嘉定一中 2023 学年第二学期高二年级数学期中

一、填空题（本大题满分 54 分，1—6 每题 4 分，7—12 每题 5 分）

1. 已知等比数列 a_n 的首项 $a_1\ \ 1, a_4\ \ \frac{1}{64}$，则公比 q ______

2. 抛物线 $y^2\ \ 4x$ 的焦点坐标是______.

3. 正方体 $ABCD\ \ A_1B_1C_1D_1$ 中，异面直线 AB_1 与 BD 所成角大小为______

4. 边长为 2 的正方形 $ABCD$ 绕 BC 旋转形成一个圆柱，则该圆柱的表面积为______.

5. 已知曲线 $f\ x\ \ 2x^3\ \ 3x$，过点 $(0,0)$ 作曲线的切线，则切线方程______.

6. “ABC 三个内角的度数构成等差数列”是“ABC 中有一个内角为 60”的______条件.

7. 无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n\ \ (\sin x)^n$，前 n 项的和为 S_n，若 $\lim_{n} S_n\ \ 1$，则满足条件的 x 的取值集合为______.

8. 已知 P 为双曲线 $x^2\ \ y^2\ \ 1$ 右支上的一个动点，若点 P 到直线 $y\ \ x\ \ 2$ 的距离大于 m 恒成立，则实数 m 的取值范围是______.

9. 在空间直角坐标系 $O\ \ xyz$ 中，已知 $A(1,2,0)$，$B(2,1,0)$，$C(1,1,3)$，则三棱锥 $O\ \ ABC$ 的体积为______.

10. 已知 F_1，F_2 为椭圆 ：$\frac{x^2}{a^2}\ \ y^2\ \ 1(a\ \ 1)$ 的左右焦点，A 为 的上顶点，直线 l 经过点 F_1 且与 交于 B，C 两点；若 l 垂直平分线段 AF_2，则△ABC 的周长是______.

11. 已知曲线方程 $x|x|\ \ y|y|\ \ 1$，若过 $A(1,0)$ 的直线 l 与该曲线恰有三个不同的交点，则直线 l 的倾斜角的取值范围是______.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，若动点 P（a，b）到两直线 l_1：y=x 和 l_2：y=－x+2 的距离之和为 $2\sqrt{2}$，则 a^2+b^2 的最大值为__.

二、选择题（本大题满分 18 分，13—14 每题 4 分，15—16 每题 5 分）

13. 下列求导数运算正确的是(　　)

A. $(x^3)\ \ 2x^2$

B. $(\lg x)\ \ \frac{1}{x}$

C. $(x^3\ \ 5)\ \ 3x^2\ \ 5$

D. $(\sin x\cos x)\ \ \cos 2x$

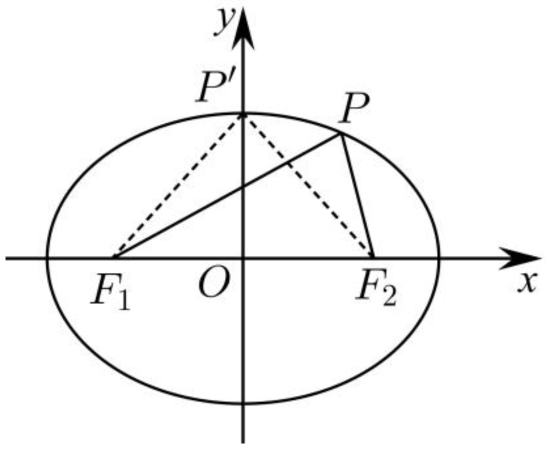
14. 无穷等差数列 a_n 的首项 $a_1\ \ 0$，公差 $d\ \ 0$，a_n 的前 n 项的和为 S_n，则（　　）

A. S_n 单调递减

B. S_n 单调递增

C. S_n 有最大值　　D. S_n 有最小值

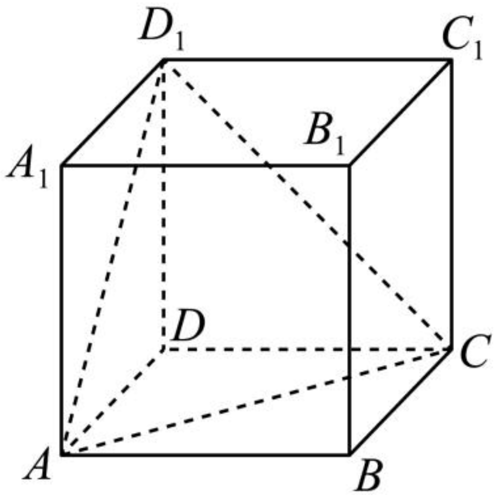
15. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2，椭圆存在一点 P，若 $\angle F_1PF_2=120^\circ$，则椭圆的离心率取值范围为（　　）



A. $[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$　　B. $[\frac{1}{2},1)$

C. $[\frac{\sqrt{3}}{2},1)$　　D. $[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$

16. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则下列四个命题：



①点 P 在直线 BC_1 上运动时，直线 AP 与直线 A_1D 所成角的大小不变

②点 P 在直线 BC_1 上运动时，直线 AP 与平面 ACD_1 所成角的大小不变

③点 P 在直线 BC_1 上运动时，二面角 $P-AD_1-C$ 的大小不变

④点 P 在直线 BC_1 上运动时，三棱锥 $A-D_1PC$ 的体积不变

其中的真命题是　（　　）

A. ①③　　B. ③④　　C. ①②④　　D. ①③④

三、解答题（本大题满分 78 分）

17. 蜥蜴的体温与阳光照射的关系近似满足函数关系式：$T(t)=\frac{120}{t+5}+15$，其中 $T(t)$ 为蜥蜴的体温（单位：$^\circ C$），t 为太阳落山后的时间（单位：min）.

（1）求 $T(10)$，并解释其实际意义；

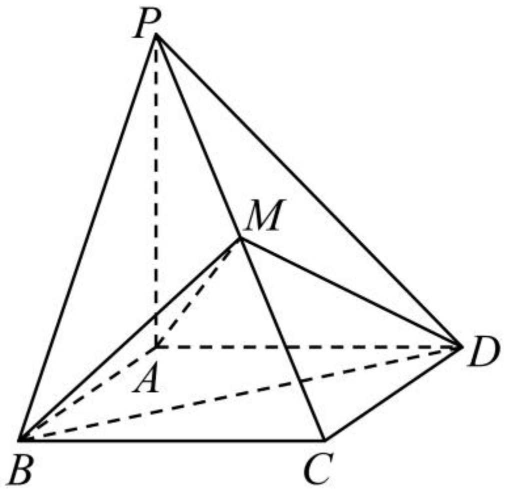
（2）蜥蜴体温的瞬时变化率为 $1\ C/\min$ 时的时刻 t 是多少（精确到 0.01）？

18. 设等差数列 a_n 的前 n 项和为 S_n，且 $a_4 \quad 10$.

（1）若 $S_{20} \quad 590$，求 a_n 的公差；

（2）若 $a_1 \quad Z$，且 S_7 是数列 S_n 中最大的项，求 a_1 所有可能的值.

19. 如图，在四棱锥 $P \quad ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，PA 平面 $ABCD$，M 为 PC 中点.



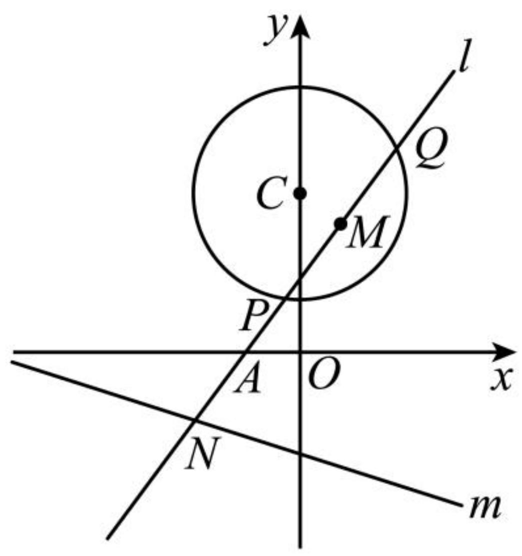
（1）求证：$PA//$平面 MBD；

（2）若 $AB \quad AD \quad PA \quad 2$，$BAD \quad 120$，

①求四棱锥 $M \quad ABCD$ 的体积；

②求二面角 $B \quad AM \quad D$ 的大小.

20. 已知过点 $A \quad 1,0$ 的直线 l 与圆 $C: x^2 \quad y \quad 3^2 \quad 4$ 相交于 P、Q 两点，M 是弦 PQ 的中点，且直线 l 与直线 $m: x \quad 3y \quad 6 \quad 0$ 相交于点 N.

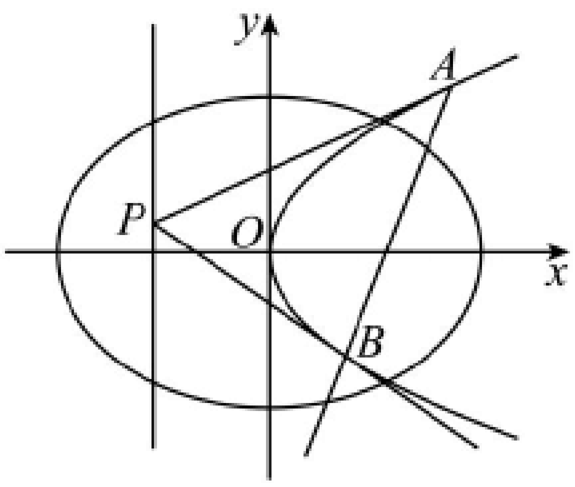


（1）当直线 l 与直线 m 垂直时，求证：直线 l 经过圆心 C；

（2）当弦长 $|PQ| \quad 2\sqrt{3}$ 时，求直线 l 的方程；

（3）设 $t \quad AM \quad AN$，试问 t 是否为定值，若为定值，请求出 t 的值；若不为定值，请说明理由.

21. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{3} \quad \frac{y^2}{2} \quad 1$，以椭圆 C_1 的右焦点为焦点的抛物线 C_2 的顶点为原点，点 P 是抛物线 C_2 的准线上任意一点，过点 P 作抛物线 C_2 的两条切线 PA、PB，其中 A、B 为切点，设直线 PA、PB 的斜率分别为 k_1、k_2.



（1）求抛物线C_2的标准方程及其准线方程；

（2）计算$k_1 \cdot k_2$的值；

（3）求证：直线 AB 过定点，并求出这个定点的坐标；

嘉定一中 2023 学年第二学期高二年级数学期中

一、填空题（本大题满分 54 分，1—6 每题 4 分，7—12 每题 5 分）

1. 已知等比数列 a_n 的首项 $a_1 \quad 1, a_4 \quad \frac{1}{64}$，则公比 q ________

【答案】$\frac{1}{4}$

【分析】由等比数列的性质可得 $q^3 \quad \frac{a_4}{a_1}$，然后运算即可得解.

【详解】解：由等比数列的性质可得 $q^3 \quad \frac{a_4}{a_1} \quad \frac{1}{64}$，

解得：$q \quad \frac{1}{4}$，

故答案为：$\frac{1}{4}$.

【点睛】本题考查了等比数列基本量的求法，重点考查了运算能力，属基础题.

2. 抛物线 $y^2 \quad 4x$ 的焦点坐标是______.

【答案】$(1,0)$

【详解】抛物线 $y^2 \quad 4x$ 的焦点在 x 轴上，且 $p \quad 2$，$\frac{p}{2} \quad 1$，所以抛物线 $y^2 \quad 4x$ 的焦点坐标为 $1,0$，故答案为 $1,0$.

3. 正方体 $ABCD \quad A_1B_1C_1D_1$ 中，异面直线 AB_1 与 BD 所成角大小为______

【答案】$\frac{}{3}$##60

【分析】连接 AD_1、B_1D_1，，证明 $B_1D_1//BD$，可得 AB_1D_1 即为异面直线 AB_1 与 BD 所成角，在 AB_1D_1 求 AB_1D_1 即可求解.

【详解】如图，连接 AD_1、B_1D_1，

因为 $BB_1//DD_1$，$BB_1 \quad DD_1$，

所以四边形 BB_1D_1D 是平行四边形，

所以 $B_1D_1//BD$，

所以 AB_1D_1 即为异面直线 AB_1 与 BD 所成角，

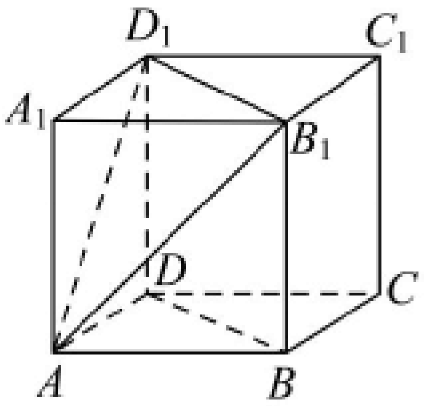
设正方体 $ABCD \quad A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，

在 AB_1D_1 中，$AD_1 \quad AB_1 \quad B_1D_1 \quad \sqrt{2}a$，

所以 AB_1D_1 是等边三角形，

所以 AB_1D_1 $\frac{}{3}$，即异面直线 AB_1 与 BD 所成角为 $\frac{}{3}$，

故答案为：$\frac{}{3}$



4. 边长为 2 的正方形 ABCD 绕 BC 旋转形成一个圆柱，则该圆柱的表面积为__________.

【答案】16π

【分析】圆柱的底面半径 $r\ \ 2$，母线长 $l\ \ 2$，代入公式求值即可.

【详解】该圆柱的底面半径 $r\ \ 2$，母线长 $l\ \ 2$，

所以该圆柱体的表面积为 $S\ \ 2\pi r^2\ \ 2\pi rl\ \ 2\pi 2^2\ \ 2\pi 2\ 2\ \ 16\pi$.

故答案为：16π.

5. 已知曲线 $f\ x\ \ 2x^3\ \ 3x$，过点 $(0,0)$ 作曲线的切线，则切线方程________.

【答案】$y\ \ 3x$

【分析】设切点坐标为 $x_0, 2x_0^3\ \ 3x_0$，求出切线方程，代入点 $(0,0)$ 求出 x_0，从而可得切线方程.

【详解】设切点坐标为 $x_0, 2x_0^3\ \ 3x_0$，

由 $f\ x\ \ 2x^3\ \ 3x$，得 $f\ x_0\ \ 6x_0^2\ \ 3$，

所以曲线 $f\ x$ 在点 $x_0, 2x_0^3\ \ 3x_0$ 处的切线方程为 $y\ \ 2x_0^3\ \ 3x_0\ \ \ 6x_0^2\ \ 3\ \ x\ \ x_0$.

因为切线过点 $(0,0)$，所以 $2x_0^3\ \ 3x_0\ \ \ 6x_0^2\ \ 3\ \ \ x_0$，解得 $x_0\ \ 0$.

所以切线方程为 $y\ \ 3x$.

故答案为:$y\ \ 3x$.

6. “ ABC 三个内角的度数构成等差数列”是“ ABC 中有一个内角为 60 ”的________条件.

【答案】充要

【分析】利用等差中项的性质、三角形的内角和定理结合充分条件、必要条件的定义判断可得出结论.

【详解】若 ABC 三个内角的度数构成等差数列，不妨设 A 、B 、C 成等差数列，

则 $A\ \ B\ \ C\ \ \ 3B\ \ \ 180$，可得 $B\ \ \ 60$，

即“ ABC 三个内角的度数构成等差数列” “ ABC 中有一个内角为 60 ”；

若 ABC 中有一个内角为60 ，不妨设$B\quad 60$ ，则$A\quad C\quad 120\quad 2B$ ，

所以，A 、B 、C 成等差数列，

即“ ABC 三个内角的度数构成等差数列” “ ABC 中有一个内角为60 ”.

因此，“ ABC 三个内角的度数构成等差数列”是“ ABC 中有一个内角为60 ”的充要条件.

故答案为：充要.

7. 无穷等比数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n\quad (\sin x)^n$，前n项的和为S_n，若$\lim\limits_{n} S_n\quad 1$，则满足条件的$x$的取值集合为______.

【答案】$\{x\,|\,x\quad 2k\pi\quad \frac{\pi}{6}$或$x\quad 2k\pi\quad \frac{5\pi}{6},k\quad Z\}$

【分析】利用等比数列的定义和前n项和公式求解即可.

【详解】因为$\{a_n\}$是等比数列，所以$q\quad \frac{a_{n\ 1}}{a_n}\quad \sin x$，

又因为$\lim\limits_{n} S_n\quad 1$，所以$|q|\quad 1$，

所以由等比数列前n项和公式可得$\lim\limits_{n} S_n\quad \frac{a_1}{1\quad q}\quad \frac{\sin x}{1\quad \sin x}\quad 1$，所以$\sin x\quad \frac{1}{2}$，

所以满足条件的x的取值集合为$\{x\,|\,x\quad 2k\pi\quad \frac{\pi}{6}$或$x\quad 2k\pi\quad \frac{5\pi}{6},k\quad Z\}$.

故答案为：$\{x\,|\,x\quad 2k\pi\quad \frac{\pi}{6}$或$x\quad 2k\pi\quad \frac{5\pi}{6},k\quad Z\}$

8. 已知P为双曲线$x^2\quad y^2\quad 1$右支上的一个动点，若点P到直线$y\quad x\quad 2$的距离大于m恒成立，则实数m的取值范围是______.

【答案】$\quad ,\sqrt{2}$

【分析】

把所求问题转化为求点P到直线$y\quad x\quad 2$的最小距离，结合平行线间的距离公式可求.

【详解】双曲线$x^2\quad y^2\quad 1$的渐近线方程为$y\quad x$，而直线$y\quad x\quad 2$与$y\quad x$平行，

平行线间的距离$d\quad \frac{|2\quad 0|}{\sqrt{2}}\quad \sqrt{2}$.

由题意可知点P到直线$y\quad x\quad 2$的距离大于$\sqrt{2}$；

所以$m\quad \sqrt{2}$.

故答案为：$\quad ,\sqrt{2}$.

【点睛】本题主要考查直线与双曲线的位置关系，双曲线上的点到直线的距离转化为平行直线间的距离，是这类问

题的主要求解方向，侧重考查数学运算的核心素养.

9. 在空间直角坐标系 $O\quad xyz$中，已知 $A(1,\ 2,\ 0)$，$B(2,1,0)$，$C(1,1,3)$，则三棱锥 $O\quad ABC$ 的体积为________.

【答案】$\frac{5}{2}$

【分析】求出平面 ABC 的一个法向量 $n\quad 3,\ 1,1$，从而可求点 O 到平面 ABC 的距离，求出 ABC 即可得棱锥的体积.

【详解】$AB\quad 1,3,0, BC\quad 1,0,3$，设平面 ABC 的法向量为 $n\quad x,y,z$，

则 $\begin{matrix} n\ AB & x\quad 3y\quad 0 \\ n\ BC & x\quad 3z\quad 0 \end{matrix}$，令 $x\quad 3$，可得 $y\quad 1, z\quad 1$，所以 $n\quad 3,\ 1,1$.

所以点 O 到平面 ABC 的距离为 $h\quad \frac{\left|n\ OA\right|}{\left|n\right|}\quad \frac{5}{\sqrt{9\quad 1\quad 1}}\quad \frac{5\sqrt{11}}{11}$.

又 $\cos^2\left\langle AB, BC\right\rangle\quad \left(\frac{AB\quad BC}{\left|AB\right|\left|BC\right|}\right)^2\quad \left(\frac{1\quad 1\quad 3\quad 0\quad 0\quad 3}{\sqrt{10}\quad \sqrt{10}}\right)^2\quad \frac{1}{100}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|AB\right|\left|BC\right|\sin\left\langle AB, BC\right\rangle\quad \frac{1}{2}\quad \sqrt{10}\quad \sqrt{10}\quad \sqrt{1\quad \cos^2\left\langle AB, BC\right\rangle}\quad 5\quad \sqrt{1\quad \frac{1}{100}}\quad 5\quad \frac{3\sqrt{11}}{10}\quad \frac{3\sqrt{11}}{2}$，

所以 $V_{O\quad ABC}\quad \frac{1}{3}\quad \frac{5\sqrt{11}}{11}\quad \frac{3\sqrt{11}}{2}\quad \frac{5}{2}$.

故答案为:$\frac{5}{2}$.

10. 已知 F_1，F_2 为椭圆 $:\frac{x^2}{a^2}\quad y^2\quad 1(a\quad 1)$ 的左右焦点，A 为 的上顶点，直线 l 经过点 F_1 且与 交于 B，C 两点；若 l 垂直平分线段 AF_2，则△ABC 的周长是__________.

【答案】$\frac{8\sqrt{3}}{3}$##$\frac{8}{3}\sqrt{3}$.

【分析】如图，连接 CF_2, BF_2，则可得 $\left|CF_2\right|\quad \left|AC\right|, \left|BF_2\right|\quad \left|AB\right|$，所以△ABC 的周长为 $\left|CF_2\right|\quad \left|BF_2\right|\quad \left|BF_1\right|\quad \left|CF_1\right|\quad 4a$，再求出 a，即可求得结果.

【详解】如图，连接 CF_2, BF_2，

因为 l 垂直平分线段 AF_2，

所以 $\left|CF_2\right|\quad \left|AC\right|, \left|BF_2\right|\quad \left|AB\right|$，

所以△ABC 的周长为 $\left|CF_2\right|\quad \left|BF_2\right|\quad \left|BF_1\right|\quad \left|CF_1\right|\quad 4a$，

由题意得 $A(0,1)$，$F_1(\ c,0)$，$F_2(c,0)$，则

AF_2 的中点为 $\frac{c}{2},\frac{1}{2}$ ，k_{AF_2} $\frac{1\quad 0}{0\quad c}$ $\frac{1}{c}$，

所以直线l的斜率为 c，

所以直线l的方程为 $y\quad \frac{1}{2}\quad c\quad x\quad \frac{c}{2}$ ，

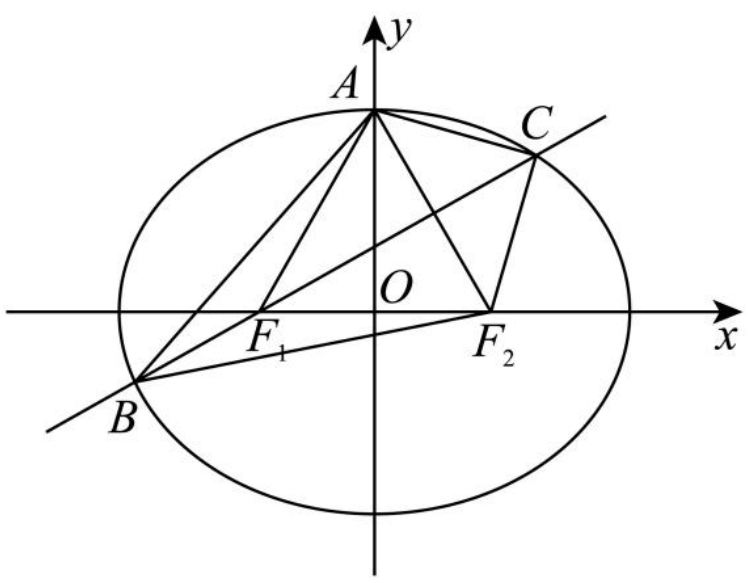
因为直线l过 $F_1(\ c,0)$，

所以 $\frac{1}{2}\quad c\quad c\quad \frac{c}{2}$ ，解得 $c\quad \frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $a\quad \sqrt{b^2\quad c^2}\quad \sqrt{1\quad \frac{1}{3}}\quad \frac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以△ABC 的周长为 $4a\quad \frac{8\sqrt{3}}{3}$，

故答案为：$\frac{8\sqrt{3}}{3}$.



11. 已知曲线方程 $x|x|\quad y|y|\quad 1$，若过 $A(1,0)$ 的直线l与该曲线恰有三个不同的交点，则直线l的倾斜角的取值范围是________.

【答案】$(\quad ,\ 1)\quad (\ 1,\ \frac{\sqrt{2}}{2})$

【分析】根据曲线在不同范围表示圆、双曲线，结合圆和双曲线的性质求解.

【详解】当 $x\quad 0, y\quad 0$ 时，方程 $x|x|\quad y|y|\quad 1$ 可化为 $x^2\quad y^2\quad 1$，

其图象为 $\frac{1}{4}$ 个单位圆；

当 $x\quad 0, y\quad 0$ 时，方程 $x|x|\quad y|y|\quad 1$ 可化为 $x^2\quad y^2\quad 1$，

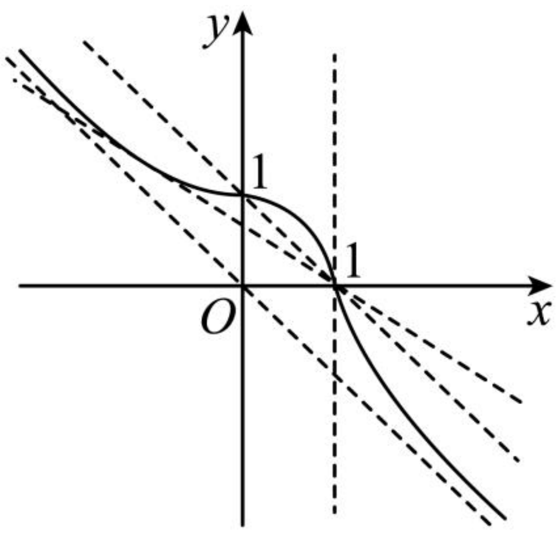
其图象为焦点在 x 上的双曲线的右下支；

当 $x\quad 0, y\quad 0$ 时，方程 $x|x|\quad y|y|\quad 1$ 可化为 $x^2\quad y^2\quad 1$，

其图象为焦点在 y 上的双曲线的左上支；

当 $x\quad 0, y\quad 0$ 时，方程 $x|x|\quad y|y|\quad 1$ 可化为 $x^2\quad y^2\quad 1$，不可能成立；

作出图象如下，



设过点 $A(1,0)$ 斜率为 k 的直线方程为 $y\quad k(x\quad 1)$，

联立 $\begin{matrix} y\quad k(x\quad 1) \\ y^2\quad x^2\quad 1 \end{matrix}$，可得 $(k^2\quad 1)x^2\quad 2k^2x\quad k^2\quad 1\quad 0$，

当 $k\quad\quad 1$ 时，由 $\quad 4k^4\quad 4(k^2\quad 1)^2\quad 0$，解得 $k\quad \dfrac{\sqrt{2}}{2}$(舍)或 $k\quad\quad \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由图可知，当 $k\quad (\quad , 1)\quad (1, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 时，直线 l 与该曲线恰有三个不同的交点，

故答案为：$(\quad , 1)\quad (1, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，若动点 P（a，b）到两直线 l_1：y=x 和 l_2：y=－x+2 的距离之和为 $2\sqrt{2}$，则 a^2+b^2 的最大值为__.

【答案】18

【分析】利用点到直线的距离公式可得：$|a\quad b|\quad |a\quad b\quad 2|\quad 4$．通过分类讨论可知：点 (a,b) 是如图所示的正方形的 4 条边．即可得到 $\sqrt{a^2\quad b^2}$ 最大值.

【详解】解：$\quad$动点 $P(a,b)$ 到两直线 $l_1: y\quad x$ 和 $l_2: y\quad\quad x\quad 2$ 的距离之和为 $2\sqrt{2}$，

$$\frac{|a\quad b|}{\sqrt{2}}\quad \frac{|a\quad b\quad 2|}{\sqrt{2}}\quad 2\sqrt{2},$$

化为 $|a\quad b|\quad |a\quad b\quad 2|\quad 4$.

分为以下 4 种情况：$\begin{matrix} a\quad b\quad 0 \\ a\quad b\quad 2\quad 0 \\ a\quad 3 \end{matrix}$ 或 $\begin{matrix} a\quad b\quad 0 \\ a\quad b\quad 2\quad 0 \\ b\quad 1 \end{matrix}$ 或 $\begin{matrix} a\quad b\quad 0 \\ a\quad b\quad 2\quad 0 \\ b\quad 3 \end{matrix}$ 或 $\begin{matrix} a\quad b\quad 0 \\ a\quad b\quad 2\quad 0 \\ a\quad 1 \end{matrix}$.