

重难点 中考数学这慎压轴题练习

一. 根的判别式 (共1小题)

题目 1 (2023·广州) 已知关于 x 的方程 $x^2 - (2k-2)x + k^2 - 1 = 0$ 有两个实数根, 则 $\sqrt{(k-1)^2} - (\sqrt{2-k})^2$ 的化简结果是 ()

- A. -1 B. 1 C. $-1-2k$ D. $2k-3$

二. 函数的图象 (共1小题)

题目 2 (2023·温州) 【素材1】某景区游览路线及方向如图1所示, ①④⑥各路段路程相等, ⑤⑦⑧各路段路程相等, ②③两路段路程相等.

【素材2】设游玩行走速度恒定, 经过每个景点都停留20分钟, 小温游路线①④⑤⑥⑦⑧用时3小时25分钟; 小州游路线①②⑧, 他离入口的路程 s 与时间 t 的关系 (部分数据) 如图2所示, 在2100米处, 他到出口还要走10分钟.

【问题】路线①③⑥⑦⑧各路段路程之和为 ()

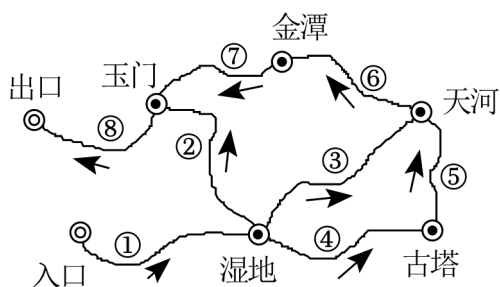


图1

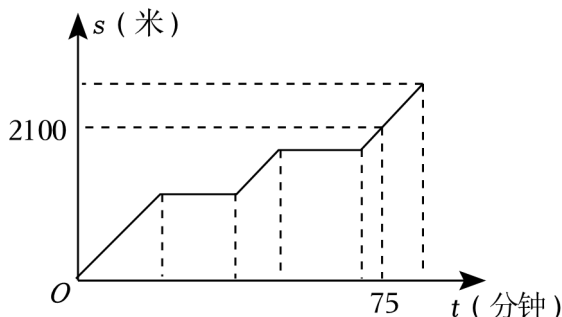
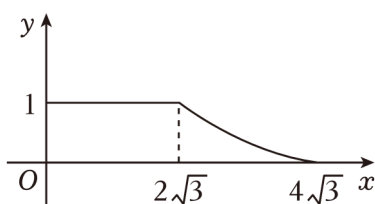
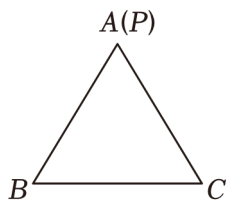


图2

- A. 4200米 B. 4800米 C. 5200米 D. 5400米

三. 动点问题的函数图象 (共1小题)

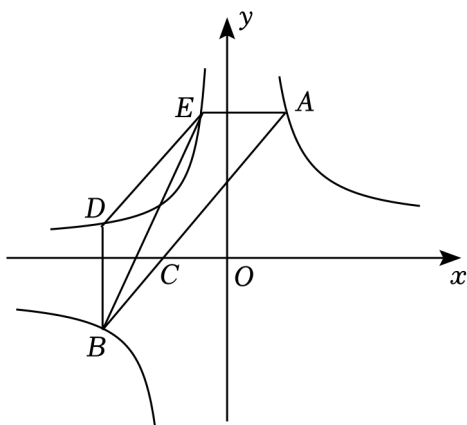
题目 3 (2023·河南) 如图1, 点 P 从等边三角形 ABC 的顶点 A 出发, 沿直线运动到三角形内部一点, 再从该点沿直线运动到顶点 B . 设点 P 运动的路程为 x , $\frac{PB}{PC} = y$, 图2是点 P 运动时 y 随 x 变化的关系图象, 则等边三角形 ABC 的边长为 ()



- A. 6 B. 3 C. $4\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

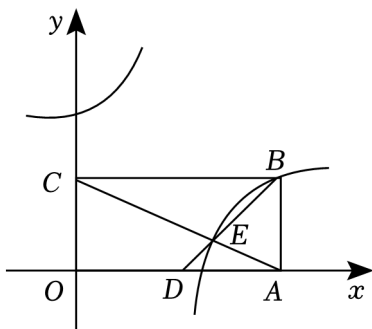
四. 反比例函数系数 k 的几何意义 (共1小题)

题目 4 (2023·宁波) 如图, 点 A, B 分别在函数 $y = \frac{a}{x} (a > 0)$ 图象的两支上 (A 在第一象限), 连结 AB 交 x 轴于点 C . 点 D, E 在函数 $y = \frac{b}{x} (b < 0, x < 0)$ 图象上, $AE \parallel x$ 轴, $BD \parallel y$ 轴, 连结 DE, BE . 若 $AC = 2BC$, $\triangle ABE$ 的面积为9, 四边形 $ABDE$ 的面积为14, 则 $a-b$ 的值为 _____, a 的值为 _____.



五. 反比例函数图象上点的坐标特征 (共2小题)

题目 5 (2023·德州) 如图, 在平面直角坐标系中, 四边形 $OABC$ 是矩形, 点 B 的坐标为 $(6, 3)$, D 是 OA 的中点, AC , BD 交于点 E , 函数 $y = \frac{ax+b}{x-3}$ 的图象过点 B , E . 且经过平移后可得到一个反比例函数的图象, 则该反比例函数的解析式 ()



A. $y = -\frac{15}{x}$

B. $y = \frac{9}{2x}$

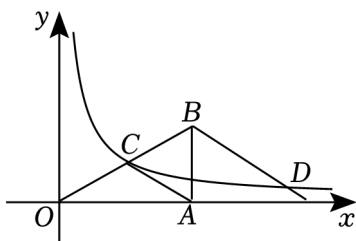
C. $y = \frac{4}{x}$

D. $y = \frac{3}{x}$

题目 6 如图, O 是坐标原点, $Rt\triangle OAB$ 的直角顶点 A 在 x 轴的正半轴上, $AB = 2$, $\angle AOB = 30^\circ$, 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象经过斜边 OB 的中点 C .

(1) $k =$ _____;

(2) D 为该反比例函数图象上的一点, 若 $DB \parallel AC$, 则 $OB^2 - BD^2$ 的值为 _____.



六. 反比例函数与一次函数的交点问题 (共1小题)

题目 7 (2023·湖州) 已知在平面直角坐标系中, 正比例函数 $y = k_1x (k_1 > 0)$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k_2}{x} (k_2 > 0)$ 的图象的两个交点中, 有一个交点的横坐标为 1, 点 $A(t, p)$ 和点 $B(t+2, q)$ 在函数 $y = k_1x$ 的图象上 ($t \neq 0$ 且 $t \neq -2$), 点 $C(t, m)$ 和点 $D(t+2, n)$ 在函数 $y = \frac{k_2}{x}$ 的图象上. 当 $p-m$ 与 $q-n$ 的积为负数时, t 的取值范围是 ()

A. $-\frac{7}{2} < t < -3$ 或 $\frac{1}{2} < t < 1$

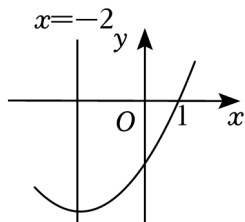
B. $-\frac{7}{2} < t < -3$ 或 $1 < t < \frac{3}{2}$

C. $-3 < t < -2$ 或 $-1 < t < 0$

D. $-3 < t < -2$ 或 $0 < t < 1$

七. 二次函数图象与系数的关系 (共3小题)

题目 8 (2023·乐至县) 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴为直线 $x = -2$, 且过点 $(1, 0)$. 现有以下结论: ① $abc < 0$; ② $5a + c = 0$; ③ 对于任意实数 m , 都有 $2b + bm \leq 4a - am^2$; ④ 若点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 是图象上任意两点, 且 $|x_1 + 2| < |x_2 + 2|$, 则 $y_1 < y_2$, 其中正确的结论是 ()



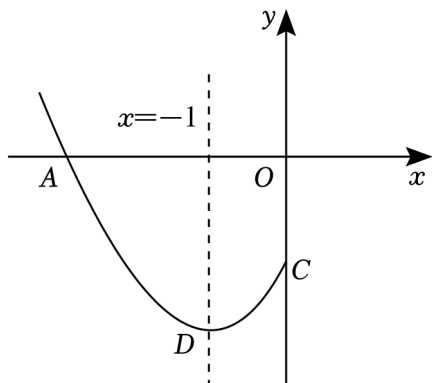
A. ①②

B. ②③④

C. ①②④

D. ①②③④

题目 9 (2023·丹东) 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴的一个交点为 $A(-3, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 点 D 是抛物线的顶点, 对称轴为直线 $x = -1$, 其部分图象如图所示, 则以下4个结论: ① $abc > 0$; ② $E(x_1, y_1)$, $F(x_2, y_2)$ 是抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 上的两个点, 若 $x_1 < x_2$, 且 $x_1 + x_2 < -2$, 则 $y_1 < y_2$; ③ 在 x 轴上有一动点 P , 当 $PC + PD$ 的值最小时, 则点 P 的坐标为 $(-\frac{3}{7}, 0)$; ④ 若关于 x 的方程 $ax^2 + b(x - 2) + c = -4$ ($a \neq 0$) 无实数根, 则 b 的取值范围是 $b < 1$. 其中正确的结论有 ()



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

题目 10 (2023·河北) 已知二次函数 $y = -x^2 + m^2x$ 和 $y = x^2 - m^2$ (m 是常数) 的图象与 x 轴都有两个交点, 且这四个交点中每相邻两点间的距离都相等, 则这两个函数图象对称轴之间的距离为 ()

A. 2

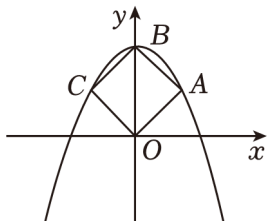
B. m^2

C. 4

D. $2m^2$

八. 二次函数图象上点的坐标特征 (共1小题)

题目 11 (2023·广东) 如图, 抛物线 $y = ax^2 + c$ 经过正方形 $OABC$ 的三个顶点 A, B, C , 点 B 在 y 轴上, 则 ac 的值为 ()



A. -1

B. -2

C. -3

D. -4

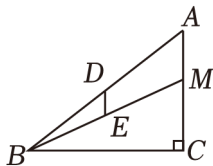
九. 二次函数与不等式(组) (共1小题)

题目 12 (2023· 西宁) 直线 $y_1 = ax + b$ 和抛物线 $y_2 = ax^2 + bx$ (a, b 是常数, 且 $a \neq 0$) 在同一平面直角坐标系中, 直线 $y_1 = ax + b$ 经过点 $(-4, 0)$. 下列结论: ① 抛物线 $y_2 = ax^2 + bx$ 的对称轴是直线 $x = -2$; ② 抛物线 $y_2 = ax^2 + bx$ 与 x 轴一定有两个交点; ③ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx = ax + b$ 有两个根 $x_1 = -4, x_2 = 1$; ④ 若 $a > 0$, 当 $x < -4$ 或 $x > 1$ 时, $y_1 > y_2$. 其中正确的结论是 ()

- A. ①②③④ B. ①②③ C. ②③ D. ①④

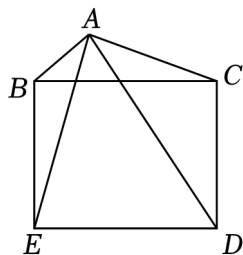
一十. 三角形中位线定理 (共 1 小题)

题目 13 (2023· 广州) 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10$, $AC = 6$, 点 M 是边 AC 上一动点, 点 D, E 分别是 AB, MB 的中点, 当 $AM = 2.4$ 时, DE 的长是 _____. 若点 N 在边 BC 上, 且 $CN = AM$, 点 F, G 分别是 MN, AN 的中点, 当 $AM > 2.4$ 时, 四边形 $DEFG$ 面积 S 的取值范围是 _____.



一十一. 矩形的性质 (共 2 小题)

题目 14 (2023· 宁波) 如图, 以钝角三角形 ABC 的最长边 BC 为边向外作矩形 $BCDE$, 连结 AE, AD , 设 $\triangle AED, \triangle ABE, \triangle ACD$ 的面积分别为 S, S_1, S_2 , 若要求出 $S - S_1 - S_2$ 的值, 只需知道 ()

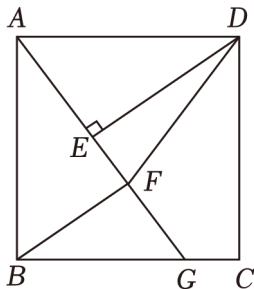


- A. $\triangle ABE$ 的面积 B. $\triangle ACD$ 的面积 C. $\triangle ABC$ 的面积 D. 矩形 $BCDE$ 的面积

题目 15 (2023· 河南) 矩形 $ABCD$ 中, M 为对角线 BD 的中点, 点 N 在边 AD 上, 且 $AN = AB = 1$. 当以点 D, M, N 为顶点的三角形是直角三角形时, AD 的长为 _____.

一十二. 正方形的性质 (共 2 小题)

题目 16 如图, 在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中, 点 G 是 BC 上的一点, 且 $BG = 3GC$, $DE \perp AG$ 于点 E , $BF \parallel DE$, 且交 AG 于点 F , 则 $\tan \angle EDF$ 的值为 ()

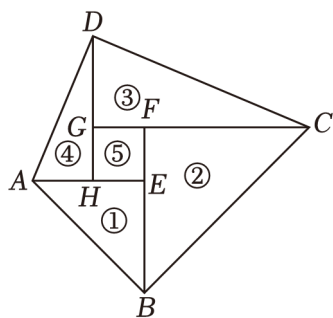


- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

题目 17 (2023· 湖州) 如图, 标号为①, ②, ③, ④的四个直角三角形和标号为⑤的正方形恰好拼成对角互补的四边形 $ABCD$, 相邻图形之间互不重叠也无缝隙, ①和②分别是等腰 $Rt\triangle ABE$ 和等腰 $Rt\triangle BCF$, ③和④分别是 $Rt\triangle CDG$ 和 $Rt\triangle DAH$, ⑤是正方形 $EFGH$, 直角顶点 E, F, G, H 分别在边 BF, CG, DH, AE 上.

(1) 若 $EF = 3\text{cm}$, $AE + FC = 11\text{cm}$, 则 BE 的长是 _____ cm .

(2) 若 $\frac{DG}{GH} = \frac{5}{4}$, 则 $\tan \angle DAH$ 的值是 _____.



一十三. 正多边形和圆 (共1小题)

题目 18 (2023·河北) 将三个相同的六角形螺母并排摆放在桌面上, 其俯视图如图1, 正六边形边长为2且各有一个顶点在直线 l 上. 两侧螺母不动, 把中间螺母抽出并重新摆放后, 其俯视图如图2, 其中, 中间正六边形的一边与直线 l 平行, 有两边分别经过两侧正六边形的一个顶点. 则图2中:

(1) $\angle \alpha =$ _____ 度;

(2) 中间正六边形的中心到直线 l 的距离为 _____ (结果保留根号).

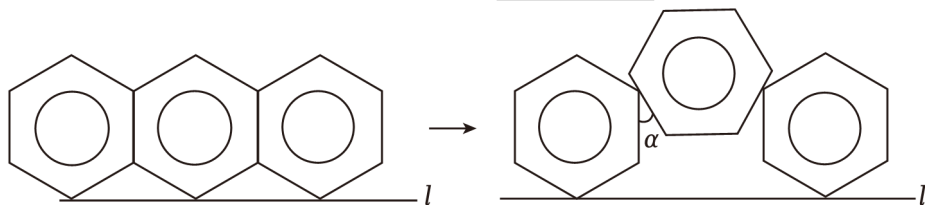


图1

图2

一十四. 扇形面积的计算 (共1小题)

题目 19 (2023·温州) 图1是 4×4 方格绘成的七巧板图案, 每个小方格的边长为 $\sqrt{2}$, 现将它剪拼成一个“房子”造型 (如图2), 过左侧的三个端点作圆, 并在圆内右侧部分留出矩形 $CDEF$ 作为题字区域 (点 A, E, D, B 在圆上, 点 C, F 在 AB 上), 形成一幅装饰画, 则圆的半径为 _____. 若点 A, N, M 在同一直线上, $AB \parallel PN$, $DE = \sqrt{6}EF$, 则题字区域的面积为 _____.

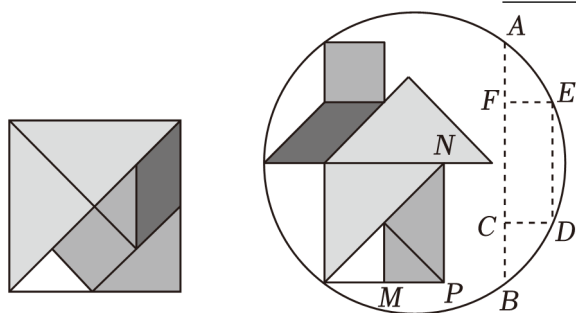
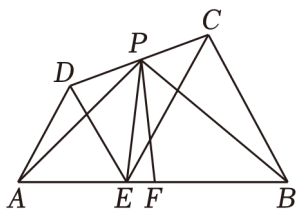


图1

图2

一十五. 轴对称—最短路线问题 (共1小题)

题目 20 (2023·安徽) 如图, E 是线段 AB 上一点, $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCE$ 是位于直线 AB 同侧的两个等边三角形, 点 P, F 分别是 CD, AB 的中点. 若 $AB = 4$, 则下列结论错误的是 ()



A. $PA + PB$ 的最小值为 $3\sqrt{3}$

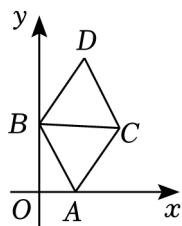
B. $PE + PF$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$

C. $\triangle CDE$ 周长的最小值为 6

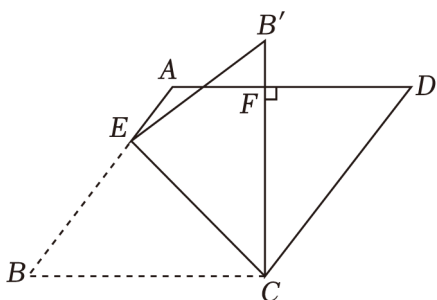
D. 四边形 $ABCD$ 面积的最小值为 $3\sqrt{3}$

一十六. 翻折变换 (折叠问题) (共 2 小题)

题目 21 (2023·乐至县) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 边长为 2 的等边 $\triangle ABC$ 的顶点 A 、 B 分别在 x 轴、 y 轴的正半轴上移动, 将 $\triangle ABC$ 沿 BC 所在直线翻折得到 $\triangle DBC$, 则 OD 的最大值为 _____.

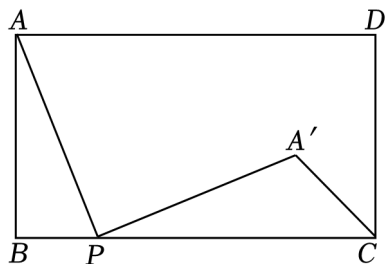


题目 22 (2023·南京) 如图, 在菱形纸片 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AB 上, 将纸片沿 CE 折叠, 点 B 落在 B' 处, $CB' \perp AD$, 垂足为 F . 若 $CF = 4\text{cm}$, $FB' = 1\text{cm}$, 则 $BE =$ _____ cm .



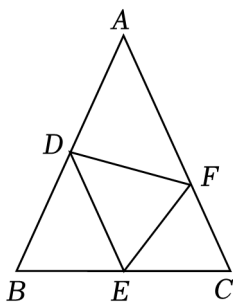
一十七. 旋转的性质 (共 1 小题)

题目 23 (2023·西宁) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 P 在 BC 边上, 连接 PA , 将 PA 绕点 P 顺时针旋转 90° 得到 PA' , 连接 CA' , 若 $AD = 9$, $AB = 5$, $CA' = 2\sqrt{2}$, 则 $BP =$ _____.

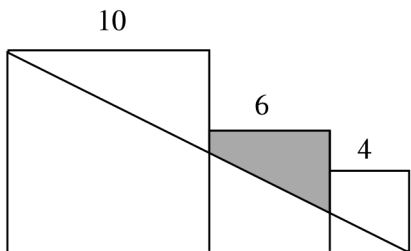


一十八. 相似三角形的判定与性质 (共 2 小题)

题目 24 (2023·杭州) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A < 90^\circ$, 点 D , E , F 分别在边 AB , BC , CA 上, 连接 DE , EF , FD , 已知点 B 和点 F 关于直线 DE 对称. 设 $\frac{BC}{AB} = k$, 若 $AD = DF$, 则 $\frac{CF}{FA} =$ _____ (结果用含 k 的代数式表示).

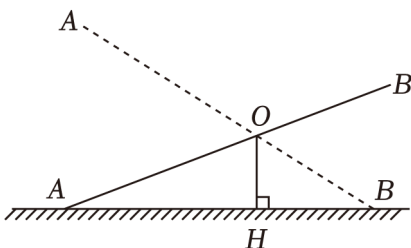


题目 25 (2023·广东) 边长分别为 10, 6, 4 的三个正方形拼接在一起, 它们的底边在同一直线上 (如图), 则图中阴影部分的面积为 _____.



一十九. 相似三角形的应用 (共 1 小题)

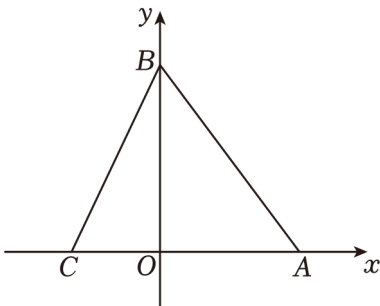
题目 26 (2023·南京) 如图, 不等臂跷跷板 AB 的一端 A 碰到地面时, 另一端 B 到地面的高度为 60cm; 当 AB 的一端 B 碰到地面时, 另一端 A 到地面的高度为 90cm, 则跷跷板 AB 的支撑点 O 到地面的高度 OH 是 ()



- A. 36cm B. 40cm C. 42cm D. 45cm

二十. 解直角三角形 (共 1 小题)

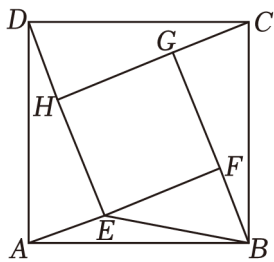
题目 27 (2023·丹东) 如图, 在平面直角坐标系中, 点 O 是坐标原点, 已知点 $A(3, 0)$, $B(0, 4)$, 点 C 在 x 轴负半轴上, 连接 AB , BC , 若 $\tan \angle ABC = 2$, 以 BC 为边作等边三角形 BCD , 则点 C 的坐标为 _____; 点 D 的坐标为 _____.



二十一. 解直角三角形的应用 (共 1 小题)

题目 28 (2023·杭州) 第二十四届国际数学家大会会徽的设计基础是 1700 多年前中国古代数学家赵爽的“弦图”. 如图, 在由四个全等的直角三角形 ($\triangle DAE$, $\triangle ABF$, $\triangle BCG$, $\triangle CDH$) 和中间一个小正方形 $EFGH$ 拼成的大正方形 $ABCD$ 中, $\angle ABF > \angle BAF$, 连接 BE . 设 $\angle BAF = \alpha$, $\angle BEF = \beta$, 若正方形 $EFGH$ 与正方

形 $ABCD$ 的面积之比为 $1:n$, $\tan\alpha = \tan^2\beta$, 则 $n = (\quad)$



A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

重难点 中考数学选填压轴题练习

一. 根的判别式(共1小题)

题目 1 (2023·广州) 已知关于 x 的方程 $x^2 - (2k-2)x + k^2 - 1 = 0$ 有两个实数根, 则 $\sqrt{(k-1)^2} - (\sqrt{2-k})^2$ 的化简结果是 ()

A. -1

B. 1

C. $-1-2k$

D. $2k-3$

【分析】首先根据关于 x 的方程 $x^2 - (2k-2)x + k^2 - 1 = 0$ 有两个实数根, 得判别式 $\Delta = [-(2k-2)]^2 - 4 \times 1 \times (k^2 - 1) \geq 0$, 由此可得 $k \leq 1$, 据此可对 $\sqrt{(k-1)^2} - (\sqrt{2-k})^2$ 进行化简.

【解答】解: $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - (2k-2)x + k^2 - 1 = 0$ 有两个实数根,

$\therefore$ 判别式 $\Delta = [-(2k-2)]^2 - 4 \times 1 \times (k^2 - 1) \geq 0$,

整理得: $-8k + 8 \geq 0$,

$\therefore k \leq 1$,

$\therefore k-1 \leq 0, 2-k > 0$,

$\therefore \sqrt{(k-1)^2} - (\sqrt{2-k})^2$

$= -(k-1) - (2-k)$

$= -1$.

故选: A.

二. 函数的图象(共1小题)

题目 2 (2023·温州) **【素材1】**某景区游览路线及方向如图1所示, ①④⑥各路段路程相等, ⑤⑦⑧各路段路程相等, ②③两路段路程相等.

【素材2】设游玩行走速度恒定, 经过每个景点都停留20分钟, 小温游路线①④⑤⑥⑦⑧用时3小时25分钟; 小州游路线①②③, 他离入口的路程 s 与时间 t 的关系(部分数据)如图2所示, 在2100米处, 他到出口还要走10分钟.

【问题】路线①③⑥⑦⑧各路段路程之和为 ()

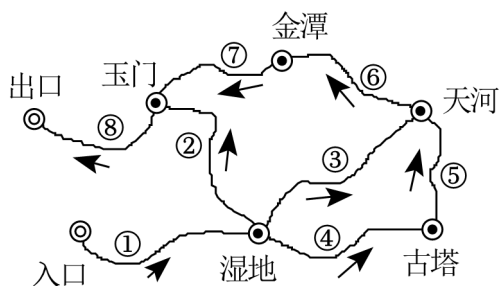


图1

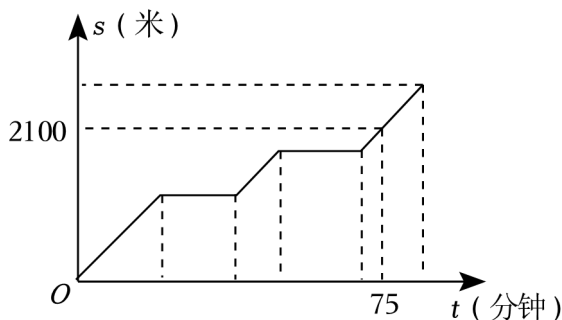


图2

A. 4200 米

B. 4800 米

C. 5200 米

D. 5400 米

【分析】设①④⑥各路段路程为 x 米, ⑤⑦⑧各路段路程为 y 米, ②③各路段路程为 z 米, 由题意及图象可知 $\frac{x+y+z}{45} = \frac{x+y+z-2100}{10}$, 然后根据“游玩行走速度恒定, 经过每个景点都停留20分钟, 小温游路线①④⑤⑥⑦⑧用时3小时25分钟”可进行求解.

【解答】解: 由图象可知: 小州游玩行走的时间为 $75 + 10 - 40 = 45$ (分钟),

小温游玩行走的时间为 $205 - 100 = 105$ (分钟),

设①④⑥各路段路程为 x 米, ⑤⑦⑧各路段路程为 y 米, ②③各路段路程为 z 米

由图象可得: $\frac{x+y+z}{45} = \frac{x+y+z-2100}{10}$,

解得: $x+y+z=2700$,

$\therefore$ 游玩行走的速度为: $(2700-2100) \div 10 = 60$ (米/分),

由于游玩行走速度恒定, 则小温游路线①④⑤⑥⑦⑧的路程为: $3x+3y=105 \times 60 = 6300$,

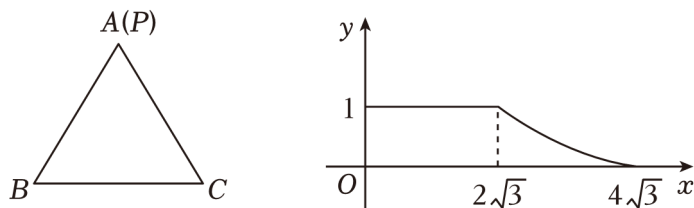
$\therefore x+y=2100$,

$\therefore$ 路线①③⑥⑦⑧各路段路程之和为: $2x+2y+z=x+y+z+x+y=2700+2100=4800$ (米).

故选: B.

三. 动点问题的函数图象 (共1小题)

题目 3 (2023·河南) 如图1, 点P从等边三角形ABC的顶点A出发, 沿直线运动到三角形内部一点, 再从该点沿直线运动到顶点B. 设点P运动的路程为x, $\frac{PB}{PC} = y$, 图2是点P运动时y随x变化的关系图象, 则等边三角形ABC的边长为 ()



A. 6

B. 3

C. $4\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{3}$

【分析】如图, 令点P从顶点A出发, 沿直线运动到三角形内部一点O, 再从点O沿直线运动到顶点B, 结合图象可知, 当点P在AO上运动时, $PB=PC$, $AO=2\sqrt{3}$, 易知 $\angle BAO = \angle CAO = 30^\circ$, 当点P在OB上运动时, 可知点P到达点B时的路程为 $4\sqrt{3}$, 可知 $AO=OB=2\sqrt{3}$, 过点O作 $OD \perp AB$, 解直角三角形可得 $AD=AO \cdot \cos 30^\circ$, 进而得出等边三角形ABC的边长.

【解答】解: 如图, 令点P从顶点A出发, 沿直线运动到三角形内部一点O, 再从点O沿直线运动到顶点B, 结合图象可知, 当点P在AO上运动时, $\frac{PB}{PC} = 1$,

$\therefore PB=PC$, $AO=2\sqrt{3}$,

又 $\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

$\therefore \angle BAC = 60^\circ$, $AB=AC$,

$\therefore \triangle APB \cong \triangle APC (SSS)$,

$\therefore \angle BAO = \angle CAO = 30^\circ$,

当点P在OB上运动时, 可知点P到达点B时的路程为 $4\sqrt{3}$,

$\therefore OB=2\sqrt{3}$, 即 $AO=OB=2\sqrt{3}$,

$\therefore \angle BAO = \angle ABO = 30^\circ$,

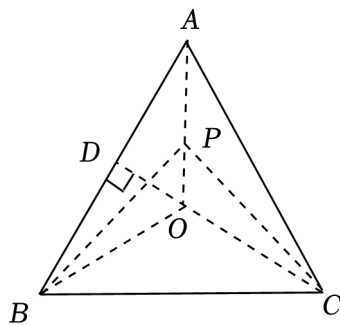
过点O作 $OD \perp AB$, 垂足为D,

$\therefore AD=BD$, 则 $AD=AO \cdot \cos 30^\circ = 3$,

$\therefore AB=AD+BD=6$,

即等边三角形ABC的边长为6.

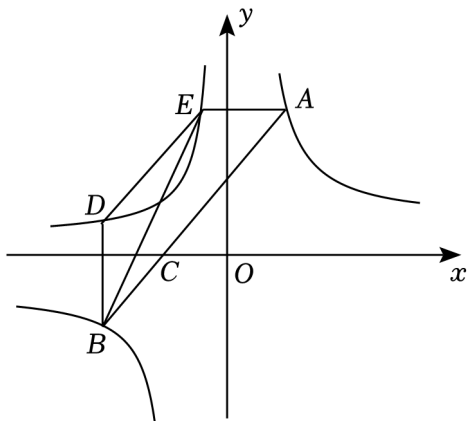
故选: A.



四. 反比例函数系数k的几何意义 (共1小题)

题目 4 (2023·宁波) 如图, 点A, B分别在函数 $y = \frac{a}{x}$ ($a > 0$) 图象的两支上 (A在第一象限), 连结AB交x轴于点C. 点D, E在函数 $y = \frac{b}{x}$ ($b < 0, x < 0$) 图象上, $AE \parallel x$ 轴, $BD \parallel y$ 轴, 连结DE, BE. 若 $AC =$

$2BC$, $\triangle ABE$ 的面积为 9, 四边形 $ABDE$ 的面积为 14, 则 $a-b$ 的值为 12, a 的值为 9.



【分析】依据题意, 设 $A(m, \frac{a}{m})$, 再由 $AE \parallel x$ 轴, $BD \parallel y$ 轴, $AC = 2BC$, 可得 $B(-2m, -\frac{a}{2m})$, $D(-2m, -\frac{b}{2m})$, $E(\frac{mb}{a}, \frac{a}{m})$, 再结合 $\triangle ABE$ 的面积为 9, 四边形 $ABDE$ 的面积为 14, 即可得解.

【解答】解: 设 $A(m, \frac{a}{m})$,

$\because AE \parallel x$ 轴, 且点 E 在函数 $y = \frac{b}{x}$ 上,

$\therefore E(\frac{mb}{a}, \frac{a}{m})$.

$\because AC = 2BC$, 且点 B 在函数 $y = \frac{a}{x}$ 上,

$\therefore B(-2m, -\frac{a}{2m})$.

$\because BD \parallel y$ 轴, 点 D 在函数 $y = \frac{b}{x}$ 上,

$\therefore D(-2m, -\frac{b}{2m})$.

$\because \triangle ABE$ 的面积为 9,

$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AE \times (\frac{a}{m} + \frac{a}{2m}) = \frac{1}{2} (m - \frac{mb}{a}) (\frac{a}{m} + \frac{a}{2m}) = \frac{1}{2} m \cdot \frac{a-b}{a} \cdot \frac{3a}{2m} = \frac{3(a-b)}{4} = 9$.

$\therefore a-b=12$.

$\because \triangle ABE$ 的面积为 9, 四边形 $ABDE$ 的面积为 14,

$\therefore S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} DB \cdot (\frac{mb}{a} + 2m) = \frac{1}{2} (-\frac{b}{2m} + \frac{a}{2m}) (\frac{b+2a}{a}) m = \frac{1}{4} (a-b) \cdot \frac{1}{m} \cdot (\frac{b+2a}{a}) \cdot m = 3(\frac{b+2a}{a}) = 5$.

$\therefore a = -3b$.

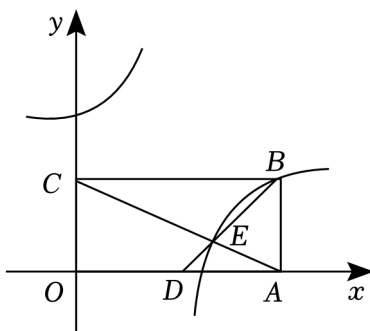
又 $a-b=12$.

$\therefore a=9$.

故答案为: 12, 9.

五. 反比例函数图象上点的坐标特征 (共 2 小题)

题目 5 (2023·德州) 如图, 在平面直角坐标系中, 四边形 $OABC$ 是矩形, 点 B 的坐标为 $(6, 3)$, D 是 OA 的中点, AC , BD 交于点 E , 函数 $y = \frac{ax+b}{x-3}$ 的图象过点 B , E . 且经过平移后可得到一个反比例函数的图象, 则该反比例函数的解析式 ()



A. $y = -\frac{15}{x}$

B. $y = \frac{9}{2x}$

C. $y = \frac{4}{x}$

D. $y = \frac{3}{x}$

【分析】先根据函数图象经过点 B 和点 E , 求出 a 和 b , 再由所得函数解析式即可解决问题.

【解答】解: 由题知,

$A(6, 0), B(6, 3), C(0, 3),$

令直线 AC 的函数表达式为 $y_1 = k_1x + b_1$,

则 $\begin{cases} 6k_1 + b_1 = 0 \\ b_1 = 3 \end{cases},$

解得 $\begin{cases} k_1 = -\frac{1}{2} \\ b_1 = 3 \end{cases},$

所以 $y_1 = -\frac{1}{2}x + 3.$

又因为点 D 为 OA 的中点,

所以 $D(3, 0),$

同理可得, 直线 BD 的函数解析式为 $y_2 = x - 3,$

由 $-\frac{1}{2}x + 3 = x - 3$ 得,

$x = 4,$

则 $y = 4 - 3 = 1,$

所以点 E 坐标为 $(4, 1).$

将 B, E 两点坐标代入函数解析式得, $\begin{cases} \frac{6a+b}{3} = 3 \\ 4a+b = 1 \end{cases},$

解得 $\begin{cases} a = 4 \\ b = -15 \end{cases}.$

所以 $y = \frac{4x-15}{x-3},$

则 $y = \frac{4(x-3)-3}{x-3} = -\frac{3}{x-3} + 4,$

将此函数图象向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 4 个单位长度,

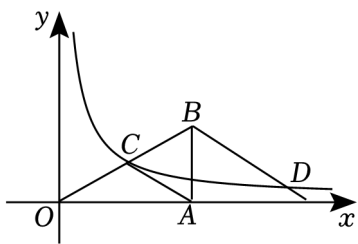
所得图象的函数解析式为: $y = \frac{3}{x}.$

故选: D.

题目 6 如图, O 是坐标原点, $Rt\triangle OAB$ 的直角顶点 A 在 x 轴的正半轴上, $AB = 2, \angle AOB = 30^\circ$, 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象经过斜边 OB 的中点 C .

(1) $k = \underline{\sqrt{3}};$

(2) D 为该反比例函数图象上的一点, 若 $DB \parallel AC$, 则 $OB^2 - BD^2$ 的值为 $\underline{4}.$



【分析】(1) 根据直角三角形的性质, 求出 A 、 B 两点坐标, 作出辅助线, 证得 $\triangle OPC \cong \triangle APC(HL)$, 利用勾股定理及待定系数法求函数解析式即可解答.

(2) 求出 AC 、 BD 的解析式, 再联立方程组, 求得点 D 的坐标, 分两种情况讨论即可求解.

【解答】解: (1) 在 $Rt\triangle OAB$ 中, $AB=2$, $\angle AOB=30^\circ$,

$$\therefore OB=4, OA=2\sqrt{3},$$

$$\therefore A(2\sqrt{3}, 0), B(2\sqrt{3}, 2),$$

$\therefore C$ 是 OB 的中点,

$$\therefore OC=BC=AC=2,$$

如图, 过点 C 作 $CP \perp OA$ 于 P ,

$$\therefore \triangle OPC \cong \triangle APC(HL),$$

$$\therefore OP=AP=\frac{1}{2}OA=\sqrt{3},$$

$$\text{在 } Rt\triangle OPC \text{ 中, } PC=\sqrt{OC^2-OP^2}=\sqrt{4-3}=1,$$

$$\therefore C(\sqrt{3}, 1).$$

$\therefore$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x} (k>0)$ 的图象经过斜边 OB 的中点 C ,

$$\therefore 1=\frac{k}{\sqrt{3}},$$

解得 $k=\sqrt{3}$.

故答案为: $\sqrt{3}$.

(2) 设直线 AC 的解析式为 $y=k_1x+b (k \neq 0)$,

$$\text{则 } \begin{cases} 2\sqrt{3}k_1+b=0 \\ \sqrt{3}k_1+b=1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k_1=-\frac{\sqrt{3}}{3} \\ b=2 \end{cases},$$

$$\therefore AC \text{ 的解析式为 } y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2,$$

$\therefore AC \parallel BD$,

$$\therefore \text{直线 } BD \text{ 的解析式为 } y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+4,$$

$\therefore$ 点 D 既在反比例函数图象上, 又在直线 BD 上,

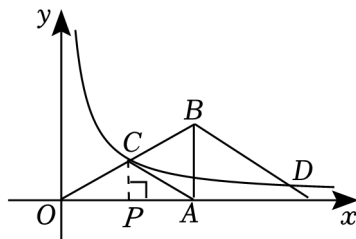
$$\therefore \text{联立得 } \begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}}{x} \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+4 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x_1=2\sqrt{3}+3 \\ y_1=2-\sqrt{3} \end{cases}, \begin{cases} x_2=2\sqrt{3}-3 \\ y_2=2+\sqrt{3} \end{cases},$$

当 D 的坐标为 $(2\sqrt{3}+3, 2-\sqrt{3})$ 时,

$$BD^2=(2\sqrt{3}+3-2\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3}-2)^2=9+3=12,$$

$$\therefore OB^2-BD^2=16-12=4;$$



当 D 的坐标为 $(2\sqrt{3}-3, 2+\sqrt{3})$ 时,

$$BD^2 = (2\sqrt{3}-3-2\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{3}-2)^2 = 9+3=12,$$

$$\therefore OB^2 - BD^2 = 16 - 12 = 4;$$

综上, $OB^2 - BD^2 = 4$.

故答案为: 4.

六. 反比例函数与一次函数的交点问题 (共1小题)

题目 7 (2023·湖州) 已知在平面直角坐标系中, 正比例函数 $y = k_1x (k_1 > 0)$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k_2}{x} (k_2 > 0)$ 的图象的两个交点中, 有一个交点的横坐标为 1, 点 $A(t, p)$ 和点 $B(t+2, q)$ 在函数 $y = k_1x$ 的图象上 ($t \neq 0$ 且 $t \neq -2$), 点 $C(t, m)$ 和点 $D(t+2, n)$ 在函数 $y = \frac{k_2}{x}$ 的图象上. 当 $p-m$ 与 $q-n$ 的积为负数时, t 的取值范围是 ()

A. $-\frac{7}{2} < t < -3$ 或 $\frac{1}{2} < t < 1$

B. $-\frac{7}{2} < t < -3$ 或 $1 < t < \frac{3}{2}$

C. $-3 < t < -2$ 或 $-1 < t < 0$

D. $-3 < t < -2$ 或 $0 < t < 1$

【分析】 将交点的横坐标 1 代入两个函数, 令二者函数值相等, 得 $k_1 = k_2$. 令 $k_1 = k_2 = k$, 代入两个函数表达式, 并分别将点 A 、 B 的坐标和点 C 、 D 的坐标代入对应函数, 进而分别求出 $p-m$ 与 $q-n$ 的表达式, 代入解不等式 $(p-m)(q-n) < 0$ 并求出 t 的取值范围即可.

【解答】 解: $\because y = k_1x (k_1 > 0)$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k_2}{x} (k_2 > 0)$ 的图象的两个交点中, 有一个交点的横坐标为 1,

$$\therefore k_1 = k_2.$$

$$\text{令 } k_1 = k_2 = k (k > 0), \text{ 则 } y = k_1x = kx, y = \frac{k_2}{x} = \frac{k}{x}.$$

$$\text{将点 } A(t, p) \text{ 和点 } B(t+2, q) \text{ 代入 } y = kx, \text{ 得 } \begin{cases} p = kt \\ q = k(t+2) \end{cases};$$

$$\text{将点 } C(t, m) \text{ 和点 } D(t+2, n) \text{ 代入 } y = \frac{k}{x}, \text{ 得 } \begin{cases} m = \frac{k}{t} \\ n = \frac{k}{t+2} \end{cases}.$$

$$\therefore p-m = kt - \left(\frac{k}{t}\right) = k\left(t - \frac{1}{t}\right), q-n = k(t+2) - \frac{k}{t+2} = k\left(t+2 - \frac{1}{t+2}\right),$$

$$\therefore (p-m)(q-n) = k^2\left(t - \frac{1}{t}\right)\left(t+2 - \frac{1}{t+2}\right) < 0,$$

$$\therefore \left(t - \frac{1}{t}\right)\left(t+2 - \frac{1}{t+2}\right) < 0.$$

$$\therefore \left(t - \frac{1}{t}\right)\left(t+2 - \frac{1}{t+2}\right) = \frac{t^2-1}{t} \cdot \frac{(t+2)^2-1}{t+2} = \frac{(t+1)^2(t-1)(t+3)}{t(t+2)} < 0,$$

$$\therefore \frac{(t-1)(t+3)}{t(t+2)} < 0,$$

$$\therefore t(t-1)(t+2)(t+3) < 0.$$

$$\text{① 当 } t < -3 \text{ 时, } t(t-1)(t+2)(t+3) > 0,$$

$\therefore t < -3$ 不符合要求, 应舍去.

$$\text{② 当 } -3 < t < -2 \text{ 时, } t(t-1)(t+2)(t+3) < 0,$$

$\therefore -3 < t < -2$ 符合要求.

$$\text{③ 当 } -2 < t < 0 \text{ 时, } t(t-1)(t+2)(t+3) > 0,$$

$\therefore -2 < t < 0$ 不符合要求, 应舍去.

④当 $0 < t < 1$ 时, $t(t-1)(t+2)(t+3) < 0$,

$\therefore 0 < t < 1$ 符合要求.

⑤当 $t > 1$ 时, $t(t-1)(t+2)(t+3) > 0$,

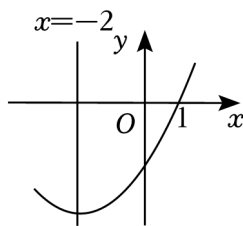
$\therefore t > 1$ 不符合要求, 应舍去.

综上, t 的取值范围是 $-3 < t < -2$ 或 $0 < t < 1$.

故选: D.

七. 二次函数图象与系数的关系 (共 3 小题)

题目 8 (2023·乐至县) 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的对称轴为直线 $x = -2$, 且过点 $(1, 0)$. 现有以下结论: ① $abc < 0$; ② $5a + c = 0$; ③ 对于任意实数 m , 都有 $2b + bm \leq 4a - am^2$; ④ 若点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 是图象上任意两点, 且 $|x_1 + 2| < |x_2 + 2|$, 则 $y_1 < y_2$, 其中正确的结论是 ()



A. ①②

B. ②③④

C. ①②④

D. ①②③④

【分析】 根据题意和函数图象, 利用二次函数的性质, 可以判断各个小题中的结论是否正确, 从而可以解答本题.

【解答】 解: 由图象可得,

$a > 0, b > 0, c < 0$,

$\therefore abc < 0$, 故①正确,

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的对称轴为直线 $x = -2$, 且过点 $(1, 0)$.

$\therefore -\frac{b}{2a} = -2, a + b + c = 0$,

$\therefore b = 4a$,

$\therefore a + b + c = a + 4a + c = 0$, 故 $5a + c = 0$, 故②正确,

$\therefore$ 当 $x = -2$ 时, $y = 4a - 2b + c$ 取得最小值,

$\therefore am^2 + bm + c \geq 4a - 2b + c$, 即 $2b + bm \geq 4a - am^2 (m \text{ 为任意实数})$, 故③错误,

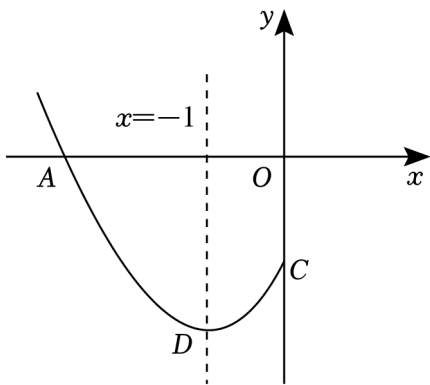
$\therefore$ 抛物线开口向上, 对称轴为直线 $x = -2$,

若点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 是图象上任意两点, 且 $|x_1 + 2| < |x_2 + 2|$,

$\therefore y_1 < y_2$, 故④正确;

故选: C.

题目 9 (2023·丹东) 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与 x 轴的一个交点为 $A(-3, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 点 D 是抛物线的顶点, 对称轴为直线 $x = -1$, 其部分图象如图所示, 则以下 4 个结论: ① $abc > 0$; ② $E(x_1, y_1)$, $F(x_2, y_2)$ 是抛物线 $y = ax^2 + bx (a \neq 0)$ 上的两个点, 若 $x_1 < x_2$, 且 $x_1 + x_2 < -2$, 则 $y_1 < y_2$; ③ 在 x 轴上有一动点 P , 当 $PC + PD$ 的值最小时, 则点 P 的坐标为 $(-\frac{3}{7}, 0)$; ④ 若关于 x 的方程 $ax^2 + b(x - 2) + c = -4 (a \neq 0)$ 无实数根, 则 b 的取值范围是 $b < 1$. 其中正确的结论有 ()



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【分析】根据所给函数图象可得出 a, b, c 的正负, 再结合抛物线的对称性和增减性即可解决问题.

【解答】解: 根据所给函数图象可知,

$$a > 0, b > 0, c < 0,$$

$$\text{所以 } abc < 0,$$

故①错误.

因为抛物线 $y = ax^2 + bx$ 的图象可由抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象沿 y 轴向上平移 $|c|$ 个单位长度得到, 所以抛物线 $y = ax^2 + bx$ 的增减性与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的增减性一致.

则当 $x < -1$ 时, y 随 x 的增大而减小,

$$\text{又 } x_1 < x_2, \text{ 且 } x_1 + x_2 < -2,$$

$$\text{若 } x_2 < -1,$$

则 E, F 两点都在对称轴的左侧,

$$\text{此时 } y_1 > y_2.$$

故②错误.

作点 C 关于 x 轴的对称点 C' , 连接 $C'D$ 与 x 轴交于点 P , 连接 PC ,

此时 $PC + PD$ 的值最小.

将 $A(-3, 0)$ 代入二次函数解析式得,

$$9a - 3b + c = 0,$$

$$\text{又 } -\frac{b}{2a} = -1,$$

$$\text{即 } b = 2a,$$

$$\text{所以 } 9a - 6a + c = 0,$$

$$\text{则 } c = -3a.$$

又抛物线与 y 轴的交点坐标为 $C(0, c)$,

则点 C 坐标为 $(0, -3a)$,

所以点 C' 坐标为 $(0, 3a)$.

$$\text{又当 } x = -1 \text{ 时, } y = -4a,$$

$$\text{即 } D(-1, -4a).$$

设直线 $C'D$ 的函数表达式为 $y = kx + 3a$,

将点 D 坐标代入得,

$$-k + 3a = -4a,$$

$$\text{则 } k = 7a,$$

所以直线 $C'D$ 的函数表达式为 $y = 7ax + 3a$.

将 $y = 0$ 代入得,

$$x = -\frac{3}{7}.$$

所以点 P 的坐标为 $(-\frac{3}{7}, 0)$.

故③正确.

将方程 $ax^2 + b(x-2) + c = -4$ 整理得,

$$ax^2 + bx + c = 2b - 4,$$

因为方程没有实数根,

所以抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = 2b - 4$ 没有公共点,

所以 $2b - 4 < -4a$,

则 $2b - 4 < -2b$,

解得 $b < 1$,

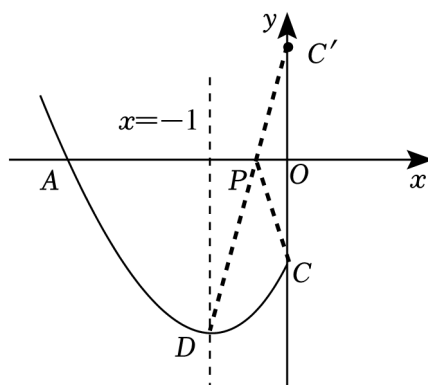
又 $b > 0$,

所以 $0 < b < 1$.

故④错误.

所以正确的有③.

故选: A.



题目 10 (2023·河北) 已知二次函数 $y = -x^2 + m^2x$ 和 $y = x^2 - m^2$ (m 是常数) 的图象与 x 轴都有两个交点, 且这四个交点中每相邻两点间的距离都相等, 则这两个函数图象对称轴之间的距离为 ()

A. 2

B. m^2

C. 4

D. $2m^2$

【分析】 求出三个交点的坐标, 再构建方程求解.

【解答】 解: 令 $y = 0$, 则 $-x^2 + m^2x = 0$ 和 $x^2 - m^2 = 0$,

$\therefore x = 0$ 或 $x = m^2$ 或 $x = -m$ 或 $x = m$,

$\therefore$ 这四个交点中每相邻两点间的距离都相等,

若 $m > 0$, 则 $m^2 = 2m$,

$\therefore m = 2$,

若 $m < 0$ 时, 则 $m^2 = -2m$,

$\therefore m = -2$.

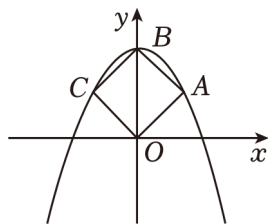
$\therefore$ 抛物线 $y = x^2 - m^2$ 的对称轴为直线 $x = 0$, 抛物线 $y = -x^2 + m^2x$ 的对称轴为直线 $x = \frac{m^2}{2}$,

$\therefore$ 这两个函数图象对称轴之间的距离 $= \frac{m^2}{2} = 2$.

故选: A.

八. 二次函数图象上点的坐标特征 (共1小题)

题目 11 (2023·广东) 如图, 抛物线 $y = ax^2 + c$ 经过正方形 $OABC$ 的三个顶点 A, B, C , 点 B 在 y 轴上, 则 ac 的值为 ()



A. -1

B. -2

C. -3

D. -4

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/868024053073006072>