) \cdot \frac{1}{2}c} = \frac{a}{b+c} = \frac{a}{a+c}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{4a^2 - c^2}}{2a+c} = \frac{a}{a+c},$$

上式两边同时平方, 得:  $\frac{2a-c}{2a+c} = \frac{a^2}{(a+c)^2}$ , 化简  $c^2 - 2a^2 = 0$ , 即  $c = \sqrt{2}a$ . 即  $\triangle ABC$  直角三角形,

$\therefore \triangle ABC$  为等腰直角三角形.

(2) 当  $a^2 + b^2 = c^2$  时, 易得  $r = \frac{1}{2}(a+b-c)$ .

代入②式, 得  $\frac{\frac{1}{2}(a+b-c)}{\frac{1}{2}(a+c-b)} = \frac{b}{a+c}$ , 此式恒成立,

综上,  $\triangle ABC$  为直角三角形.

法二:

利用  $\tan \frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1+\cos A}$ ,  $\tan \frac{B}{2} = \frac{\sin B}{1+\cos B}$  及正弦定理和题设条件, 得  $\frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{\sin A}{\sin B + \sin C}$  ①,

$\frac{\sin B}{1+\cos B} = \frac{\sin B}{\sin A + \sin C}$  ②.

$\therefore 1 + \cos A = \sin B + \sin C$  ③;  $1 + \cos B = \sin A + \sin C$  ④.

由③和④得:  $1 + \cos A - \sin B = 1 + \cos B - \sin A$ , 即  $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$ ,  $\sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(B + \frac{\pi}{4}\right)$ ,

因为  $A, B$  为三角形内角,

$\therefore A + \frac{\pi}{4} = B + \frac{\pi}{4}$  或  $A + \frac{\pi}{4} = \pi - B - \frac{\pi}{4}$ , 即  $A = B$  或  $A + B = \frac{\pi}{2}$ .

(1) 若  $A = B$ , 代入③得:  $1 + \cos A = \sin B + \sin C$  ⑤

又  $C = \pi - A - B = \pi - 2A$ , 将其代入⑤, 得:  $1 + \cos A = \sin A + \sin 2A$ .

变形得  $(\sin A - \cos A)^2 - (\sin A - \cos A) = 0$ ,

即  $(\sin A - \cos A)(\sin A - \cos A - 1) = 0$  ⑥,

由  $A = B$  知  $A$  为锐角, 从而知  $\sin A - \cos A - 1 \neq 0$ .

$\therefore$  由⑥, 得:  $\sin A - \cos A = 0$ , 即  $A = \frac{\pi}{4}$ , 从而  $B = \frac{\pi}{4}$ ,  $C = \frac{\pi}{2}$ .

因此,  $\triangle ABC$  为等腰直角三角形.

(2) 若  $A + B = \frac{\pi}{2}$ , 即  $C = \frac{\pi}{2}$ , 此时③④恒成立,

综上,  $\triangle ABC$  为直角三角形.

故选: B

2. (20-21 高三·上海浦东新·) 已知  $\triangle ABC$  的三条边  $a, b, c$  和与之对应的三个角  $A, B, C$  满足等式  $a \cos B + b \cos C + c \cos A = b \cos A + c \cos B + a \cos C$  则此三角形的形状是 ( )

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰或直角三角形

D. 等腰直角三角形

【答案】A

【分析】利用余弦定理将角化为边整理，即可得三角形的边之间的关系，从而可得此三角形的形状.

【详解】由余弦定理，可得

$$a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + a \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$\text{整理, 得 } \frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{b^2 - c^2}{a} + \frac{c^2 - a^2}{b} = 0,$$

$$\text{所以 } \frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{b^2 - c^2}{a} + \frac{c^2 - b^2 + b^2 - a^2}{b} = 0,$$

$$\text{所以 } (a^2 - b^2) \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) + (b^2 - c^2) \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = 0,$$

$$\text{所以 } (a-b)(b-c) \cdot \frac{a+b}{bc} + (b-a)(b-c) \cdot \frac{b+c}{ab} = 0,$$

$$\text{所以 } (a-b)(b-c) \left( \frac{a+b}{bc} - \frac{b+c}{ab} \right) = 0,$$

$$\text{所以 } (a-b)(b-c) \cdot \frac{a^2 - ab - bc - c^2}{abc} = 0,$$

$$\text{所以 } (a-b)(b-c)(a-c) \cdot \frac{a+c+b}{abc} = 0,$$

所以  $a=b$  或  $b=c$  或  $a=c$ ，故三角形为等腰三角形.

故选：A

3. (18-19 高三·四川雅安·阶段练习) 在  $\triangle ABC$  中， $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$ ，则  $\triangle ABC$  的形状是 ( )

A. 等腰三角形但一定不是直角三角形

B. 等腰直角三角形

C. 直角三角形但一定不是等腰三角形

D. 等腰三角形或直角三角形

【答案】C

【解析】原式可化为  $(a^2 + b^2) \cdot (\sin A \cos B - \cos A \sin B) = (a^2 - b^2) (\sin A \cos B + \cos A \sin B)$ ，然后利用正弦定理、余弦定理进行边角互化，得出  $a, b, c$  的关系.【详解】解：由  $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$  得：  $(a^2 + b^2) \cdot \sin(A-B) = (a^2 - b^2) \sin(A+B)$ ，且  $a \neq b$ ，

$$\therefore (a^2 + b^2) \cdot (\sin A \cos B - \cos A \sin B) = (a^2 - b^2) (\sin A \cos B + \cos A \sin B), \text{ 且 } a \neq b,$$

$$\therefore (a^2 + b^2) \cdot (a \cos B - b \cos A) = (a^2 - b^2)(a \cos B + b \cos A),$$

$$\therefore (a^2 + b^2) \cdot \left( a \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - b \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) = (a^2 - b^2) \left( a \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + b \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right),$$

$$\text{化简整理得: } (a^2 + b^2) \cdot (a^2 - b^2) = (a^2 - b^2)c^2, \text{ 即 } (a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2) = 0,$$

$$\therefore a^2 = b^2 \text{ 或 } a^2 + b^2 = c^2, \text{ 又 } a \neq b,$$

$\therefore \triangle ABC$  是直角三角形但一定不是等腰三角形.

故选: C.

【点睛】本题考查三角形形状的判定, 难度稍大. 解答时, 利用正、余弦定理进行边角互化是难点.

4. (23-24 高三·江苏徐州) 在  $\triangle ABC$  中, 若  $\frac{1 - \cos 2C}{c \cdot \cos B} = \frac{1 - \cos 2B}{b \cdot \cos C}$ , 则  $\triangle ABC$  的形状为 ( )

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等腰三角形或直角三角形

【答案】D

【分析】先利用二倍角公式化简, 然后利用正余弦定理统一成边的形式, 化简变形可得答案.

【详解】因为  $\frac{1 - \cos 2C}{c \cdot \cos B} = \frac{1 - \cos 2B}{b \cdot \cos C}$ , 所以  $\frac{2\sin^2 C}{c \cdot \cos B} = \frac{2\sin^2 B}{b \cdot \cos C}$ ,

$$\text{所以 } 2b\sin^2 C \cos C = 2c\sin^2 B \cos B,$$

$$\text{所以由正弦定理得 } 2bc^2 \cos C = 2cb^2 \cos B,$$

$$\text{因为 } 2bc \neq 0, \text{ 所以 } c \cos C = b \cos B,$$

$$\text{所以由余弦定理得 } c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = b \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\text{所以 } c^2(a^2 + b^2 - c^2) = b^2(a^2 + c^2 - b^2),$$

$$\text{所以 } a^2b^2 - a^2c^2 + c^4 - b^4 = 0,$$

$$\text{所以 } a^2(b^2 - c^2) + (c^2 + b^2)(c^2 - b^2) = 0,$$

$$\text{所以 } (b^2 - c^2)[a^2 - (c^2 + b^2)] = 0,$$

$$\text{所以 } b^2 - c^2 = 0 \text{ 或 } a^2 - (c^2 + b^2) = 0,$$

$$\text{所以 } b = c \text{ 或 } a^2 = c^2 + b^2,$$

所以  $\triangle ABC$  为等腰三角形或直角三角形.

故选: D

5. (23-24 高三·安徽芜湖·) 已知  $a, b, c$  分别是  $\triangle ABC$  三个内角  $A, B, C$  的对边, 下列关于  $\triangle ABC$  的形状判断一定正确的为 ( )

A.  $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$ , 则  $\triangle ABC$  为直角三角形

- B.  $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin C$ , 则  $\triangle ABC$  为等腰三角形
- C.  $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$ , 则  $\triangle ABC$  为直角三角形
- D.  $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$ , 则  $\triangle ABC$  为等腰三角形

### 题型三：判断三角形形状：化边为角型

#### 指 | 点 | 迷 | 津

正余弦定理：化边为角型

1. (22-23 高三·上海青浦·阶段练习) 已知  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ , 下列命题中, 真命题的个数是 ( )

- (1) 若  $a^2 \tan B = b^2 \tan A$ , 则  $\triangle ABC$  是等腰三角形;
- (2) 若  $\sin A = \cos B$ , 则  $\triangle ABC$  是直角三角形;
- (3) 若  $\cos A \cos B \cos C < 0$ , 则  $\triangle ABC$  是钝角三角形;
- (4) 若  $\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A) = 1$ , 则  $\triangle ABC$  是等边三角形.

A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

【答案】B

【分析】利用三角形的性质、正弦定理、同角三角函数的基本关系进行计算求解.

【详解】 $\triangle ABC$  中,  $a^2 \tan B = b^2 \tan A$ , 由正弦定理有:

$$\sin^2 A \cdot \frac{\sin B}{\cos B} = \sin^2 B \cdot \frac{\sin A}{\cos A}, \text{ 因为 } \triangle ABC \text{ 中 } \sin A \neq 0, \sin B \neq 0,$$

$$\text{所以 } \frac{\sin A}{\cos B} = \frac{\sin B}{\cos A}, \text{ 即 } \sin A \cos A = \sin B \cos B, \text{ 即 } \sin 2A = \sin 2B,$$

所以  $2A = 2B$  或  $2A + 2B = \pi$ , 故 (1) 错误;

$$\triangle ABC \text{ 中, 因为 } \sin A = \cos B > 0, \text{ 所以 } B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{所以 } A + B = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } A = B + \frac{\pi}{2}, \text{ 故 (2) 错误;}$$

$\triangle ABC$  中,  $\cos A \cos B \cos C < 0$ , 当  $\cos A < 0, \cos B < 0, \cos C < 0$  时,

$$A \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), B \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), C \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \text{ 显然不满足;}$$

当  $\cos A, \cos B, \cos C$  中有 1 为负, 2 个为正, 不妨设  $\cos A < 0, \cos B > 0, \cos C > 0$ ,

则  $A \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 所以  $\triangle ABC$  是钝角三角形; 故 (3) 正确;

$\triangle ABC$  中,  $A, B, C \in (0, \pi)$ , 所以  $A - B \in (-\pi, \pi), B - C \in (-\pi, \pi), C - A \in (-\pi, \pi)$ ,

所以  $\cos(A - B) \in (-1, 1], \cos(B - C) \in (-1, 1], \cos(C - A) \in (-1, 1]$ ,

因为  $\cos(A - B)\cos(B - C)\cos(C - A) = 1$ ,

所以  $\cos(A - B) = \cos(B - C) = \cos(C - A) = 1$ , 所以  $A = B = C$ ,

则  $\triangle ABC$  是等边三角形, 故 (4) 正确; 故 A, C, D 错误.

故选: B.

2. (22-23 高三·福建福州·)  $\triangle ABC$  中三个角的对边分别记为  $a, b, c$ , 其面积记为  $S$ , 有以下命题: ①

$S = \frac{1}{2}a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin A}$ ; ②若  $2\cos B \sin A = \sin C$ , 则  $\triangle ABC$  是等腰直角三角形; ③

$\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A \sin B \cos C$ ; ④  $(a^2 + b^2)\sin(A - B) = (a^2 - b^2)\sin(A + B)$ , 则  $\triangle ABC$  是等腰或直角三角形. 其中正确的命题是

A. ①②③

B. ①②④

C. ②③④

D. ①③④

【答案】D

【解析】根据正弦定理、余弦定理、三角形面积公式、三角函数恒等变换对各个命题进行判断.

【详解】由  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$  得  $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$  代入  $S = \frac{1}{2}ab \sin C$  得  $S = \frac{1}{2}a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin A}$ , ①正确;

若  $2\cos B \sin A = \sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ,  $\therefore \cos B \sin A - \cos A \sin B = 0$ ,  $\sin(A - B) = 0$ ,  $\therefore A, B$  是三角形内角,  $\therefore A - B = 0$ , 即  $A = B$ ,  $\triangle ABC$  为等腰三角形, ②错;

由余弦定理  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ , 又  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ,  $\therefore \sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A \sin B \cos C$ , ③正确;

$(a^2 + b^2)\sin(A - B) = (a^2 - b^2)\sin(A + B)$ ,

则  $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\sin A \cos B + \cos A \sin B}$ ,  $\therefore \frac{a^2}{b^2} = \frac{\sin A \cos B}{\cos A \sin B}$ , 由正弦定理得  $\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = \frac{\sin A \cos B}{\cos A \sin B}$ , 三角形中  $\sin A \neq 0, \sin B \neq 0$ , 则  $\sin A \cos A = \sin B \cos B$ ,  $\sin 2A = \sin 2B$ ,  $\therefore 2A = 2B$  或  $2A + 2B = \pi$ ,  $\therefore A = B$  或  $A + B = \frac{\pi}{2}$ , ④正确.

故选: D.

【点睛】本题考查正弦定理、余弦定理、三角形面积公式, 考查三角形形状的判断, 由正弦定理进行边角转化在其中起到了重要的作用, 解题时注意体会边角转换.

3. (23-24 高三·重庆·)  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对应的边分别是  $a, b, c$ ,  $c = a \cos B + b \cos A$ , 则  $\triangle ABC$  的形状是 ( )

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等腰或直角三角形

【答案】D

【分析】首先利用正弦定理边化角，再利用两角和的正弦公式化简，判断三角形的形状.

【详解】由正弦定理边化角可知， $\sin C = \sin A \cos B + \sin C \cos A$ ，

又  $\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ，

所以  $\cos A \sin B = \sin C \cos A$ ，即  $\cos A(\sin B - \sin C) = 0$ ，

所以  $\cos A = 0$  或  $\sin B = \sin C$ ，则  $A = 90^\circ$  或  $B = C$ ，

所以  $\triangle ABC$  是等腰三角形或直角三角形.

故选：D

4. (23-24 高三·广东广州·) 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对的边为  $a, b, c$  若  $\frac{b^2}{c^2} = \frac{\tan B}{\tan C}$ ，则  $\triangle ABC$  的形状是 ( )

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰三角形或直角三角形

D. 等腰直角三角形

【答案】C

【分析】根据给定条件，利用正弦定理边化角、切化弦，再结合二倍角公式求解即得.

【详解】在  $\triangle ABC$  中，由  $\frac{b^2}{c^2} = \frac{\tan B}{\tan C}$  及正弦定理得  $\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\sin C}{\cos C}}$ ，而  $\sin A > 0, \sin B > 0$ ，

整理得  $\sin B \cos B = \sin C \cos C$ ，即  $\sin 2B = \sin 2C$ ，而  $0 < B < \pi, 0 < C < \pi$ ，

则  $0 < 2B < 2\pi, 0 < 2C < 2\pi$ ，因此  $2B = 2C$  或  $2B + 2C = \pi$ ，即  $B = C$  或  $B + C = \frac{\pi}{2}$ ，

所以  $\triangle ABC$  是等腰三角形或直角三角形.

故选：C

5. (2024·山东·二模) 在  $\triangle ABC$  中，设内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，设甲：  $b - c = a(\cos C - \cos B)$ ，设乙：  $\triangle ABC$  是直角三角形，则 ( )

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

【答案】D

【分析】利用正弦定理定理、和角的正弦公式化简命题甲，再利用充分条件、必要条件的定义判断即得.

【详解】在  $\triangle ABC$  中，由正弦定理及  $b - c = a(\cos C - \cos B)$ ，得  $\sin B - \sin C = \sin A(\cos C - \cos B)$ ，

即  $\sin(A+C) - \sin(A+B) = \sin A(\cos C - \cos B)$ ，整理得  $\cos A \sin C - \cos A \sin B = 0$ ，

由正弦定理得  $c \cos A - b \cos A = 0$ ，则  $\cos A = 0$  或  $b = c$ ，即  $A = \frac{\pi}{2}$  或  $b = c$ ，

因此甲： $A = \frac{\pi}{2}$  或  $b = c$ ，显然甲不能推乙；

乙： $\triangle ABC$  是直角三角形，当角  $B$  或  $C$  是直角时，乙不能推甲，

所以甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件。

故选：D

## 题型四：面积公式的应用

### 指 | 点 | 迷 | 津

三角形面积，不仅仅有常见的“底乘高”，还有以下：

$$\textcircled{1} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{abc}{4R}$$

1. (23-24 高三·重庆·) 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ， $\triangle ABC$  的面积为  $S$ ，

$$S = \left( \frac{1}{2}b^2 - c^2 \right) \sin A, \quad \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C} = \frac{2}{\tan B}, \quad \text{则 } A = ( \quad )$$

A.  $120^\circ$

B.  $135^\circ$

C.  $150^\circ$

D.  $165^\circ$

【答案】A

【分析】由面积公式得到  $b = 2c$ ，再将切化弦，结合两角和的正弦公式、诱导公式得到  $\sin^2 B = 2 \sin A \sin C \cos B$ ，利用正弦定理将角化边得到  $b^2 = 2ac \cos B$ ，由余弦定理得到  $7c^2 = a^2$ ，最后利用余弦定理计算可得。

【详解】因为  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ ，又  $S = \left( \frac{1}{2}b^2 - c^2 \right) \sin A$ ，

所以  $\frac{1}{2}bc \sin A = \left( \frac{1}{2}b^2 - c^2 \right) \sin A$ ，又  $0^\circ < A < 180^\circ$ ，所以  $\sin A > 0$ ，

所以  $bc = b^2 - 2c^2$ ，即  $(b - 2c)(b + c) = 0$ ，显然  $b + c > 0$ ，所以  $b = 2c$ ，

因为  $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C} = \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{\sin C \cos A + \sin A \cos C}{\sin A \sin C} = \frac{\sin(A + C)}{\sin A \sin C} = \frac{\sin B}{\sin A \sin C}$ ， $\frac{2}{\tan B} = \frac{2 \cos B}{\sin B}$ ，

又  $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C} = \frac{2}{\tan B}$ ，所以  $\frac{\sin B}{\sin A \sin C} = \frac{2 \cos B}{\sin B}$ ，

所以  $\sin^2 B = 2 \sin A \sin C \cos B$ ，由正弦定理可得  $b^2 = 2ac \cos B$ ，

又由余弦定理  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ，即  $b^2 = a^2 + c^2 - b^2$ ，

所以  $4c^2 = a^2 + c^2 - 4c^2$ ，则  $7c^2 = a^2$ ，

由余弦定理  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4c^2 + c^2 - 7c^2}{4c^2} = -\frac{1}{2}$ ，

又  $0^\circ < A < 180^\circ$ ，所以  $A = 120^\circ$ 。

故选：A

【点睛】关键点点睛：本题解答的关键是推导出  $b = 2c$ 、 $7c^2 = a^2$ ，再由余弦定理计算可得。

2. (2023·江西景德镇·模拟预测) 已知  $\triangle ABC$  中，设角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  所对的边分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ， $\triangle ABC$  的面积为  $S$ ，若  $3\sin^2 B + 2\sin^2 C = \sin A(\sin A + 2\sin B \sin C)$ ，则  $\frac{S}{b^2}$  的值为 ( )

A.  $\frac{1}{4}$

B.  $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

【答案】B

【分析】首先根据正弦定理将等式中的角转化成边得：  $3b^2 + 2c^2 = a^2 + 2bc \sin A$ ，通过余弦定理可将等式化简整理为  $\frac{b}{c} + \frac{c}{2b} = \sin A - \cos A = \sqrt{2} \sin\left(A - \frac{\pi}{4}\right)$ ，通过三角函数图像可知  $\frac{b}{c} + \frac{c}{2b} \leq \sqrt{2}$ ，同时通过基本不等式可知  $\frac{b}{c} + \frac{c}{2b} \geq \sqrt{2}$ ，即得  $\frac{b}{c} + \frac{c}{2b} = \sqrt{2}$ ，通过取等条件可知  $A = \frac{3\pi}{4}$ ， $c = \sqrt{2}b$ ，将其代入问题中即可求解答案。

【详解】已知  $3\sin^2 B + 2\sin^2 C = \sin^2 A + \sin A \cdot (2\sin B \sin C)$

由正弦定理可知：  $3b^2 + 2c^2 = a^2 + 2bc \sin A$ ，

$\therefore 3b^2 + 2c^2 - a^2 = 2bc \sin A$ ，

整理得：  $(b^2 + c^2 - a^2) + 2b^2 + c^2 = 2bc \sin A$ ，

两边同除  $2bc$  得：  $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{2b^2 + c^2}{2bc} = \sin A$ ，

根据余弦定理得：  $\cos A + \frac{b}{c} + \frac{c}{2b} = \sin A$ ，即  $\frac{b}{c} + \frac{c}{2b} = \sin A - \cos A = \sqrt{2} \sin\left(A - \frac{\pi}{4}\right)$ ，

$\because b > 0, c > 0, \therefore \frac{b}{c} + \frac{c}{2b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{2b}} = \sqrt{2}$ ，当且仅当  $\frac{b}{c} = \frac{c}{2b}$ ，即  $c = \sqrt{2}b$  时等号成立。

又  $\because \frac{b}{c} + \frac{c}{2b} = \sin A - \cos A = \sqrt{2} \sin\left(A - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$ ，当且仅当  $A = \frac{3\pi}{4}$  时，等号成立。

综上所述：  $\frac{b}{c} + \frac{c}{2b} \geq \sqrt{2}$  且  $\frac{b}{c} + \frac{c}{2b} \leq \sqrt{2}$ ，

故得：  $\frac{b}{c} + \frac{c}{2b} = \sqrt{2}$ ，此时  $c = \sqrt{2}b$  且  $A = \frac{3\pi}{4}$ ，

$\therefore S = \frac{1}{2}bc \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}bc$ ， $\therefore \frac{S}{b^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{bc}{b^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2}$ 。

故选：B

3. (2023·海南·二模) 在锐角三角形 ABC 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c, 已知  $a = \sqrt{3}$ ,  $(b^2 + c^2 - 3)\tan A = \sqrt{3}bc$ ,  $2\cos^2 \frac{A+B}{2} = (\sqrt{2}-1)\cos C$ , 则  $\triangle ABC$  的面积

A.  $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$       B.  $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$       C.  $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$       D.  $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$

【答案】D

【解析】本题利用余弦定理, 倍角公式, 内角和定理进行化简, 可求得角 A 和 C 的值, 再利用正弦定理和面积公式求得结果即可.

【详解】由题,  $a = \sqrt{3}$ ,  $(b^2 + c^2 - 3)\tan A = \sqrt{3}bc$

$$\text{所以 } \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \tan A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos A$$

$$\text{所以 } \tan A \cdot \cos A = \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

又因为锐角三角形 ABC, 所以  $A = \frac{\pi}{3}$

$$\text{由题 } 2\cos^2 \frac{A+B}{2} = (\sqrt{2}-1)\cos C, \text{ 即 } 1 + \cos(A+B) = (\sqrt{2}-1)\cos C$$

$$\text{根据 } \cos(A+B) = -\cos C \text{ 代入可得, } \cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 即 } C = \frac{\pi}{4}$$

$$B = \pi - A - C = \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{再根据正弦定理: } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \therefore c = \sqrt{2}$$

$$\text{面积 } S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$$

故选 D

【点睛】本题考查了正余弦定理解三角形的综合, 以及三角恒等变化公式的运用, 熟悉公式, 灵活运用是解题的关键, 属于中档偏上题.

4. (21-22 高三上·江西宜春·) 在  $\triangle ABC$  中, 角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c, 已知  $b = 2$ ,  $A = \frac{\pi}{3}$ , 且

$$\frac{c}{1-\cos C} = \frac{b}{\cos A}, \text{ 则 } \triangle ABC \text{ 的面积为}$$

A.  $\sqrt{3}$       B.  $2\sqrt{3}$       C.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  或  $\sqrt{3}$       D.  $\sqrt{3}$  或  $2\sqrt{3}$

【答案】D

【详解】依题意,  $b(1-\cos C) = c \cos A$ ,  $b = c \cos A + b \cos C$ , 由正弦定理得

$$\sin B = \sin C \cos A + \sin B \cos C = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C, \text{ 化简得 } \sin B \cos C = \sin A \cos C, \text{ 故 } \cos C = 0 \text{ 或}$$

$\sin B = \sin A$ . 当  $\cos C = 0, C = \frac{\pi}{2}$  时,  $a = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3}$ , 面积  $S = \frac{1}{2}ab = 2\sqrt{3}$ . 当  $\sin B = \sin A$  时, 为等边三角形, 面积为  $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = \sqrt{3}$ , 故选 D.

点睛: 本题主要考查三角函数恒等变换的应用, 考查了解三角形正弦定理, 考查了三角形面积公式在解三角形中的综合应用, 还需要结合分类讨论的数学思想方法来求解. 首先利用正弦定理和三角形内角和公式化简已知条件, 由于解有两个, 所以需要对三角形的情况进行分类讨论.

5. (23-24 高三·广西百色)  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $b \sin C + c \sin B = 4a \sin B \sin C$ ,  $b^2 + c^2 - a^2 = 8$ , 则  $\triangle ABC$  的面积为 ( )

- A.  $\frac{2}{3}$       B.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$       C.  $\frac{8}{3}$       D.  $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

【答案】B

【分析】由给定条件, 利用正弦定理边化角求出  $\sin A$ , 再利用余弦定理求出  $bc$  即可求出三角形面积.

【详解】在  $\triangle ABC$  中, 由  $b \sin C + c \sin B = 4a \sin B \sin C$  及正弦定理, 得  $2 \sin B \sin C = 4 \sin A \sin B \sin C$ ,

而  $\sin B \sin C > 0$ , 则  $\sin A = \frac{1}{2}$ , 由  $b^2 + c^2 - a^2 = 8$  及余弦定理得  $2bc \cos A = 8$ ,  $\cos A > 0$ ,

因此  $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $bc = \frac{8}{\sqrt{3}}$ , 则  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{4} \times \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,

所以  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ . 故选: B

## 题型五: 求边长或者周长

### 指 | 点 | 迷 | 津

解三角形, 主要考查正弦定理、余弦定理, 还考查三角形面积公式, 两角差的正弦公式, 同角间的三角函数关系, 正切函数性质等等. 注意正弦定理在进行边角转换时等式必须是齐次, 关于边  $a, b, c$  的齐次式或关于角的正弦  $\sin A, \sin B, \sin C$  的齐次式, 齐次分式也可以用正弦定理进行边角转换. 求范围问题, 通

1. (23-24 高三·湖北黄冈) 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $2b \sin A = 3\sqrt{3}$ ,  $a = 3$ ,  $\angle B$  为钝角,  $b - c = 2$ , 则  $b =$  ( )

- A. 5      B. 6      C. 7      D. 8

【答案】C

【分析】利用正弦定理可得  $B = \frac{2\pi}{3}$ ，再结合余弦定理运算求解.

【详解】由正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$  可得  $b \sin A = a \sin B = 3 \sin B$ ,

且  $2b \sin A = 3\sqrt{3}$ ，即  $6 \sin B = 3\sqrt{3}$ ，则  $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

且  $\angle B$  为钝角，则  $B = \frac{2\pi}{3}$ ，

又因为  $b - c = 2$ ，即  $c = b - 2$ ，

由余弦定理可得  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ，

即  $b^2 = 9 + (b - 2)^2 - 2 \times 3(b - 2) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$ ，解得  $b = 7$ .

故选：C.

2. (23-24 高三·江苏淮安·) 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ，若  $A = 60^\circ$ ， $a = \sqrt{6}$ ， $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$ ，则  $c =$  ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 4                      D. 6

【答案】B

【分析】由余弦定理求出  $\cos C$ ，得  $\sin C$ ，由正弦定理即可求解.

【详解】由题意，得  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{2}ab}{2ab} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

又  $C$  为  $\triangle ABC$  的内角  $C \in (0, \pi)$ ，因为  $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$

则  $\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

由正弦定理，得  $c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$ .

故选：B.

3. (23-24 高三·山西长治·) 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对应的边分别为  $a, b, c$ ， $a = 2c = 2$ ， $\tan \frac{A+B}{2} + \tan \frac{C}{2} = 4$ ，则  $b =$  ( )

- A.  $\sqrt{2}$                       B.  $\sqrt{3}$                       C. 2                      D.  $\sqrt{5}$

【答案】B

【分析】先根据  $\tan \frac{A+B}{2} + \tan \frac{C}{2} = 4$  求出  $C$ ，然后利用余弦定理求出  $b$ .

【详解】由  $\tan \frac{A+B}{2} + \tan \frac{C}{2} = 4$  得  $\tan \frac{\pi-C}{2} + \tan \frac{C}{2} = 4$ ,

$$\therefore \tan \frac{\pi-C}{2} + \tan \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{\pi-C}{2}}{\cos \frac{\pi-C}{2}} + \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}} + \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = 4,$$

$$\therefore \frac{1}{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} = 4, \therefore \sin C = \frac{1}{2}, \text{ 又 } a = 2c = 2, \text{ 所以 } a = 2 > c = 1, \text{ 所以 } C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore C = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4 + b^2 - 1}{4b}, \text{ 解得 } b = \sqrt{3}, \text{ 故选: B.}$$

4. (23-24 高三·四川成都) 在  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别为内角  $A, B, C$  的对边, 若

$$3\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B + 2\sin A \sin B, \cos C = \frac{3}{5}, \text{ 且 } S_{\triangle ABC} = 4, \text{ 则 } c = ( \quad )$$

A.  $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

B. 4

C.  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

D. 5

【答案】B

【分析】根据正弦定理角化边, 由三角形面积公式求  $ab$ , 再结合余弦定理, 即可求解  $c$ .

【详解】由正弦定理角化边, 可知,  $3c^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ , 且  $\cos C = \frac{3}{5}$

$$\text{则 } \sin C = \frac{4}{5}, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{2}{5} ab = 4, \text{ 则 } ab = 10,$$

$$\text{则 } 3c^2 = a^2 + b^2 + 20, \text{ ①}$$

$$\text{由余弦定理 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 - 12, \text{ ②}$$

$$\text{由①②得, } c^2 = 16, \text{ 即 } c = 4.$$

故选: B

5. (23-24 高三·江苏南京) 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  对边分别为  $a, b, c$ . 若  $2b \cos C = 2a - c$ ,  $A = \frac{\pi}{4}$ ,  $b = 3$ , 则实数  $a$  的值为 ( )

A. 6

B. 3

C.  $\sqrt{6}$

D.  $\sqrt{3}$

【答案】C

【分析】由正弦定理和题设条件, 化简得  $2\cos B \sin C - \sin C = 0$ , 进而求得  $B$ , 利用正弦定理求得  $a$ .

【详解】因为  $2b \cos C = 2a - c$ , 由正弦定理得  $2\sin B \cos C = 2\sin A - \sin C$ ,

$$\therefore 2\sin B \cos C = 2\sin(B+C) - \sin C, \text{ 化简得 } 2\cos B \sin C - \sin C = 0,$$

因为  $0 < C < \pi$ , 所以  $\sin C \neq 0$ ,

$$\text{可得 } \cos B = \frac{1}{2}, \text{ 又 } 0 < B < \pi, \text{ 所以 } B = \frac{\pi}{3},$$

由正弦定理得,  $a = \frac{b}{\sin B} \times \sin A = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$ .

故选: C.

## 题型六: 解三角形求角度

### 指 | 点 | 迷 | 津

求三角形角度, 要涉及到角的锐钝的判断, 可以通过余弦值的正负判断。如果不能直接判断, 那么借助其他角来判断。如涉及到锐角三角形, 则三个角都要转化判断锐钝。

1. (23-24 高三下·江苏南京) 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $a, b, c$  分别为角  $A, B, C$  的对边. 若  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3 \cos C$ , 且

$\cos(A-B) = -\frac{\sqrt{3}}{6}$ , 则  $\cos C =$  ( )

A.  $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$

B.  $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  或  $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$

【答案】C

【分析】先利用余弦定理化角为边, 可得  $3c^2 = a^2 + b^2$ , 再利用正弦定理化边为角可得, 再结合二倍角公式及两角和差得余弦公式化简, 结合平方关系即可得解, 注意检验结果是否符合题意。

【详解】因为  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3 \cos C$ ,

由余弦定理得  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3 \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ , 整理得  $3c^2 = a^2 + b^2$ ,

由正弦定理得  $3 \sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2}$

$= 1 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) = 1 - \frac{1}{2}[\cos(A+B+A-B) + \cos(A+B-A+B)]$

$= 1 - \cos(A+B) \cos(A-B) = 1 + \cos C \cos(A-B),$

又因  $\cos(A-B) = -\frac{\sqrt{3}}{6}$ ,

所以  $3 \sin^2 C = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6} \cos C = 3 - 3 \cos^2 C,$

解得  $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$  或  $\cos C = -\frac{4\sqrt{3}}{9}$ ,

而  $\cos C + \cos(A-B) = -\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \sin A \sin B > 0,$

且  $\cos(A-B) = -\frac{\sqrt{3}}{6}$ ,

所以  $\cos C > \frac{\sqrt{3}}{6}$ , 所以  $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

故选: C.

2. (23-24 高三·青海西宁) 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ , 若

$$\frac{a \sin A + b \sin B - c \sin C}{a \sin B} = 2 \sin C, \text{ 则 } C \text{ 的大小为 ( )}$$

A.  $\frac{\pi}{6}$

B.  $\frac{\pi}{4}$

C.  $\frac{\pi}{2}$

D.  $\frac{2\pi}{3}$

【答案】B

【分析】根据正弦定理边角互化, 得到  $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} = 2 \sin C$ , 再根据余弦定理代入化简, 即可得角  $C$ .

【详解】已知  $\frac{a \sin A + b \sin B - c \sin C}{a \sin B} = 2 \sin C$ ,

则由正弦定理得  $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} = 2 \sin C$ ,

由余弦定理可得  $a^2 + b^2 - c^2 = 2bc \cos A$ , 代入上式可得

$$\frac{2ab \cos C}{ab} = 2 \sin C, \text{ 即 } \cos C = \sin C, \text{ 则 } \tan C = 1,$$

因为  $0 < C < \pi$ , 所以  $C = \frac{\pi}{4}$ .

故选: B.

3. (23-24 高三·安徽蚌埠) 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\cos B + \cos C = 2 \sin A \sin B$ ,  $a = \sqrt{3}b$ , 则  $C =$  ( )

A.  $\frac{\pi}{6}$

B.  $\frac{\pi}{4}$

C.  $\frac{\pi}{3}$

D.  $\frac{\pi}{2}$

【答案】D

【分析】利用两角和与差的余弦展开式化简可得  $2B = A$ , 由正弦定理得  $\sin A = \sqrt{3} \sin B$ , 再利用正弦的二倍角公式可得答案.

【详解】因为  $\cos B + \cos C = \cos B - \cos(A+B)$

$$= \cos B - \cos A \cos B + \sin A \sin B = 2 \sin A \sin B,$$

$$\text{所以 } \cos B = \cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos(A-B),$$

因为  $0 < A, B < \pi$ , 所以  $B = A - B$ , 或  $B = -A + B$  舍去, 可得  $2B = A$ ,

因为  $a = \sqrt{3}b$ , 由正弦定理得  $\sin A = \sqrt{3} \sin B$ ,

所以  $\sin 2B = \sqrt{3} \sin B = 2 \sin B \cos B$ ,

因为  $0 < B < \pi$ , 所以  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos B$ , 可得  $B = \frac{\pi}{6}$ ,

$A = 2B = \frac{\pi}{3}$ , 所以  $C = \frac{\pi}{2}$ .

故选: D.

4. (2024·江西宜春·模拟预测) 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 若  $(a^2 + c^2 - b^2) \tan B = \sqrt{3}ac$ , 则  $\cos 5B =$  ( )

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       D.  $\pm \frac{1}{2}$

【答案】D

【分析】由余弦定理化简条件得  $2ac \cdot \cos B \cdot \tan B = \sqrt{3}ac$ , 再根据同角三角函数的基本关系得  $\sin B$ , 从而求得角  $B$  的值, 利用诱导公式即可求解.

【详解】由  $(a^2 + c^2 - b^2) \tan B = \sqrt{3}ac$ ,  $\therefore 2ac \cdot \cos B \cdot \tan B = \sqrt{3}ac$ ,

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\because B \in (0, \pi), \therefore B = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore \text{可得 } \cos 5B = \cos \frac{5\pi}{3} = \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \text{ 或 } \cos \frac{10\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

故选: D.

5. (24-25 高三·江苏·假期作业) 记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 若  $a^2 \tan B = b^2 \tan A$ ,  $(a+c)(a-c) = b(b-\sqrt{3}c)$ , 则  $B =$  ( )

- A.  $\frac{\pi}{6}$  或  $\frac{\pi}{2}$       B.  $\frac{\pi}{6}$       C.  $\frac{\pi}{2}$  或  $\frac{2\pi}{3}$       D.  $\frac{\pi}{6}$  或  $\frac{\pi}{3}$

【答案】D

【分析】根据正弦定理和余弦定理计算求解即可得.

【详解】在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,

$$\therefore A, B \in (0, \pi), \sin A \neq 0, \sin B \neq 0,$$

$$\therefore a^2 \tan B = b^2 \tan A, \text{ 可得 } \sin^2 A \cdot \frac{\sin B}{\cos B} = \sin^2 B \cdot \frac{\sin A}{\cos A},$$

$$\text{可得 } \sin A \cos A = \sin B \cos B, \text{ 可得 } \sin 2A = \sin 2B, \text{ 故 } 2A = 2B, \text{ 或 } 2A + 2B = \pi, \text{ 即 } A = B \text{ 或 } A + B = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{又 } (a+c)(a-c) = b(b-\sqrt{3}c), \text{ 可得 } a^2 - c^2 = b^2 - \sqrt{3}bc,$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/867124165162006153>