专题 04 三角形中的倒角模型之高分线模型、双（三）垂直模型

近年来各地考试中常出现一些几何倒角模型，该模型主要涉及高线、角平分线及角度的计算（内角和定理、外角定理等）。熟悉这些模型可以快速得到角的关系，求出所需的角。本专题高分线模型、双垂直模型进行梳理及对应试题分析，方便掌握。

大家在掌握几何模型时，多数同学会注重模型结论，而忽视几何模型的证明思路及方法，导致本末倒置。要知道数学题目的考察不是一成不变的，学数学更不能死记硬背，要在理解的基础之上再记忆，这样才能做到对于所学知识的灵活运用，并且更多时候能够启发我们解决问题的关键就是基于已有知识、方法的思路的适当延伸、拓展，所以学生在学习几何模型要能够做到的就是：①认识几何模型并能够从题目中提炼识别几何模型；②记住结论，但更为关键的是记住证明思路及方法；③ 明白模型中常见的易错点，因为多数题目考察的方面均源自于易错点。当然，以上三点均属于基础要求，因为题目的多变性，若想在几何学习中突出，还需做到的是，在平时的学习过程中通过大题量的训练，深刻认识几何模型，认真理解每一个题型，做到活学活用！

目录导航

例题讲模型

模型 1.高分线模型

模型解读

三角形的高：-从三角形的一个顶点向它所对的边所在直线画垂线，顶点和垂足之间的线段叫做三角形的高.

三角形的角平分线：在三角形中，一个内角的角平分线与它所对的边相交，这个角的顶点与交点之间的线段叫做三角形的角平分线.

高分线模型：过三角形一个顶点的高与角平分线的夹角等于另外两个角差的绝对值的一半。

模型证明

1）条件：如图 1，在$\triangle ABC$中，AD，AE分别是$\triangle ABC$的高和角平分线，**结论**：$\angle DAE=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$.

2）条件：如图 2，F为$\triangle ABC$的角平分线AE的延长线上的一点，$FD\perp BC$于D，**结论**：

$\angle DFA=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$.

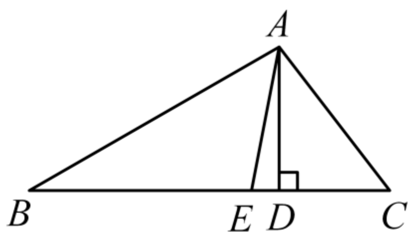


图 1

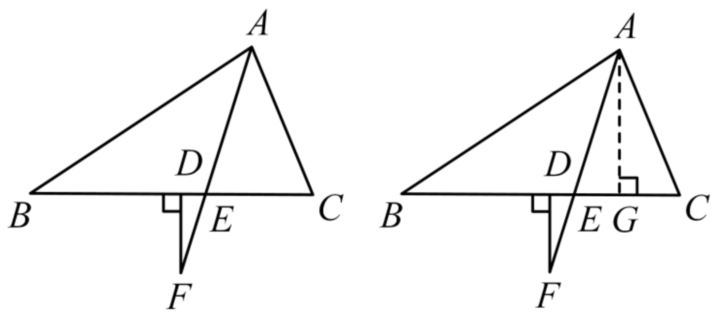


图 2

1）证明：∵ AE平分$\angle BAC$，∴ $\angle EAC=\frac{1}{2}\angle BAC$，

∵ $\angle BAC=180°-\angle B-\angle C$，∴ $\angle EAC=\frac{1}{2}(180°-\angle B-\angle C)=90°-\frac{1}{2}\angle B-\frac{1}{2}\angle C$，

∴ $\angle EAD=\angle EAC-\angle DAC=90°-\frac{1}{2}\angle B-\frac{1}{2}\angle C-(90°-\angle C)=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$；

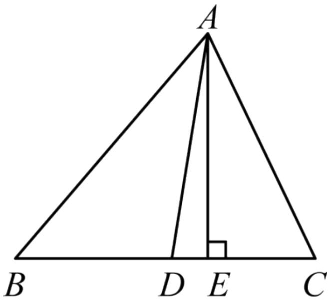
2）证明：如图，过 A 作$AG\perp BC$于G，由（2）可知：$\angle EAG=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$，

∵ $AG\perp BC$，$\angle AGB=90°$，∵ $FD\perp BC$，$\therefore\angle FDC=90°$，$\therefore\angle AGD=\angle FDC$，$\therefore FD\parallel AG$，

$\therefore\angle AFD=\angle EAG$，$\therefore\angle AFD=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$.

模型运用

例 1.（23-24 八年级上·山东临沂·阶段练习）如图，AD，AE 分别是$\triangle ABC$ 的角平分线和高线，且 $\angle B=50°$，$\angle C=70°$，则 $\angle EAD=$____.



【答案】$10°$

【分析】本题考查了三角形的内角和定理，三角形的角平分线、高线的定义，是基础题，准确识图找出各角度之间的关系是解题的关键．根据三角形的内角和等于$180°$求出$\angle BAC$，再根据角平分线的定义求出$\angle BAD$，根据直角三角形两锐角互余求出$\angle BAE$，然后根据$\angle EAD=\angle BAE-\angle BAD$代入数据进行计算即可得解．

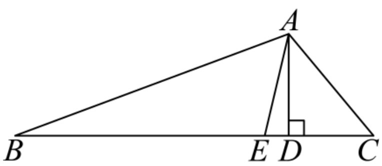
【详解】解：$\because \angle B=50°$，$\angle C=70°$，$\therefore \angle BAC=180°-\angle B-\angle C=180°-50°-70°=60°$，

$\because AD$ 是ΔABC的角平分线，$\therefore \angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times 60°=30°$，

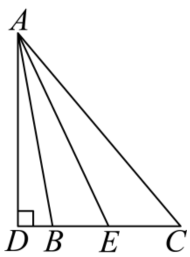
$\because AE$ 是$\triangle ABC$ 的高线，$\therefore \angle BAE=90°-\angle B=90°-50°=40°$，

$\therefore \angle EAD=\angle BAE-\angle BAD=40°-30°=10°$．故答案为：$10°$．

例 2.（23-24 八年级上·重庆·期中）已知：如图①所示，在$\triangle ABC$ 中，AD 为BC 的高，AE 为$\angle BAC$ 平分线交 BC 于点 E，$\angle B=20°,\angle C=50°$．



图①



图②

(1)求$\angle EAD$ 的度数；(2)$\angle EAD$ 与$\angle B,\angle C$ 之间有何数量关系？

(3)若将题中的条件“$\angle B=20°$”改为“$\angle ABC=100°$”（如图②），其他条件不变，则$\angle EAD$ 与$\angle ABC,\angle C$ 之间又有何数量关系？请说明理由．

【答案】(1)$15°$ (2) $\angle EAD=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$ (3) $\angle EAD=\frac{1}{2}(\angle ABC-\angle C)$，理由见解析

【分析】本题主要考查三角形中角与角之间的关系，掌握三角形内角和定理、角平分线的性质、三角形外角的性质的应用.（1）首先根据三角形的内角和定理求得$\angle BAC$，再根据角平分线的定义求得$\angle BAE$，再根据三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角和求得$\angle AED$，最后根据直角三角形的两个锐角互余即可求解，（2）根据（1）即可得出$\angle EAD$与$\angle B$、$\angle C$之间的关系，

（3）根据三角形内角和定理、角平分线的性质、三角形外角的性质依次推理即可得出结论.

【详解】（1）解：∵$\angle B=20°$，$\angle C=50°$，∴$\angle BAC=180°-\angle B-\angle C=110°$

又∵AE为$\angle BAC$的平分线，∴$\angle EAC=\frac{1}{2}\angle BAC=55°$

∵AD为BC的高，∴$\angle ADC=90°$，$\angle DAC=90°-\angle C=40°$，∴$\angle EAD=\angle EAC-\angle DAC=15°$；

（2)解：由图知$\angle DAE=\angle BAE-\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC-\angle CAD=\frac{1}{2}(180°-\angle B-\angle C)-(90°-\angle C)=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$；

（3）解：$\angle EAD=\frac{1}{2}(\angle ABC-\angle C)$　理由如下：由三角形内角和知$\angle BAC=180°-\angle ABC-\angle C$，

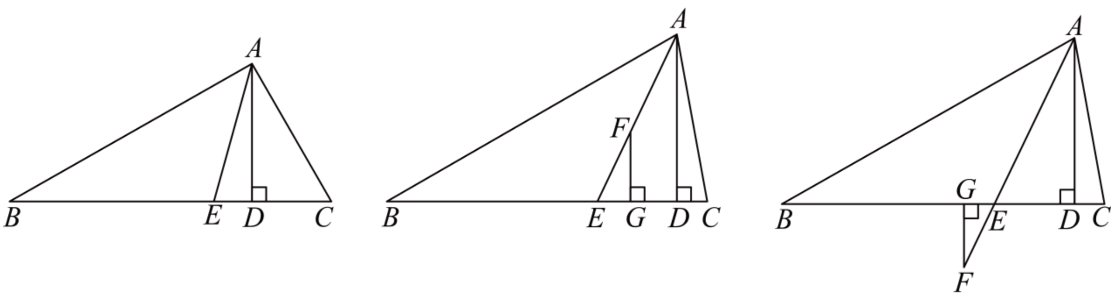
∵AE为$\angle BAC$的平分线，∴$\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}(180°-\angle ABC-\angle C)$

∵AD为BC的高，∴$\angle ADC=90°=\angle DAB+\angle ABD$

又∵$\angle ABD=180°-\angle ABC$，∴$\angle DAB=90°-(180°-\angle ABC)=\angle ABC-90°$

∴$\angle EAD=\angle DAB+\angle BAE=\angle ABC-90°+\frac{1}{2}(180°-\angle ABC-\angle C)=\frac{1}{2}(\angle ABC-\angle C)$.

例 3.（23-24 八年级上·广东·校考期中）已知：在$\vee ABC$中，$\angle C>\angle B$，AE平分$\angle BAC$交BC于点E.



①　②　③

(1)如图①，$AD\perp BC$于点D，若$\angle C=60°,\angle B=30°$，求$\angle DAE$的度数；

(2)如图①，$AD\perp BC$于点D，若$\angle B=\alpha,\angle C=\beta$，求$\angle DAE$的度数（用含$\alpha,\beta$的式子表示）；

(3)如图②，在$\vee ABC$中，$AD\perp BC$于点D，F是AE上的任意一点（不与点A，E重合），过点F作$FG\perp BC$于点G，且$\angle B=30°,\angle C=80°$，请你运用（2）中的结论求出$\angle EFG$的度数；

(4)在（3）的条件下，若点F在AE的延长线上（如图③），其他条件不变，则$\angle EFG$的度数会发生改变吗？说明理由．

【答案】(1) $\angle DAE=15°$ (2) $\angle DAE=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ (3) $\angle EFG=25°$ (4) $\angle EFG$的度数不会发生改变，理由见解析

【分析】（1）首先根据三角形内角和定理可得$\angle BAC=180°-\angle B-\angle C$，再结合角平分线的定义可知$\angle BAE=\angle CAE=\frac{1}{2}\angle BAC=90°-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$，然后由"直角三角形两锐角互余"可得$\angle DAC=90°-\angle C$，进而可得$\angle DAE=\angle CAE-\angle DAC=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$，即可获得答案；（2）结合（1）可得结论；

（3）结合$\angle DAE=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$，易得$\angle DAE=25°$，再证明$FG\parallel AD$，由"两直线平行，同位角相等"可得$\angle EFG=\angle EAD$，即可获得答案；

（4）证明$FG\parallel AD$，由"两直线平行，内错角相等"可得$\angle EFG=\angle EAD$，即可获得答案．

【详解】（1）解：∵在$\triangle ABC$中，$\angle B+\angle C+\angle BAC=180°$，∴$\angle BAC=180°-\angle B-\angle C$，

∵AE平分$\angle BAC$，∴$\angle BAE=\angle CAE=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}(180°-\angle B-\angle C)=90°-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$，

∵$AD\perp BC$，∴$\angle ADC=90°$，∴$\angle DAC=90°-\angle C$，

∴$\angle DAE=\angle CAE-\angle DAC=90°-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)-(90°-\angle C)=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$，

当$\angle C=60°,\angle B=30°$时，$\angle DAE=(60°-30°)=15°$；

（2）由（1）可知，$\angle DAE=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$，∴当$\angle B=\alpha,\angle C=\beta$时，∴$\angle DAE=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$；

（3）∵$\angle DAE=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$，而$\angle B=30°,\angle C=80°$，∴$\angle DAE=\frac{1}{2}\times(80°-30°)=25°$，

∵$AD\perp BC$，$FG\perp BC$，∴$FG\parallel AD$，∴$\angle EFG=\angle EAD=25°$；

（4）$\angle EFG$的度数大小不发生改变．理由如下：

∵$AD\perp BC$，$FG\perp BC$，∴$FG\parallel AD$，∴$\angle EFG=\angle EAD=25°$．

【点睛】本题主要考查了三角形内角和定理、直角三角形两锐角互余、平行线的性质、角平分线的定义、垂直的定义等知识，熟练掌握相关知识并灵活运用是解题关键．

模型 2.双垂直模型

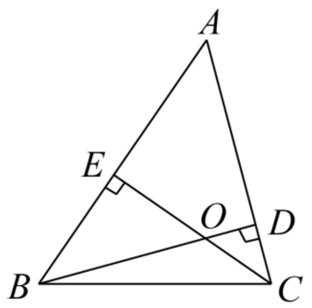
模型解读

双垂直模型的定义是一个三角形中有两条高，则图中会产生多个直角三角形。双垂直模型的核心是倒角之间的关系。

模型证明

条件：如图所示，在△ABC 中，BD，CE 是两条高，

结论：①$\angle ABD=\angle ACE$ ；②$\angle A=\angle BOE=\angle COD$；③ $AB\cdot CE=AC\cdot BD$ 。



证明：∵BD，CE 是两条高，∴$\angle AEC=\angle BEC=\angle ADB=\angle CDB=90°$，

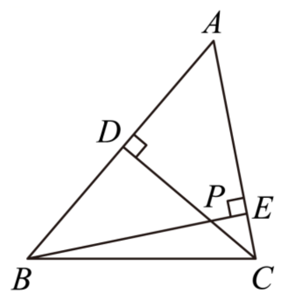
∴$\angle ABD+\angle A=90°$，$\angle ACE+\angle A=90°$，$\angle ACE+\angle DOC=90°$，∴$\angle ABD=\angle ACE$，$\angle DOC=\angle A$，

∵$\angle DOC=\angle BOE$，∴$\angle A=\angle BOE=\angle COD$。

∵BD，CE 是△ABC 的两条高，∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CE=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD$，∴ $AB\cdot CE=AC\cdot BD$。

模型运用

例 1．（2023·陕西咸阳·统考一模）如图，在$\triangle ABC$ 中，CD,BE 分别是 AB,AC 边上的高，并且CD,BE 交于点 P，若$\angle A=50°$，则$\angle BPC$ 的度数为（　　）



A．130°　　　　B．120°　　　　C．110°　　　　D．100°

【答案】A

【分析】根据题意和直角三角形的两个锐角互余可求得$\angle ABE$ 的度数，再根据三角形的外角即可得．

【详解】解：∵ BE 是 AC 边上的高，∴$\angle BEA=90°$，∵$\angle A=50°$，∴$\angle ABE=90°-\angle A=90°-50°=40°$，

∵ CD 是 AB 边上的高，∴ $\angle CDB = 90°$，∴ $\angle BPC = \angle CDB + \angle ABE = 90° + 40° = 130°$，故选：A．

【点睛】本题考查了余角，三角形的外角，解题的关键是掌握这些知识点．

例 2．（23-24 八年级上·湖北武汉·阶段练习）在$\triangle ABC$中，$\angle A = 55°$，BD, CE是它的两条高，直线BD, CE交于点 F，$\angle DFE =$________．

【答案】$55°$或$125°$

【分析】分两种情况：当$\triangle ABC$为锐角三角形时，当$\triangle ABC$为钝角三角形时，用三角形内角和求解即可．

【详解】解：当$\triangle ABC$为锐角三角形时，如图，

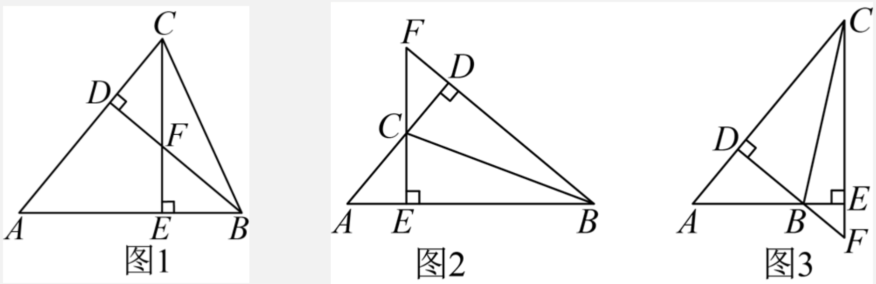


图1 图2 图3

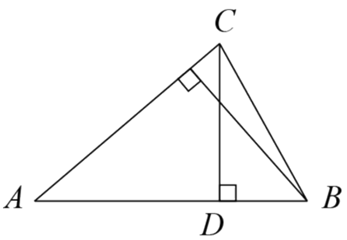
∵ $\angle A = 55°$，BD, CE是它的两条高，∴ $\angle DFE = 125°$；

当$\triangle ABC$为钝角三角形时，如图，∵ $\angle A = 55°$，BD是它的高，∴ $\angle ABD = \angle EBF = 35°$，

∵ CE是$\triangle ABC$的高，∴ $\angle DFE = 55°$，综上所述：$\angle DFE = 125°$或$\angle DFE = 55°$，故答案为：$55°$或$125°$．

【点睛】本题主要考查了垂直的定义、四边形的内角和，熟练掌握四边形的内角和为 360 度及分类讨论是解题的关键．

例 3．（2022 秋·安徽宿州·八年级校考期中）如图，在$\triangle ABC$中，CD和BE分别是AB，AC边上的高，若$CD = 12$，$BE = 16$，则$\dfrac{AC}{AB}$的值为（　　）．



A．$\dfrac{3}{5}$　　B．$\dfrac{3}{4}$　　C．$\dfrac{4}{3}$　　D．$\dfrac{5}{8}$

【答案】B

【分析】根据三角形的高的性质，利用等积法求解即可．

【详解】∵ $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot CD = \dfrac{1}{2}AC \cdot BE$，∴ $12AB = 16AC$，∴ $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$．故选 B．

【点睛】本题考查与三角形的高有关的计算问题．根据三角形的面积公式得出 $AB \cdot CD = AC \cdot BE$

是解题关键.

模型3.子母型双垂直模型（射影模型）

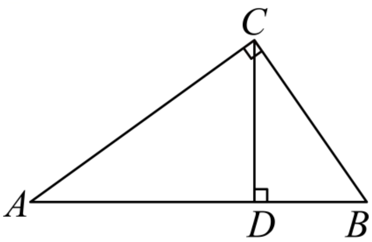
模型解读

子母型双垂直模型的定义是一个直角三角形和斜边上的高。子母型双垂直模型的核心还是倒角之间的关系。

模型证明

条件：在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB$=90°，CD 是$\triangle ABC$的高线，

结论：①$\angle B$=$\angle ACD$；②$\angle A$=$\angle BCD$；③ $AC\cdot BC=CD\cdot AB$。



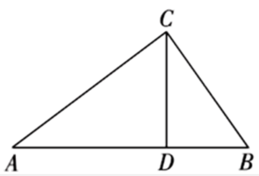
证明：$\because \angle ACB$=90°，CD 是高线，$\therefore \angle ACB$=$\angle CDA$=$\angle CDB$=90°，

$\therefore \angle ACD+\angle A$=90°，$\angle ACD+\angle BCD$=90°，$\angle B+\angle BCD$=90°，$\therefore \angle A$=$\angle BCD$，$\angle B$=$\angle ACD$，

$\because \angle ACB$=90°，CD 是高线，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CD=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC$，$\therefore$ $AC\cdot BC=CD\cdot AB$。

模型运用

例1．（2023·广东广州·七年级校考阶段练习）如图，在$\triangle ACB$中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$于D，求证：$\angle B=\angle ACD$．



【答案】见解析

【分析】根据$CD\perp AB$可得$\angle ACB=\angle CDB=90°$，再根据$\angle B+\angle BCD=\angle BCD+\angle ACD=90°$，即可求证.

【详解】证：$\because CD\perp AB$，$\angle ACB=90°$ $\therefore \angle ACB=\angle CDB=90°$

又$\because \angle B+\angle CDB+\angle BCD=180°$，$\therefore \angle B+\angle BCD=90°$

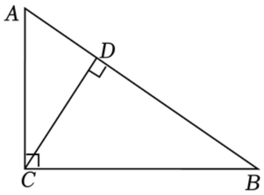
又$\because \angle ACB=\angle BCD+\angle ACD=90°$，$\therefore \angle B+\angle BCD=\angle BCD+\angle ACD=90°$ $\therefore \angle B=\angle ACD$

【点睛】此题考查了三角形内角和性质的应用，解题的关键是熟练掌握三角形内角和的性质.

例2．（2024八年级上·江苏·专题练习）如图，在$\text{Rt}\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°, AC=6, BC=8$，$CD$为$AB$

边上的高．(1)求斜边 AB 的长；(2)求 CD 的长．

【答案】(1)10(2)4.8



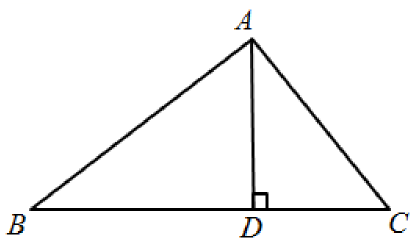
【分析】本题考查了勾股定理，三角形的面积公式，掌握勾股定理是解本题的关键．

（1）由勾股定理可求解；（2）由面积法可求解．

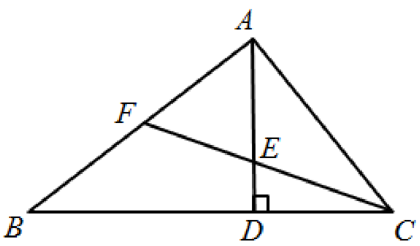
【详解】（1）在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°, AC=6, BC=8$，∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$；

（2）∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AC\times BC=\frac{1}{2}\times AB\times CD$，∴ $6\times 8=10\times CD$，∴ $CD=4.8$．

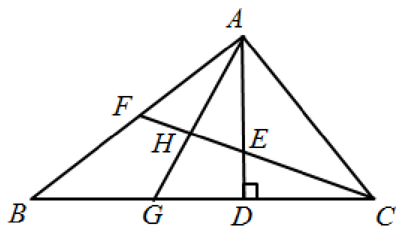
例 3．（23-24 八年级·江苏·假期作业）如图①，在△ABC 中，$\angle BAC=90°$，AD 是 BC 边上的高．



图①



图②



图③

（1）求证：$\angle DAC=\angle ABC$；（2）如图②，△ABC 的角平分线 CF 交 AD 于点 E．求证：$\angle AFE=\angle AEF$；

（3）在（2）的条件下，$\angle BAD$ 的平分线分别与 CF，BC 相交于点 H、点 G，如图③，若 $AH=6$，$CH=8$，$CG=10$，求 AD 的长．

【答案】（1）证明见解析；（2）证明见解析；（3）AD=9.6．

【分析】（1）据三角形高的定义及直角三角形两锐角互余的关系即可得结论；（2）根据角平分线的定义及直角三角形两锐角互余的关系可得∠AFE=∠CED，根据对顶角相等的性质即可得结论；（3）根据等腰三角形"三线合一"的性质可得 AH⊥EF，根据勾股定理可求出 HG 的长，进而可得 AG 的长，利用面积法即可得答案．

【详解】（1）∵ $\angle BAC=90°$，∴ $\angle ABC+\angle ACB=90°$，

∵ AD 是 BC 边上的高，∴ $AD\perp BC$，∴ $\angle ADC=90°$．

∴ $\angle DAC+\angle ACB=90°$，∴ $\angle DAC=\angle ABC$．

（2）∵CF 是△ABC 的角平分线，∴ $\angle ACF=\angle BCF$，

∵ $\angle BAC=\angle ADC=90°$，∴ $\angle AFE+\angle ACF=\angle CED+\angle BCF=90°$，∴ $\angle AFE=\angle CED$，

∵ $\angle AEF=\angle CED$，∴ $\angle AFE=\angle AEF$．

（3）由（2）可知：∠AFE=∠AEF，∴AF=AE，

∵AG 平分∠BAD，AG 分别与 CF， BC 相交于点 H 、点 G ，∴AH⊥EF，

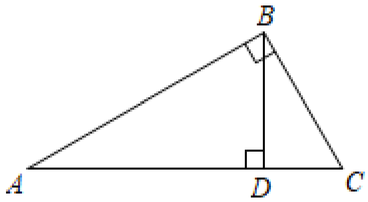
∵CH=8，CG=10，∴GH=$\sqrt{CG^2-CH^2}$=6，

∵AH=6，∴AG=AH+GH=12，∴$S_{\triangle AGC}=\frac{1}{2}AG\cdot CH=\frac{1}{2}CG\cdot AD$，即 12×8=10AD，解得：AD=9.6．

【点睛】本题考查角平分线的定义、直角三角形的性质、等腰三角形的性质及勾股定理，直角三角形两锐角互余；等腰三角形底边的中线、底边上的高及顶角的角平分线“三线合一”；直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方；熟练掌握相关性质和定理是解题关键．

习题练模型

1．（2023·北京通州·八年级统考期末）如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$，$BD\perp AC$，垂足为D．如果$AC=6$，$BC=3$，则BD的长为（　）



A．2　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$3\sqrt{3}$　　D．$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

【答案】D

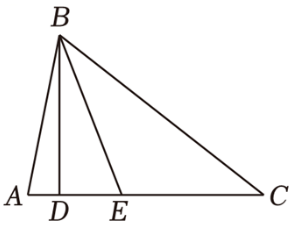
【分析】先根据勾股定理求出AB，再利用三角形面积求出BD即可．

【详解】解：∵$\angle ABC=90°$，$AC=6$，$BC=3$，∴根据勾股定理$AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$，

∵$BD\perp AC$，∴$S_{\triangle}ABC=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}AC\cdot BD$，即$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 3=\frac{1}{2}\times 6\cdot BD$，解得：$BD=\frac{3\sqrt{3}}{2}$．故选择D．

【点睛】本题考查直角三角形的性质，勾股定理，三角形面积等积式，掌握直角三角形的性质，勾股定理，三角形面积等积式是解题关键．

2．（2023秋·浙江·八年级专题练习）如图，$\triangle ABC$中，$BD\perp AC$，BE平分$\angle ABC$，若$\angle A=2\angle C$，$\angle DBE=20°$，则$\angle ABC=$（　　）



A．$50°$　　B．$60°$　　C．$70°$　　D．$80°$

【答案】B

【分析】设$\angle C=\alpha$，那么$\angle A=2\alpha$，然后利用α分别表示$\angle ABC$，$\angle ABE$，$\angle ABD$，最后利用三角形内角和定理建立方程解决问题．

【详解】解：∵$\triangle ABC$中，$\angle A=2\angle C$，∴设$\angle C=\alpha$，那么$\angle A=2\alpha$，∴

$\angle ABC=180°-\angle A-\angle C=180°-3\alpha$，

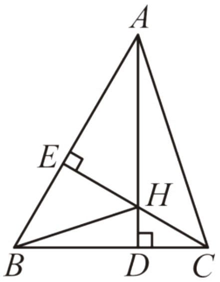
∵ BE 平分 $\angle ABC$，∴ $\angle ABE=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}(180°-3\alpha)$，

∵ $BD\perp AC$， $\angle DBE=20°$，∴ $\angle ABD=\angle ABE-\angle DBE=\frac{1}{2}\left(180°-3\alpha\right)-20°=70°-\frac{3}{2}\alpha$，

∴ $\angle A+\angle ABD=2\alpha+70°-\frac{3}{2}\alpha=90°$，∴ $\alpha=40°$，∴ $\angle ABC=180°-\angle A-\angle C=180°-3\alpha=60°$．故选：B．

【点睛】此题主要考查了三角形内角和定理，同时也利用了角平分线的定义，解题的关键是熟练使用三角形内角和定理．

3．（23-24 八年级上·陕西西安·开学考试）如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=45°$，$AD\perp BC$，$CE\perp AB$，垂足分别为点 D、E，AD、CE 交于点 H，$EH=EB$．下列结论：①$\angle ABC=45°$；②$AH=BC$；③$AE-BE=CH$；④$BH\perp AC$．你认为正确的有（　）



A．4 个　　　　B．3 个　　　　C．2 个　　　　D．1 个

【答案】B

【分析】本题考查了全等三角形的判定与性质、直角三角形的两个锐角互余、同角的余角相等、三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角．

①根据 $AD\perp BC$，若 $\angle ABC=45°$，则 $\angle BAD=45°$，而 $\angle BAC=45°$，很明显不成立；②③可以通过证明$\triangle AEH\cong\triangle CEB$得到；④延长 BH 交 AC 于点 L，则 $\angle BLC=\angle EBH+\angle BAC=90°$，所以 $BH\perp AC$．

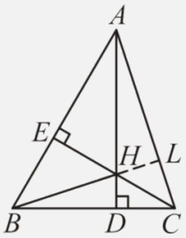
【详解】解：假设 $\angle ABC=45°$ 成立，∵ $AD\perp BC$，∴ $\angle BAD=45°$，

∵ $\angle BAC=45°$，矛盾，∴ $\angle ABC=45°$ 不成立，故①错误．

∵ $\angle BAC=45°$，$CE\perp AB$，∴ $AE=EC$，

在 $\triangle AEH$ 和 $\triangle CEB$ 中，$\begin{cases}AE=EC\\ \angle AEC=\angle BEC\\ EH=EB\end{cases}$ ∴ $\triangle AEH\cong\triangle CEB(\mathrm{SAS})$ ∴ $AH=BC$ 故②正确．

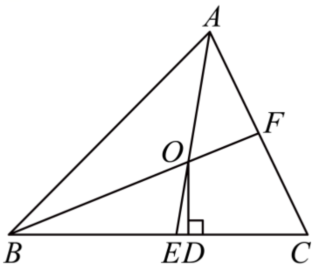
∵ $EC-EH=CH$，∴ $AE-BE=CH$ 故③正确．延长 BH 交 AC 于点 L，



∵ $EH = EB$， $CE \perp AB$， ∴ $\angle EBH = \angle EHB = 45°$，

∵ $\angle BAC = 45°$， ∴ $\angle BLC = \angle EBH + \angle BAC = 90°$， ∴ $BH \perp AC$， 故④正确．故选：B．

4．（23-24 八年级下·广西柳州·开学考试）如图，在$\triangle ABC$中， $\angle BAC$ 和 $\angle ABC$ 的平分线 AE， BF 相交于点 O， AE 交 BC 于 E， BF 交 AC 于 F，过点 O 作 $OD \perp BC$ 于 D，下列三个结论：① $\angle AOB = 90° + \frac{1}{2}\angle C$；②当 $\angle C = 60°$ 时， $AF + BE = AB$；③若 $OD = a$， $AB + BC + CA = 2b$，则 $S_{\triangle ABC} = 2ab$．其中正确的是（　）



A．①②　　　　B．②③　　　　C．①②③　　　　D．①③

【答案】A

【分析】本题考查了三角形内角和定理，三角形外角的性质，三角形全等的性质和判定，正确作出辅助线证得 $\triangle HBO \cong \triangle EBO$，得到 $\angle BOH = \angle BOE = 60°$，是解决问题的关键．由角平分线的定义结合三角形的内角和的可求解 $\angle AOB$ 与 $\angle C$ 的关系，进而判断①；在 AB 上取一点 N，使 $BN = BE$， 证得$\triangle NBO \cong \triangle EBO$，得到 $\angle BON = \angle BOE = 60°$， 再证得$\triangle NAO \cong \triangle FAO$，得到 $AF = AN$， 进而判断②正确；作 $OH \perp AC$ 于 H，$OM \perp AB$ 于 M，根据三角形的面积可证得③错误．

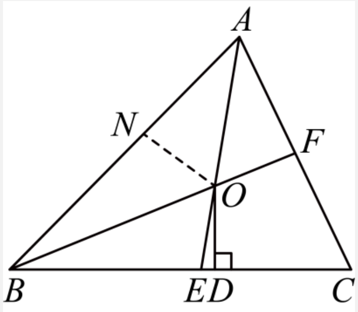
【详解】解：∵ $\angle BAC$ 和 $\angle ABC$ 的平分线相交于点 O，∴ $\angle OBA = \frac{1}{2}\angle CBA$， $\angle OAB = \frac{1}{2}\angle CAB$，

∴ $\angle AOB = 180° - \angle OBA - \angle OAB = 180° - \frac{1}{2}\angle CBA - \frac{1}{2}\angle CAB = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle C) = 90° + \frac{1}{2}\angle C$，故①正确．

∵ $\angle C = 60°$， ∴ $\angle BAC + \angle ABC = 120°$，

∵ AE， BF 分别是 $\angle BAC$ 和 $\angle ABC$ 的平分线，∴ $\angle OAB + \angle OBA = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) = 60°$，

∴ $\angle AOB = 120°$， ∴ $\angle AOF = 60°$， ∴ $\angle BOE = 60°$，如图，在 AB 上取一点 N，使 $BN = BE$，



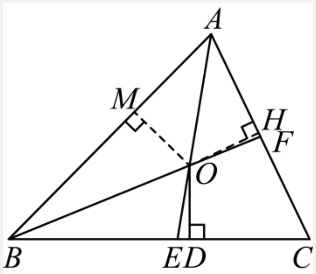
$\because BF$ 是$\angle ABC$的角平分线，$\therefore \angle NBO = \angle EBO$，

在$\triangle NBO$和$\triangle EBO$中，$\begin{cases} BN = BE \\ \angle NBO = \angle EBO \\ BO = BO \end{cases}$，$\therefore \triangle NBO \cong \triangle EBO(SAS)$，

$\therefore BE = BN$，$\angle BON = \angle BOE = \angle AOF = 60°$，$\therefore \angle AON = 120° - 60° = 60° = \angle AOF$

$\because OA = OA, \angle OAF = \angle OAN$ $\therefore \triangle AOF \cong \triangle AON$ $\therefore AF = AN$ $\therefore AB = AN + BN = AF + BE$，故②正确.

作$OH \perp AC$于H，$OM \perp AB$于M，



$\because \angle BAC$和$\angle ABC$的平分线AE，BF相交于点O，$\therefore$点O在$\angle C$的平分线上，$\therefore OH = OM = OD = a$，

$\because AB + BC + CA = 2b$，$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \cdot OM + \frac{1}{2} \times AC \cdot OH + \frac{1}{2} \times BC \cdot OD = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) \cdot a = ab$.

故③错误．故选：A．

5．（2023下·重庆涪陵·八年级统考期末）如图，钝角$\triangle ABC$中，$\angle 2$为钝角，AD为BC边上的高，AE为$\angle BAC$的平分线，则$\angle DAE$与$\angle 1$、$\angle 2$之间有一种等量关系始终不变，下面有一个规律可以表示这种关系，你发现的是（　　）