

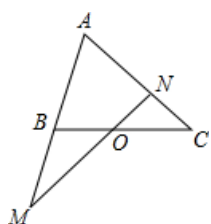
2023-2024 学年安徽省安庆一中高三冲刺模拟数学试卷

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 O 是 BC 的中点，过点 O 的直线分别交直线 AB ， AC 于不同的两点 M ， N ，若 $\vec{AB} = m\vec{AM}$ ， $\vec{AC} = n\vec{AN}$ ，则 $m+n =$ ()

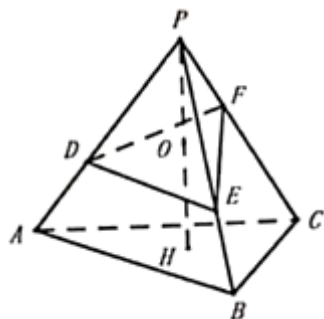


- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. 3

2. 设 F_1 ， F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，若双曲线右支上存在一点 P ，使 $(\vec{OP} + \vec{OF_2}) \cdot \vec{F_2P} = 0$ (O 为坐标原点)，且 $\vec{PF_1} = \sqrt{3}\vec{PF_2}$ ，则双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ B. $\sqrt{2}+1$ C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ D. $\sqrt{3}+1$

3. 如图，正四面体 $P-ABC$ 的体积为 V ，底面积为 S ， O 是高 PH 的中点，过 O 的平面 α 与棱 PA 、 PB 、 PC 分别交于 D 、 E 、 F ，设三棱锥 $P-DEF$ 的体积为 V_0 ，截面三角形 DEF 的面积为 S_0 ，则 ()



- A. $V \leq 8V_0$ ， $S \leq 4S_0$ B. $V \leq 8V_0$ ， $S \geq 4S_0$
- C. $V \geq 8V_0$ ， $S \leq 4S_0$ D. $V \geq 8V_0$ ， $S \geq 4S_0$

4. 已知集合 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{2, 3, 4, 5\}$, 则 $(A \cap B) \cup C =$ ()

- A. $\{1, 2, 3, 5\}$ B. $\{1, 2, 3, 4\}$ C. $\{2, 3, 4, 5\}$ D. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

5. 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 是平面内互不相等的两个非零向量, 且 $|\vec{a}| = 1$, $\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 150° , 则 $|\vec{b}|$ 的取值范围是 ()

- A. $(0, \sqrt{3}]$ B. $[1, \sqrt{3}]$ C. $(0, 2]$ D. $[\sqrt{3}, 2]$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是线段 BC 上任意一点, $2\vec{AM} = \vec{AD}$, $\vec{BM} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$, 则 $\lambda + \mu =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. 2

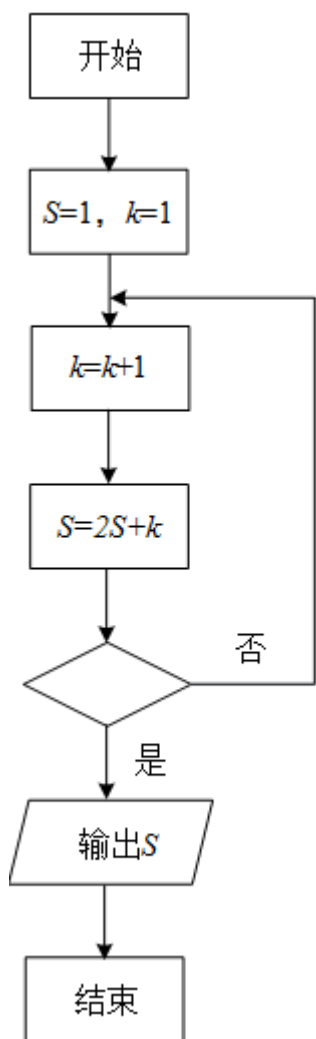
7. 已知集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | x^2 - x + 2 > 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1, 0\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

8. 已知集合 $A = \{x | y = \sqrt{2 - x^2}\}$, $B = \{x | \frac{x-2}{x+1} \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $[-1, 2]$ B. $[-1, \sqrt{2}]$ C. $(-1, \sqrt{2}]$ D. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

9. 某程序框图如图所示, 若输出的 $S = 120$, 则判断框内为 ()



- A. $k > 7?$ B. $k > 6?$ C. $k > 5?$ D. $k > 4?$

10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的渐近线方程为 $\sqrt{3}x \pm y = 0$, 则 $b =$ ()

- A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $4\sqrt{3}$

11. 在区间 $[-1, 1]$ 上随机取一个实数 k , 使直线 $y = k(x+3)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相交的概率为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

12. 复数 $\frac{1+2i}{2-i} =$ ().

- A. i B. $1+i$ C. $-i$ D. $1-i$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 根据记载，最早发现勾股定理的人应是我国西周时期的数学家商高，商高曾经和周公讨论过“勾 3 股 4 弦 5”的问题. 现有 $\triangle ABC$ 满足“勾 3 股 4 弦 5”，其中“股” $AB = 4$, D 为“弦” BC 上一点 (不含端点), 且 $\triangle ABD$

满足勾股定理, 则 $(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上, $PA=BC=5, PB=AC=\sqrt{15}, PC=AB=2\sqrt{5}$, 则球 O 的表面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 经过点 $(3, 4)$, 则该双曲线的准线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 数据 $1, 3, 5, 7, 9$ 的标准差为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = mx^2 \left(\ln x + \frac{1}{2} \right)$.

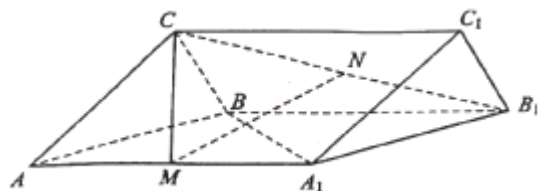
(I) 若 $m=1$, 求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 当 $m \in \mathbb{R}$ 时, 要使 $f(x) > x \ln x$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

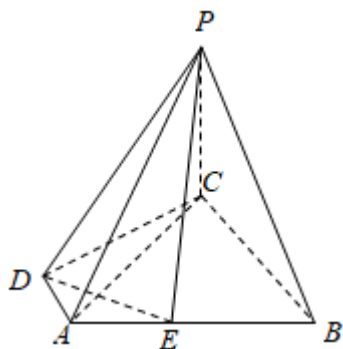
18. (12 分) 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面 ABC 是等边三角形, 侧面 BCC_1B_1 是矩形, $AB=A_1B$, N 是 B_1C 的中点, M 是棱 AA_1 上的点, 且 $AA_1 \perp CM$.

(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 ABC ;

(2) 若 $AB \perp A_1B$, 求二面角 $A-CM-N$ 的余弦值.



19. (12 分) 如图所示, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PC \perp$ 底面 $ABCD$, $PC=CD=2$, E 为 AB 的中点, 底面四边形 $ABCD$ 满足 $\angle ADC = \angle DCB = 90^\circ$, $AD=1$, $BC=1$.



(I) 求证: 平面 $PDE \perp$ 平面 PAC ;

(II) 求直线 PC 与平面 PDE 所成角的正弦值;

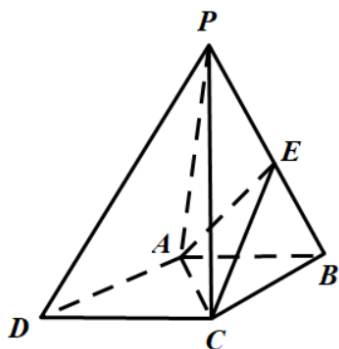
(Ⅲ) 求二面角 $D-PE-B$ 的余弦值.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \tan x + a \sin 2x - 2x \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2} \right)$.

(1) 若 $a = 0$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

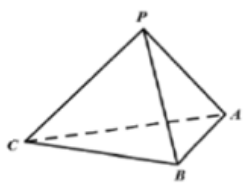
21. (12 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle BAD = 120^\circ$, $PA = 2$, $PB = PC = PD$, E 是 PB 的中点.



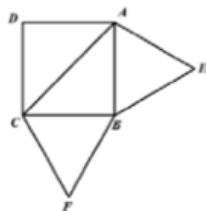
(1) 证明: $PA \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 设 F 是直线 BC 上的动点, 当点 E 到平面 PAF 距离最大时, 求面 PAF 与面 EAC 所成二面角的正弦值.

22. (10 分) 已知三棱锥 $P-ABC$ (如图一) 的平面展开图 (如图二) 中, 四边形 $ABCD$ 为边长等于 $\sqrt{2}$ 的正方形, $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 均为正三角形, 在三棱锥 $P-ABC$ 中:



图一



图二

(1) 证明: 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ;

(2) 若点 M 在棱 PA 上运动, 当直线 BM 与平面 PAC 所成的角最大时, 求直线 MA 与平面 MBC 所成角的正弦值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

连接 AO ，因为 O 为 BC 中点，可由平行四边形法则得 $\vec{AO} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ ，再将其用 $\vec{AM}$ ， $\vec{AN}$ 表示.由 M 、 O 、 N

三点共线可知，其表达式中的系数和 $\frac{m}{2} + \frac{n}{2} = 1$ ，即可求出 $m+n$ 的值.

【详解】

连接 AO ，由 O 为 BC 中点可得，

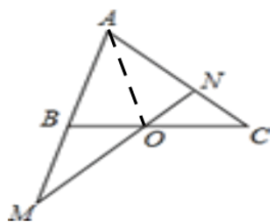
$$\vec{AO} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{m}{2}\vec{AM} + \frac{n}{2}\vec{AN},$$

因 M 、 O 、 N 三点共线，

$$\therefore \frac{m}{2} + \frac{n}{2} = 1,$$

$$\therefore m+n=2.$$

故选：C.



【点睛】

本题考查了向量的线性运算，由三点共线求参数的问题，熟记向量的共线定理是关键.属于基础题.

2、D

【解析】

利用向量运算可得 $2\vec{OA} \cdot \vec{F_2P} = 0$ ，即 $\vec{OA} \perp \vec{F_2P}$ ，由 OA 为 $\triangle PF_1F_2$ 的中位线，得到 $PF_1 \perp PF_2$ ，所以

$|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (2c)^2$ ，再根据双曲线定义即可求得离心率.

【详解】

取 PF_2 的中点 A ，则由 $(\vec{OP} + \vec{OF_2}) \cdot \vec{F_2P} = 0$ 得 $2\vec{OA} \cdot \vec{F_2P} = 0$ ，

即 $\vec{OA} \perp \vec{F_2P}$ ；

在 $\triangle PF_1F_2$ 中， OA 为 $\triangle PF_1F_2$ 的中位线，

所以 $PF_1 \perp PF_2$ ，

$$\text{所以 } |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (2c)^2;$$

$$\text{由双曲线定义知 } |PF_1| - |PF_2| = 2a, \text{ 且 } |PF_1| = \sqrt{3}|PF_2|, \text{ 所以 } (\sqrt{3} - 1)c = 2a,$$

$$\text{解得 } e = \sqrt{3} + 1,$$

故选：D

【点睛】

本题综合考查向量运算与双曲线的相关性质，难度一般.

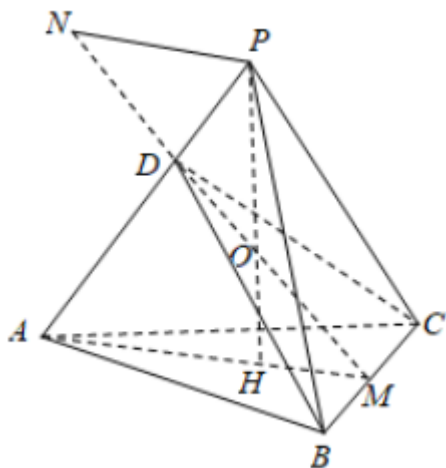
3、A

【解析】

设 $AB = 2$ ，取 EF 与 BC 重合时的情况，计算出 S_0 以及 V_0 的值，利用排除法可得出正确选项.

【详解】

如图所示，利用排除法，取 EF 与 BC 重合时的情况.



不妨设 $AB = 2$ ，延长 MD 到 N ，使得 $PN \parallel AM$.

$$\text{Q } PO = OH, \therefore PN = MH, \text{ Q } AH = 2MH, \therefore AM = 3MH = 3PN, \text{ 则 } \frac{PD}{AD} = \frac{1}{3},$$

$$\text{由余弦定理得 } BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \frac{\pi}{3} = 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{13}{4},$$

$$DM = \sqrt{BD^2 - BM^2} = \frac{3}{2}, \quad S_0 = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\text{又 } S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}, \therefore \frac{4S_0}{S} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} > 1,$$

当平面 $DEF \parallel$ 平面 ABC 时， $S = 4S_0$ ， $\therefore S \leq 4S_0$ ，排除 B、D 选项；

因为 $\frac{PD}{AD} = \frac{1}{3}$, $\therefore V_0 = \frac{1}{4}V$, 此时, $\frac{8V_0}{V} = 2 > 1$,

当平面 $DEF \parallel$ 平面 ABC 时, $8V_0 = V$, $\therefore 8V_0 \geq V$, 排除 C 选项.

故选: A.

【点睛】

本题考查平行线分线段成比例定理、余弦定理、勾股定理、三棱锥的体积计算公式、排除法, 考查了空间想象能力、推理能力与计算能力, 属于难题.

4、D

【解析】

根据集合的基本运算即可求解.

【详解】

解: $Q A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{2, 3, 4, 5\}$,

则 $(A \cap B) \cup C = \{1, 3\} \cup \{2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

故选: D.

【点睛】

本题主要考查集合的基本运算, 属于基础题.

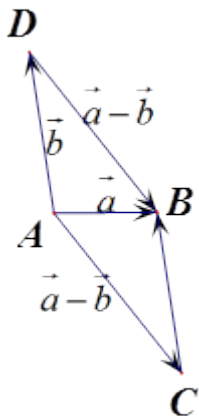
5、C

【解析】

试题分析: 如下图所示, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$, 因为 $\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 150° , 即 $\angle DAB = 150^\circ$,

所以 $\angle ADB = 30^\circ$, 设 $\angle DBA = \theta$, 则 $0 < \theta < 150^\circ$, 在三角形 ABD 中, 由正弦定理得 $\frac{|\vec{a}|}{\sin 30^\circ} = \frac{|\vec{b}|}{\sin \theta}$, 所以

$|\vec{b}| = \frac{|\vec{a}|}{\sin 30^\circ} \times \sin \theta = 2 \sin \theta$, 所以 $0 < |\vec{b}| \leq 2$, 故选 C.



考点：1. 向量加减法的几何意义；2. 正弦定理；3. 正弦函数性质.

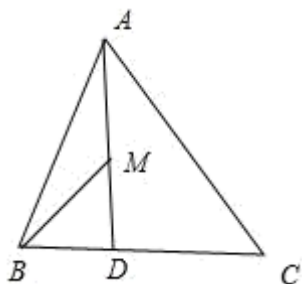
6、A

【解析】

设 $\vec{BD} = k\vec{BC}$ ，用 $\vec{AB}, \vec{AC}$ 表示出 $\vec{BM}$ ，求出 λ, μ 的值即可得出答案.

【详解】

设 $\vec{BD} = k\vec{BC} = k\vec{AC} - k\vec{AB}$



由 $2\vec{AM} = \vec{AD}$

$$\therefore \vec{BM} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BD}) = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{k}{2}\vec{AC} - \frac{k}{2}\vec{AB}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{k}{2}\right)\vec{AB} + \frac{k}{2}\vec{AC},$$

$$\therefore \lambda = -\frac{1}{2} - \frac{k}{2}, \mu = \frac{k}{2},$$

$$\therefore \lambda + \mu = -\frac{1}{2}.$$

故选：A

【点睛】

本题考查了向量加法、减法以及数乘运算，需掌握向量加法的三角形法则以及向量减法的几何意义，属于基础题.

7、D

【解析】

先求出集合 B ，再与集合 A 求交集即可.

【详解】

由已知， $x^2 - x + 2 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} > 0$ ，故 $B = R$ ，所以 $A \cap B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

故选：D.

【点睛】

本题考查集合的交集运算，考查学生的基本运算能力，是一道容易题.

8、C

【解析】

计算 $A = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $B = (-1, 2]$, 再计算交集得到答案.

【详解】

$$A = \{x \mid y = \sqrt{2-x^2}\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \quad B = \{x \mid \frac{x-2}{x+1} \leq 0\} = (-1, 2], \quad \text{故 } A \cap B = (-1, \sqrt{2}].$$

故选: C.

【点睛】

本题考查了交集运算, 意在考查学生的计算能力.

9、C

【解析】

程序在运行过程中各变量值变化如下表:

	K	S	是否继续循环
循环前	1	1	
第一圈	2	4	是
第二圈	3	11	是
第三圈	4	26	是
第四圈	5	57	是
第五圈	6	120	否

故退出循环的条件应为 $k > 5$?

本题选择 C 选项.

点睛: 使用循环结构寻数时, 要明确数字的结构特征, 决定循环的终止条件与数的结构特征的关系及循环次数. 尤其是统计数时, 注意要统计的数的出现次数与循环次数的区别.

10、A

【解析】

根据双曲线方程 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$), 确定焦点位置, 再根据渐近线方程 $\sqrt{3}x \pm y = 0$ 得到 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ 求解.

【详解】

因为双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$),

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/868075024137006055>