成套的课件成套的教案成套的试题尽在高中数学同步资源大全QQ群483122854

联系QQ309000116加入百度网盘群2500G一线老师必备资料一键转存，自动更新，一劳永逸

第4课时　与三角形面积有关的问题

题型1三角形面积的计算

例1　条件①：$a=4$，$c=6$；条件②：$a=4$，$\triangle ABC$为等腰三角形．在$\triangle ABC$中，$\cos C=-\frac{1}{8}$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求：

(1)$\sin B$的值；

(2)$\triangle ABC$的面积．

答案

解析：选择条件①：$a=4$，$c=6$；在$\triangle ABC$中，$\cos C=-\frac{1}{8}$，$a=4$，$c=6$；

(1)$\because \cos C=-\frac{1}{8}$，$\therefore C\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{\sqrt{63}}{8}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，

由正弦定理得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，即$\frac{4}{\sin A}=\frac{6}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}$，

解得$\sin A=\frac{\sqrt{7}}{4}$，$A\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\therefore\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=\frac{3}{4}$，

所以$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{\sqrt{7}}{4}\times\left(-\frac{1}{8}\right)+\frac{3}{4}\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，即$\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

(2)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times4\times6\times\frac{\sqrt{7}}{4}=3\sqrt{7}$，

即$\triangle ABC$的面积为$3\sqrt{7}$.

选择条件②：$a=4$，$\triangle ABC$为等腰三角形；

(1)$\because \cos C = -\frac{1}{8}$，$\therefore \sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$，且$C$为钝角.

$\therefore$只能$A = B$，$\therefore a = b = 4$，

由余弦定理$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$得：$c^2 = 4^2 + 4^2 - 2\times 4\times 4\times\left(-\frac{1}{8}\right)$解得：$c = 6$.

由正弦定理得：$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$，即$\frac{4}{\sin A} = \frac{6}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}$，

解得$\sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$，$\therefore \cos A = \sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}$，

所以$\sin B = \sin(A+C) = \sin A\cos C + \cos A\sin C = \frac{\sqrt{7}}{4}\times\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{3}{4}\times\frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{4}$，

即$\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

(2)$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}\times 4\times 6\times\frac{\sqrt{7}}{4} = 3\sqrt{7}$，

即$\triangle ABC$的面积为$3\sqrt{7}$.

【方法归纳】

(1)①$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\cdot h_a=\frac{1}{2}b\cdot h_b=\frac{1}{2}c\cdot h_c$($h_a$，$h_b$，$h_c$分别为边$a$，$b$，$c$上的高)

②$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$，即三角形的面积等于任意两边与它们夹角的正弦值乘积的一半.

③$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r(a+b+c)$($r$为$\triangle ABC$的内切圆半径).

(2)在三角形面积的求解过程中，注意对正弦定理、余弦定理的熟练应用，以及通过隐含条件确定角的取值范围，再利用面积公式求得结果.

跟踪训练1　在①$b^2+\sqrt{2}ac=a^2+c^2$，②$a\cos B=b\sin A$，③$\sin B+\cos B=\sqrt{2}$这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解决该问题.

已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，_____，$A=\frac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{2}$.

(1)求角B；

(2)求$\triangle ABC$的面积

.

解析：若选①：(1)由$b^2+\sqrt{2}ac=a^2+c^2$，得：$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore B=\frac{\pi}{4}$，$\therefore C=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$.

(2)根据(1)由正弦定理得：$c=\frac{b}{\sin B}\times\sin C=\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}\times\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3})$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}=$

$\frac{3+\sqrt{3}}{4}$.

若选②：(1)$\because a\cos B=b\sin A$，

$\therefore\sin A\cos B=\sin B\sin A$，

又$\because$在$\triangle ABC$中，$\sin A\neq 0$，

$\therefore\cos B=\sin B$，

$\therefore B=\frac{\pi}{4}$.

(2)同选①中的(2).

若选③：(1)$\because \sin B+\cos B=\sqrt{2}$,

$\therefore \sqrt{2}\sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$,

$\therefore \sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right)=1.$

在$\triangle ABC$中，$B+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，$\therefore B=\frac{\pi}{4}$.

(2)同选①中的(2).

题型2利用三角形面积公式解三角形

例2　在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$c=1$，$A=\frac{2\pi}{3}$，且$\triangle ABC$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求a的值；

(2)若D为BC上一点，且_____，求$\sin\angle ADB$的值.

从①$AD=1$，②$\angle CAD=\frac{\pi}{6}$这两个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.

解析：(1)因为$c=1$，$A=\frac{2\pi}{3}$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$b=2$，由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，解得$a=\sqrt{7}$.

(2)①当$AD=1$时，在$\triangle ABC$中，由正弦定理$\frac{b}{\sin B}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$，即$\frac{2}{\sin B}=\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，所以$\sin B=\frac{\sqrt{21}}{7}$.因为$AD=AB=1$，所以$\angle ADB=B$，所以$\sin\angle ADB=\sin B$，所以$\angle ADB=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

②当$\angle CAD=\frac{\pi}{6}$时，在$\triangle ABC$中，由余弦定理知，

$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{1+7-4}{2\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

因为$A=\frac{2\pi}{3}$，所以$\angle DAB=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，

所以$B+\angle ADB=\frac{\pi}{2}$，所以$\sin\angle ADB=\cos B$，

所以$\sin\angle ADB=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

【方法归纳】

根据题设条件选择面积公式的形式，再结合正弦定理、余弦定理解三角形.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/868011033106006024