3.1 序列的Z变换

3.1.1 Z变换的定义

序列x(n)的Z变换定义为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \tag{1}$$

式中z是一种复变量，它所在的复平面称为z平面。注旨在定义中，对n求和是在±∞之间求和，能够称为双边Z变换。还有一种称为单边Z变换的定义，如下式

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \tag{2}$$

这种单边Z变换的求和限是从零到无限大，所以对于因果序列，用两种Z变换定义计算出的成果是一样的。本书中如不另外阐明，均用双边Z变换对信号进行分析和变换。

(1)式Z变换存在的条件是等号右边级数收敛，要求级数绝对可和，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)z^{-n}\right|<\infty \qquad (3)$$

使(3)式成立，Z变量取值的域称为收敛域。一般收敛域用环状域表达

$$R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

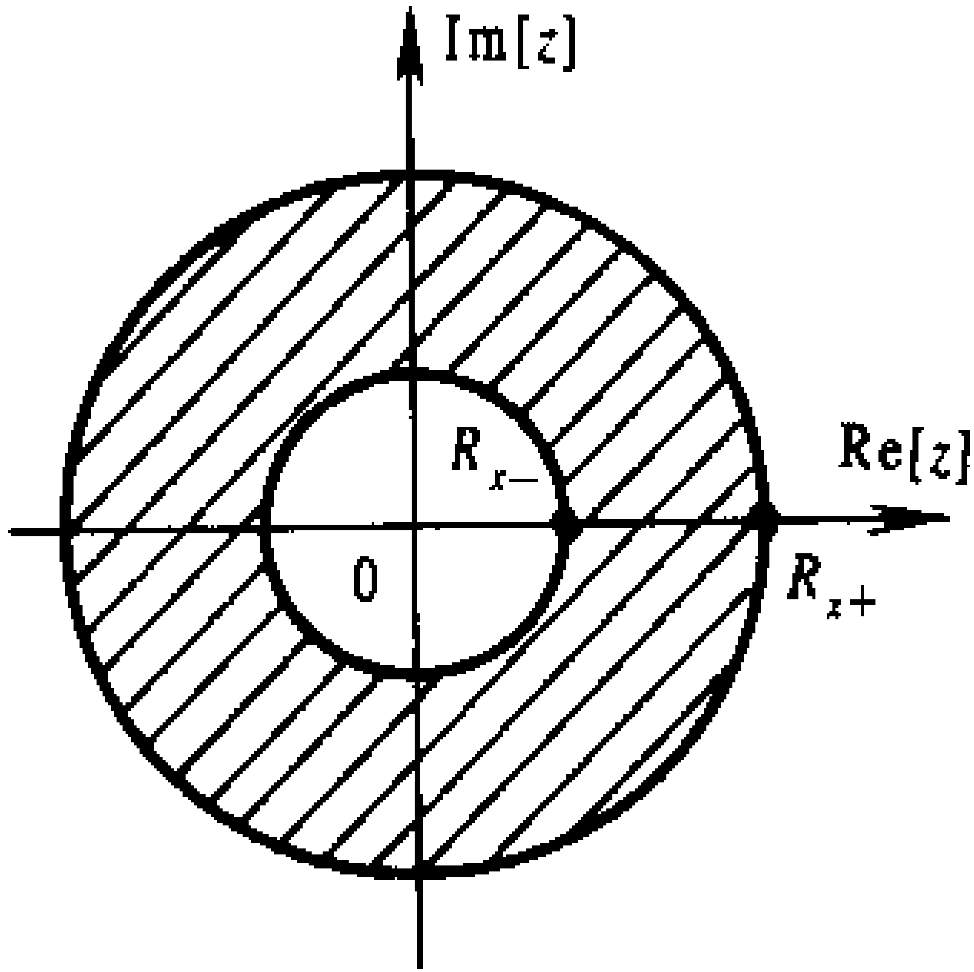

图 1　Z变换的收敛域

常用的Z变换是一种有理函数，用两个多项式之比表达

$$X(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$$

分子多项式P(z)的根是X(z)的零点，分母多项式Q(z)的根是X(z)的极点。在极点处Z变换不存在，所以收敛域中没有极点，收敛域总是用极点限定其边界。

对比序列的傅里叶变换定义(1)式，很轻易得到FT和ZT之间的关系，用下式表达：

$$X(e^{j\omega})=X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} \tag{4}$$

式中$z=e^{j\omega}$表达在z平面上r=1的圆， 该圆称为单位圆。 (4)式表白单位圆上的Z变换就是序列的傅里叶变换。 假如已知序列的Z变换， 可用(4)式， 很以便的求出序列的FT， 条件是收敛域中包括单位圆。

例 1 x(n)=u(n)， 求其Z变换。

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

X(z)存在的条件是|z-1|<1， 所以收敛域为|z|>1，

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z|>1$$

由x(z)体现式表白， 极点是z=1， 单位圆上的Z变换不存在， 或者说收敛域不包括单位圆。 所以其傅里叶变换不存在， 更不能用(4)式求FT。 该序列的FT不存在， 但假如引进奇异函数δ(ω)， 其傅里叶变换能够表达出来(见表2)。 该例同步阐明一种序列的傅里叶变换不存在， 在一定收敛域内Z变换是存在的。

3.1.2 序列特征对收敛域的影响

序列的特征决定其Z变换收敛域，了解序列特征与收敛的某些一般关系，对使用Z变换是很有帮助的。

1. 有限长序列

如序列x(n)满足下式：

$$x(n)=\begin{cases} x(n) & n_1 \le n \le n_2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

即序列x(n)从n_1到n_2序列值不全为零，此范围之外序列值为零，这么的序列称为有限长序列。其Z变换为

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

设x(n)为有界序列，因为是有限项求和，除0与∞两点是否收敛与n_1、n_2取值情况有关外，整个z平面均收敛。假如$n_1<0$，则收敛域不涉及∞点；如$n_2>0$，则收敛域不涉及z=0点；假如是因果序列，收敛域涉及z=∞点。详细有限长序列的收敛域表达如下：

$n_1<0$， $n_2\le 0$时， $0\le z<\infty$

$n_1<0$， $n_2>0$时， $0<z<\infty$

$n_1\ge 0$， $n_2>0$时， $0<z\le\infty$

例 3.1.2求x(n)=RN(n)的Z变换及其收敛域

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_N(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}z^{-n}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

这是一种因果的有限长序列， 所以收敛域为$0<z\le\infty$。 但由成果的分母能够看出似乎z=1是X(z)的极点， 但同步分子多项式在z=1时也有一种零点， 极零点对消， X(z)在单位圆上仍存在， 求$R_N(n)$的FT， 可将$z=e^{j\omega}$代入X(z)得到， 其成果和例题1中的成果(5)公式是相同的。

2. 右序列

右序列是在$n\ge n_1$时， 序列值不全为零， 而其他$n<n_1$， 序列值全为零。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^nu(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^nz^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

第一项为有限长序列，设$n_1 \le -1$，其收敛域为$0 \le |z| < \infty$。第二项为因果序列，其收敛域为$R_{x-} < |z| \le \infty$，Rx-是第二项最小的收敛半径。将两收敛域相与，其收敛域为$R_{x-} < |z| < \infty$。假如是因果序列，收敛域定为$R_{x-} < |z| \le \infty$。

例 3.1.3求$x(n)=a^n u(n)$的Z变换及其收敛域

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-n}}$$

在收敛域中必须满足$|a_z-1|<1$， 所以收敛域为$|z|>|a|$。

3. 左序列

左序列是在$n \le n_2$时， 序列值不全为零， 而在$n>n_1$

，

序列值全为零的序列。 左序列的Z变换表达为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n) z^{-n}$$

假如n2<0, z=0点收敛， z=∞点不收敛， 其收敛域是在某一圆(半径为Rx+)的圆内， 收敛域为$0\le|z|<R_{x+}$。 假如$n_2>0$， 则收敛域为$0<|z|<R_{x+}$。

例 2.5.4求$x(n)=-a^n u(-n-1)$的Z变换及其收敛域。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}-a^n u(-n-1)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}-a^n z^{-n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}-a^{-n}z^n$$

X(z)存在要求$|a^{-1}z|<1$， 即收敛域为$|z|<|a|$

$$X(z)=\frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z}=\frac{1}{1-az^{-1}},\quad |z|<a$$

4. 双边序列

一种双边序列能够看作一种左序列和一种右序列之和， 其Z变换表达为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}=X_1(z)+X_2(z)$$

$$X_1(z)=\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n},\qquad 0<|Z|<R_{x+}$$

$$X_2(z)=\sum_{n=-n+1}^{\infty} x(n)z^{-n},\qquad R_{x-}<|Z|\le\infty$$

X(z)的收敛域是$X_1(z)$和$X_2(z)$收敛域的公共收敛区域。假如$R_{x+}>R_{x-}$，其收敛域为$R_{x-}<|z|<R_{x+}$，这是一种环状域，假如$R_{x+}<R_{x-}$，两个收敛域没有公共区域，X(z)没有收敛域，所以X(z)不存在。

例 3.1.5 $x(n)=a^{|n|}$，a为实数，求x(n)的Z变换及其收敛域。

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|}z^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} z^{n}z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} a^{n}z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty} z^{n}z^{-n}$$

第一部分收敛域为$|az|<1$，得$|z|<|a|^{-1}$，第二部分收敛域为$|az^{-1}|<1$，得到$|z|>|a|$。假如$|a|<1$，两部分的公共收敛域为$|a|<|z|<|a|^{-1}$，其Z变换如下式：

$$X(z)=\frac{az}{1-az}+\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$=\frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})},\qquad |a|<|z|<|a|^{-1}$$

假如$|a|\geq 1$，则无公共收敛域，所以X(z)不存在。当$0<a<1$时，x(n)的波形及X(z)的收敛域如图3.1.2所示。

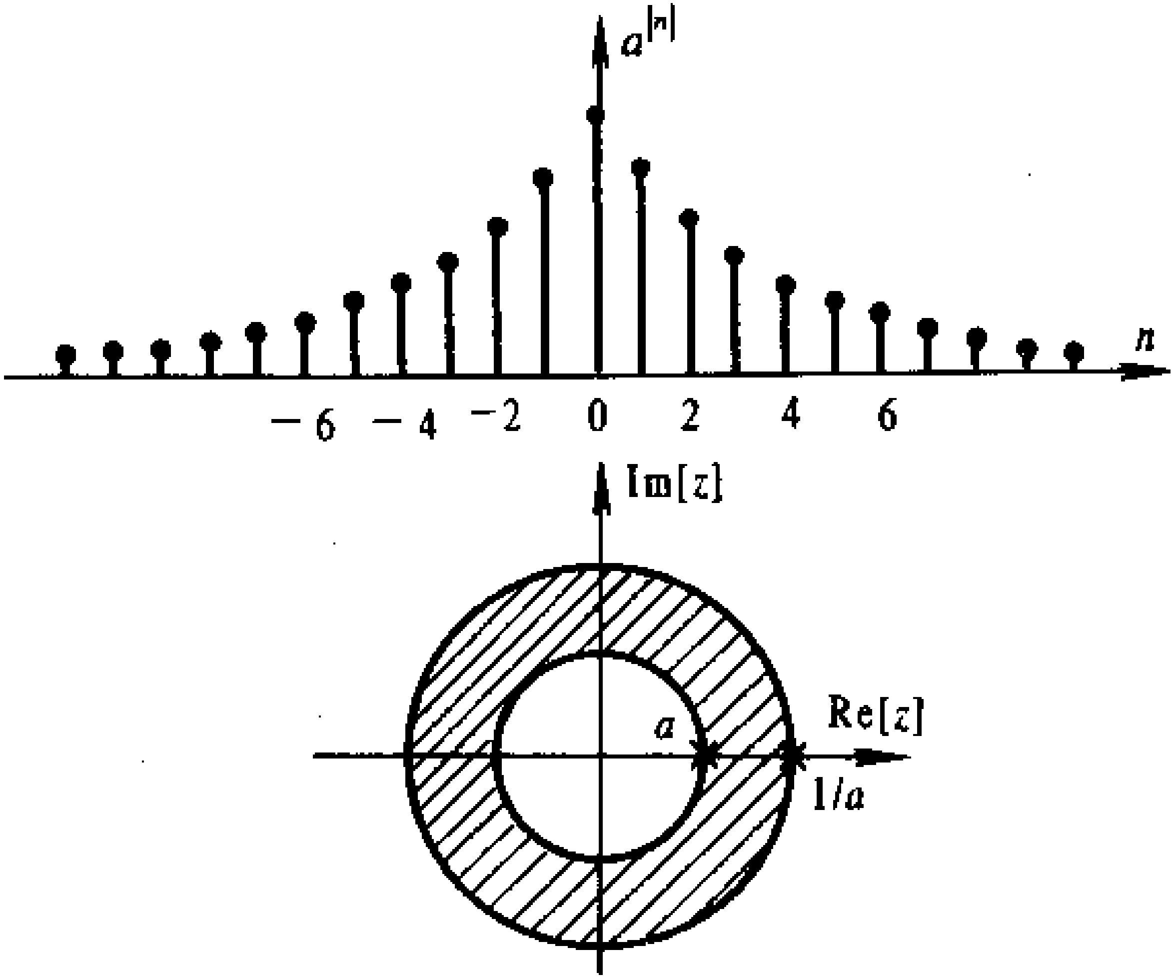

图 3.1.2　例3.1.5图

3.1.3 逆Z变换

已知序列的Z变换及其收敛域， 求序列称为逆Z变换。 序列的Z变换及共逆Z变换表达如下：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz, \quad c\in(R_{x-},R_{x+}) \qquad (5)$$

1. 用留数定理求逆Z变换

假如$X(z)z^{n-1}$在围线c内的极点用z_k表达， 根据留数定理

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz=\sum_k \operatorname{Res}[X(z)z^{n-1},z_k] \qquad (6)$$

式中 $\operatorname{Res}[X(z)z^{n-1},z_k]$ 表达被积函数$X(z)z^{n-1}$在极点$z=z_k$的留数， 逆Z变换则是围线c内全部的极点留数之和。

假如z_k是单阶极点， 则根据留数定理

$$\operatorname{Res}[X(z)z^{n-1},z_k]=(z-z_k)\cdot X(z)z^{n-1}\Big|_{z=z_k} \qquad (7)$$

假如z_k是N阶极点，则根据留数定理

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}, z_k] = \frac{1}{(N-1)!}\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}[(z-z_k)^N X(z)z^{n-1}]\Big|_{z=z_k} \qquad (2.5.8)$$

由(2.5.8)式表白，对于N阶极点，需要求N-1次导数，这是比较麻烦的。假如c内有多阶极点，而c外没有多阶极点，能够根据留数辅助定理改求c外的全部极点留数之和，使问题简朴化。

设被积函数用F(z)表达，即

$$F(z) = X(z)z^{n-1}$$

F(z)在z平面上有N个极点， 在收敛域内的封闭曲线c将z平面 上极点提成两部分： 一部分是c内极点，设有N_1个极点， 用z_{1k}表达； 另一部分是c外极点， 有N_2个， $N=N_1+N_2$， 用z_{2k}表达。 根据留数辅助定理下式成立：

$$\sum_{k=1}^{N_1} \operatorname{Res}[F(z), z_{1k}] = -\sum_{k=1}^{N_2} \operatorname{Res}[F(z), z_{2k}] \qquad (2.5.9)$$

注意(2.5.9)式成立的条件是F(z)的分母阶次比分子

阶次必须高二阶以上。 设X(z)=P(z)/Q(z)， P(z)与Q(z)

分别是M与N阶多项式。 (2.5.9)式成立的条件是

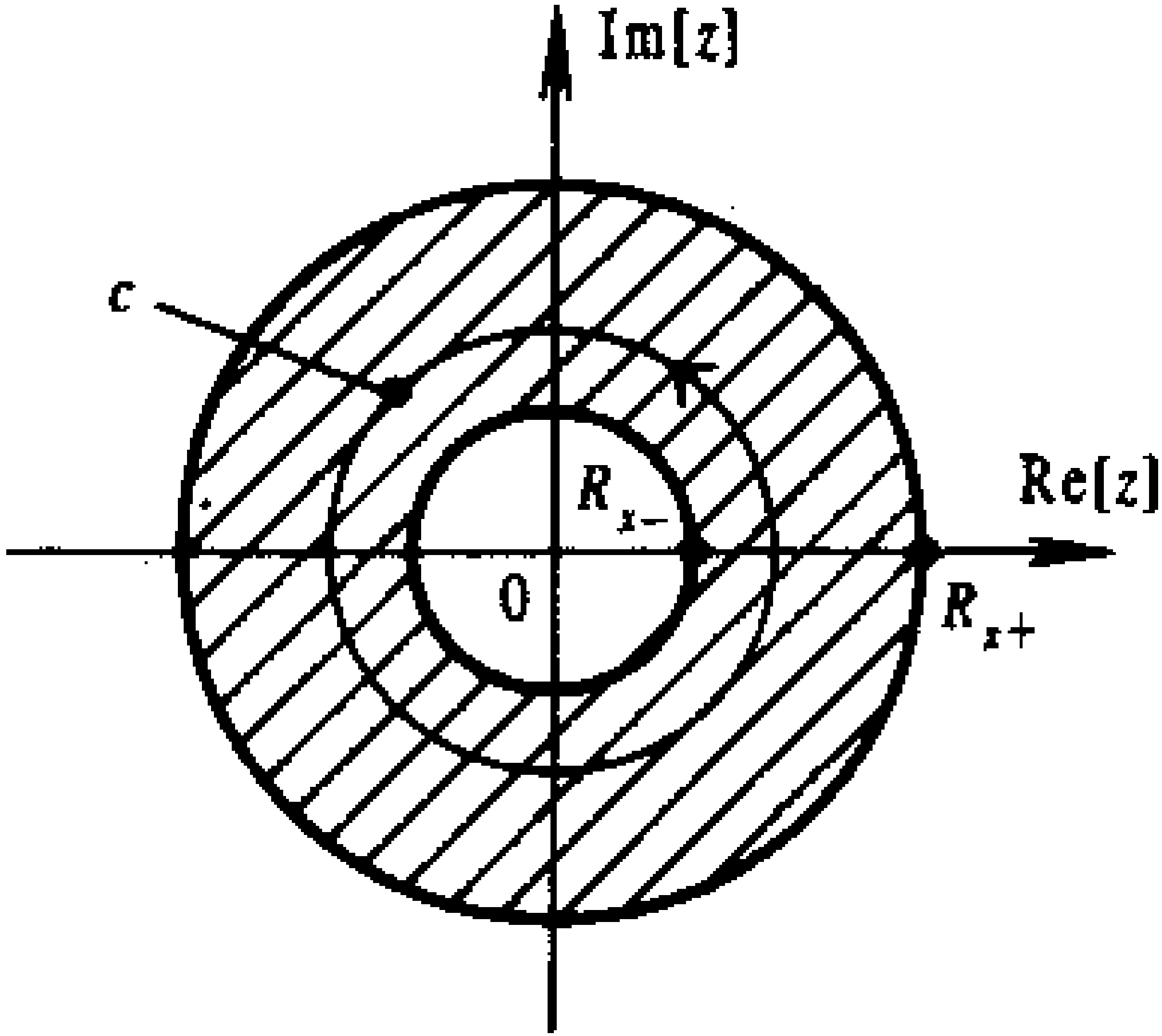

图 2.5.3 围线积分路径

N-M-n+1≥2

所以要求 N-M-n≥1 (2.5.10)

假如(2.5.10)式满足, c圆内极点中有多阶极点，而c圆外极点没有多阶的， 能够按照(2.5.9)式， 改求c圆外极点留数之和， 最终加一种负号。

例 2.5.6 已知$X(z)=(1-az^{-1})^{-1}$， $|z|>a$， 求其逆Z变换x(n)。

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c (1-az^{-1})^{-1}z^{n-1}dz$$

$$F(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}z^{n-1}$$

$$=\frac{z^n}{z-a}$$

为了用留数定理求解， 先找出F(z)的极点， 极点有： z=a; 当n<0时z=0共二个极点， 其中z=0极点和n的取值有关。 n≥0时， n=0不是极点。 n<0时， z=0是一种n阶极点。 所以提成n≥0和n<0两种情况求x(n)。

n≥0 时，

$$x(n)=\mathrm{Re}\,s[F(z),a]$$

$$=(z-a)\frac{z^n}{z-a}\Big|_{z=a}$$

$$=a^n$$

n<0时， 增长z=0的n阶极点， 不易求留数， 采用留数辅助定理求解， 检验(2.5.10)式是否满足， 此处n<0， (2.5.10)式就满足。

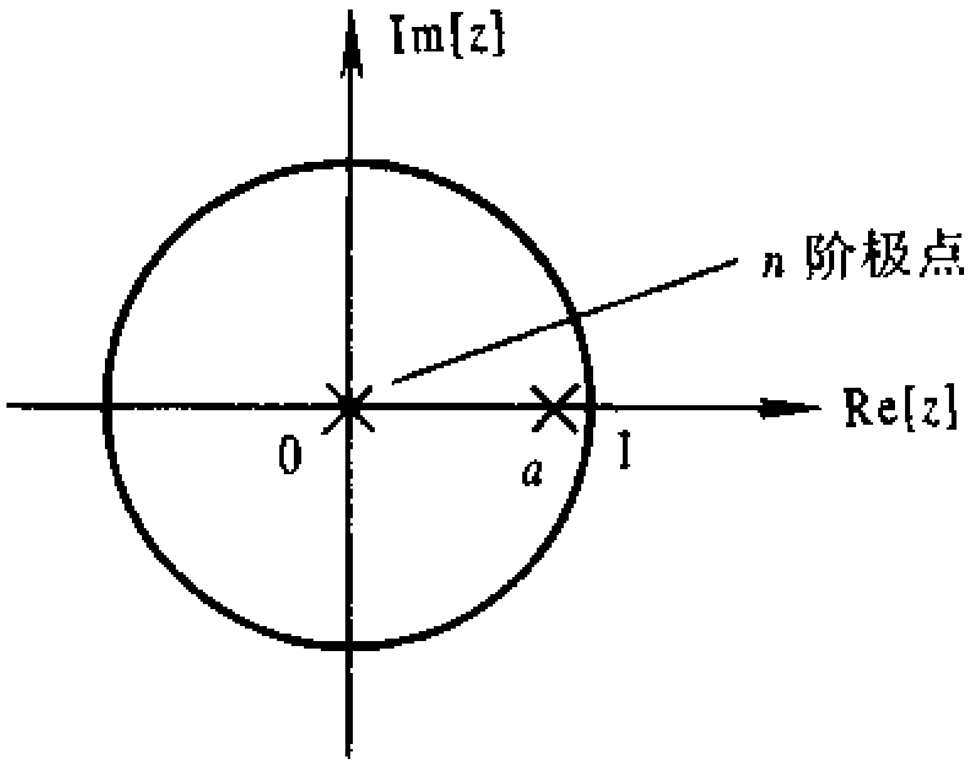

图 2.5.4　例2.5.6中n<0时F(z)极点分布

例 2.5.7已知 $X(z)=\dfrac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}, |a|<1$ ，求其逆变换x(n)。

解：该例题没有给定收敛域，为求出唯一的原序列x(n)，必须先拟定收敛域。分析X(z)，得到其极点分布如图2.5.5所示。图中有二个极点z=a和$z=a^{-1}$，这么收敛域有三种选法，它们是

(1) $|z|>|a^{-1}|$，相应的x(n)是右序列；

(2) $|a|<|z|<|z^{-1}|$，相应的x(n)是双边序列；

(3) $|z|<|a|$，相应的x(n)是左序列。

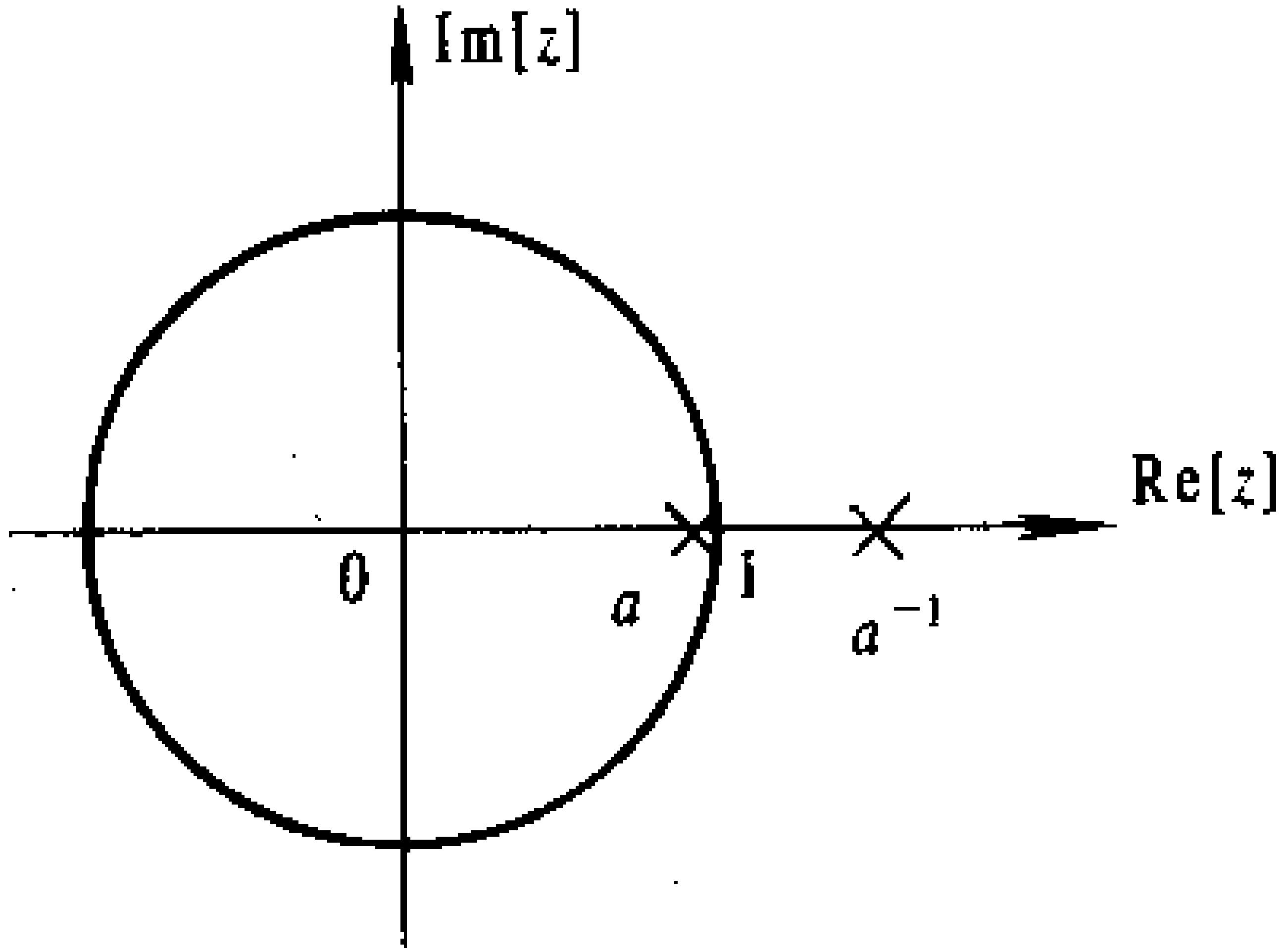

图 2.5.5 例2.5.7 X(z)极点分布图

下面按照收敛域的不同求其x(n)。

(1) 收敛域$|z|>|a^{-1}|$

$$F(z)=\frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}z^{n-1}$$

$$=\frac{1-a^2}{-a(z-a)(z-a^{-1})}z^n$$

种收敛域是因果的右序列， 不必求n<0时的x(n)。

当n≥0时， 围线积分c内有二个极点z=a和$z=a^{-1}$， 所以

$$x(n)=\operatorname{Res}[F(z),a]+\operatorname{Res}[F(z),a^{-1}]$$

$$=-\frac{(1-a^2)z^n}{(z-a)(1-az)}(z-a)\Big|_{z=a}+\frac{(1-a^2)z^n}{-a(z-a)(z-a^{-1})}(z-a^{-1})\Big|_{z=a^{-1}}$$

$$=a^n-a^{-n}$$

最终表达成： $x(n)=(a^n-a^{-n})u(n)$。

(2) 收敛域$|z|<|a|$

这种情况原序列是左序列， 不必计算$n\geq0$情况，当$n\geq0$时， 围线积分c内没有极点， 所以$x(n)=0$。 $n<0$时， c内只有一种极点$z=0$， 且是n阶极点， 改求c外极点留数之和

$$n<0, x(n)=-\mathrm{Res}[F(z),a]-\mathrm{Res}[F(z),a^{-1}]$$

$$=-\frac{(1-a^2)z^n}{-a(z-a)(z-a^{-1})}(z-a)\Big|_{z=a}-\frac{(1-a^2)z^n}{-a(z-a)(z-a^{-1})}(z-a^{-1})\Big|_{z=a^{-1}}$$

$$=-a^n-(-a^{-n})=a^{-n}-a^n$$

最终将x(n)表达成

$$x(n)=(a^{-n}-a^n)u(-n-1)$$

(3) 收敛域$|a|<|z|<|a^{-1}|$

这种情况相应的x(n)是双边序列。 根据被积函数F(z)， 按n≥0和n<0两情况分别求x(n)。

n≥0时， c内极点z=a

$$x(n)=\mathrm{Res}[F(z), a]=a^n$$

$n<0$时， c内极点有二个， 其中$z=0$是n阶极点，改求c外极点留数， c外极点只有$z=a^{-1}$， 所以

$$x(n)=-\text{Res}\left[F(z), a^{-1}\right]=a^{-n}$$

最终将$x(n)$表达为

$$x(n)=\begin{cases} a^{n} & n\geq 0 \\ a^{-n} & n<0 \end{cases} \qquad x(n)=a^{|n|}$$

2. 幂级数法(长除法)

按照Z变换定义(2.5.1)式， 能够用长除法将X(z)写成幂级数形式， 级数的系数就是序列x(n)。 要阐明的是， 假如x(n)是右序列， 级数应是负幂级数； 如x(n)是左序列， 级数则是正幂级数。

例 2.5.8已知$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},|z|>|a|$ 用长除法求其逆Z变换x(n)。

解由收敛域鉴定这是一种右序列， 用长除法将其展成负幂级数

$$1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots$$

$1\text{-}az^{-1}$

$$1$$

$$1 - az^{-1}$$

$$az^{-1}$$

$$az^{-1} - a^2z^{-2}$$

$X(z)$

$$a^2z^{-2}$$

$$\cdots$$

$$X(z) = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$x(n) = a^n u(n)$$

例 2.5.9 已知求 $X(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}},|z|<|a|$ 其逆Z变换x(n)。

解：由收敛域鉴定，x(n)是左序列，用长除法将X(z)展成正幂级数

$$
\begin{array}{l}
-a^{-1}z-a^{-2}z^{2}-a^{-3}z^{3} \\
\hline
1 \\
1-a^{-1}z \\
\hline
a^{-1}z \\
a^{-1}z-a^{-2}z^{2} \\
\hline
a^{-2}z^{2}
\end{array}
$$

$$X(z) = -[a^{-1}z + a^{-2}z^2 + \cdots] = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

$$x(n) = -a^n u(-n-1)$$

3. 部分分式展开法

对于大多数单阶极点的序列，经常用这种部分分式展开法求逆Z变换。

设x(n)的Z变换X(z)是有理函数，分母多项式是N阶，分子多项式是M阶，将X(z)展成某些简朴的常用的部分分式之和，经过查表(参照表2.5.1)求得各部分的逆变换，再相加即得到原序列x(n)。设X(z)只有N个一阶极点，可展成正式

$$X(z)=A_0+\sum_{m=1}^{N}\frac{A_m z}{z-z_m} \tag{2.5.11}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A_0}{z}+\sum_{m=1}^{N}\frac{A_m}{z-z_m} \tag{2.5.12}$$

观察上式，X(z)/z在z=0的极点留数就是系数A_0，在$z=z_m$的极点留数就是系数A_m。

$$A_0=\mathrm{Res}[\frac{X(z)}{z},0] \tag{2.5.13}$$

$$A_m=\mathrm{Res}[\frac{X(z)}{z},z_m] \tag{2.5.14}$$

求出A_m系数(m=0,1,2,…N)后，很轻易示求得x(n)序列。

例2.5.10已知$X(z)=\dfrac{5z^{-1}}{1+z^{-1}+6z^{-2}},2<|z|<3$，求逆Z变换

。

解

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{5z^{-2}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}=\frac{5}{z^2+z+6}=\frac{5}{(z-2)(z+3)}=\frac{A_1}{z-2}+\frac{A_2}{z+3}$$

$$A_1=\mathrm{Res}[\frac{X(z)}{z},2]=\frac{X(z)}{z}(z-2)\Big|_{z=2}=1$$

$$A_2=\mathrm{Res}[\frac{X(z)}{z},-3]=\frac{X(z)}{z}(z+3)\Big|_{z=-3}=-1$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{(z-2)}-\frac{1}{(z+3)}$$

$$X(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}-\frac{1}{1+3z^{-1}}$$

因为收敛域为$2<|z|<3$，第一部分极点是$z=2$，所以收敛域为$|z|>2$。第二部分极点$z=-3$，收敛域应取$|z|<3$。查表2.5.1得到

$$x(n)=a^n u(n)+(-3)^n u(-n-1)$$

某些常见的序列的Z变换可参照表2.5.1。

表2.5.1 常见序列Z变换

序　　列	Z 变 换	收 敛 域
$\delta(n)$	1	全面 z 平面
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>\|a\|$
$R_N(n)$	$\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>0$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|<\|a\|$
$nu(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\|z\|>1$
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$

序　列	Z 变 换	收 敛 域
$e^{j\omega_0 n}u(n)$	$\dfrac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}$	$\|z\|>1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$e^{-an}\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z^{-1}e^{-a}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}e^{-a}\cos\omega_0+z^{-2}e^{-2a}}$	$\|z\|>e^{-a}$
$e^{-an}\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}e^{-a}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}e^{-a}\cos\omega_0+z^{-2}e^{-2a}}$	$\|z\|>e^{-a}$
$\sin(\omega_0 n+\theta)u(n)$	$\dfrac{\sin\theta+z^{-1}\sin(\omega_0-\theta)}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$(n+1)a^n u(n)$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$\dfrac{(n+1)(n+2)}{2!}a^n u(n)$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^3}$	$\|z\|>\|a\|$
$\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!}a^n u(n)$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^{m+1}}$	$\|z\|>\|a\|$
$\dfrac{n(n-1)}{2!}u(n)$	$\dfrac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$	$\|z\|>1$
$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2!}u(n)$	$\dfrac{z^{-3}}{(1-z^{-1})^4}$	$\|z\|>1$

2.5.4 Z 变换的性质和定理

Z变换有许多主要的性质和定理，下面进行简介。

1.线性

设 $X(z)=ZT[x(n)], R_{x-}<|z|<R_{x+}$

$Y(z)=ZT[y(n)], R_{y-}<|z|<R_{y+}$

则 $M(z)=ZT[m(n)]$

$$=aX(z)+bY(z), \quad R_{m-}<|z|<R_{m+} \qquad (2.5.15)$$

$R_{m+}=\max[R_{x+},R_{y+}]$

$R_{m-}=\max[R_{x},R_{y-}]$

这里M(z)的收敛域(R_{m-}，R_{m+})是X(z)和Y(z)的公式收敛域，假如没有公共收敛域，例如当

$R_{x+}>R_{x-}>R_{y+}>R_{y-}$时，则M(z)不存在。

2. 序列的移位

设X(z)=ZT［x(n)］，　　$R_{x-}<|z|<R_{x+}$

则ZT［$x(n-n_0)$］$=z^{-n_0}X(z)$，$R_{x-}<|z|<R_{x+}$

(2.5.16)

3. 乘以指数序列

设 $X(z)=ZT[x(n)]$， $R_{x-}<|z|<R_{x+}$

$y(n)=a^n x(n)$， a为常数

则 $Y(z)=ZT[a^n x(n)]$

$=X(a^{-1}z)$ $|a|R_{x-}<|z|<|a|R_{x+}$ (2.5.17)

证明

$$Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(a^{-1}z)^{-n}=X(a^{-1}z)$$

因为$R_{x-}<|a_{-1}z|<R_{x+}$，得到$|a|R_{x-}<|z|<|a|R_{x+}$。

4.序列乘以n

设 $X(z)=ZT[x(n)] \qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$

则 $ZT[nx(n)]=-z\dfrac{dX(z)}{dz} \qquad R_{x-}<|z|<R_{x+} \qquad (2.5.18)$

证明

$$\frac{dX(z)}{dz}=\frac{d}{dz}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\frac{d}{dz}[z^{-n}]$$

$$=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx(n)z^{-n-1}=-z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx(n)z^{-n}$$

$$=-z^{-1}ZT[nx(n)]$$

$$ZT[nx(n)]=-z\frac{dX(z)}{dz}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/867136111010006164