

山西省晋中市昔阳县中学校 2024-2025 学年高三上学期第六

次模拟考试（12 月）检测数学试卷

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、未知

1. 若复数 $z = \frac{i}{1-i}$, 则 $|z| =$ ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\sqrt{2}$

二、单选题

2. 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 5\}$, $B = \{x | 2a - 1 < x < 2a + 6\}$, 若 $A \cap B = \{x | 3 < x < 5\}$, 则 $a =$

()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

三、未知

3. 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 边上的中点, 则 $\overrightarrow{CB} =$ ()

- A. $2\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}$ B. $\overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{CA}$ C. $2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}$ D. $\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{CA}$

4. 设 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$, $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, 则 $\cos 2\alpha =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

四、单选题

5. 下列说法正确的是 ()

A. 若函数 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(0)=0$

B. 函数 $f(x)=\frac{1}{x-1}$ 在 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 上是减函数

C. 若函数 $y=f(2x+1)$ 的定义域为 $[2,3]$, 则函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{2},1\right]$

D. 若函数 $f(x)$ 为偶函数, 且在 $[0,+\infty)$ 上是单调递增, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是单调递减

6. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上, $PA=PB=PC=4$,

$AB=BC=2, AC=2\sqrt{3}$, 则球 O 的表面积为 ()

A. $\frac{64\pi}{3}$

B. $\frac{40\pi}{3}$

C. $\frac{27\pi}{4}$

D. $\frac{21\pi}{2}$

7. 已知直线 $l: kx-y+1-k=0$ 和圆 $\odot O: x^2+y^2=r^2 (r>0)$, 则 “ $r=\sqrt{2}$ ” 是 “存在唯一 k

使得直线 l 与 $\odot O$ 相切” 的 ()

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

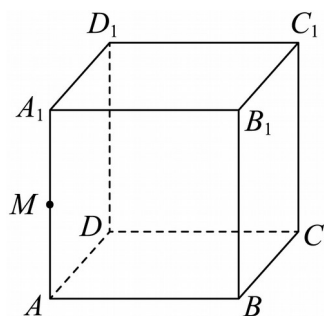
五、未知

8. 木桶效应, 也可称为短板效应, 是说一只水桶能装多少水取决于它最短的那块木板. 如果一只桶的木板中有一块不齐或者某块木板有破洞, 这只桶就无法盛满水, 此时我们可以

倾斜木桶, 设法让桶装水更多. 如图, 棱长为 2 的正方体容器, 在顶点 C_1 和棱 AA_1 的中点 M

处各有一个小洞 (小洞面积忽略不计), 为了保持平衡, 以 BD 为轴转动正方体, 则用此

容器装水，最多能装水的体积 $V =$ ()



- A. 4 B. $\frac{16}{3}$ C. 6 D. $\frac{20}{3}$

六、多选题

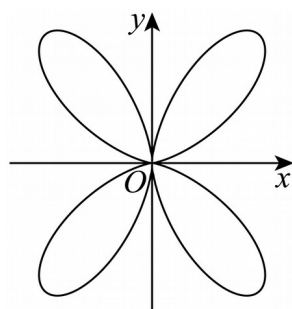
9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n ，且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n+1}{2}$ ，则下列

正确的是 ()

- A. $\frac{a_4}{b_4} = \frac{15}{2}$ B. $\frac{a_4}{b_4} = \frac{9}{2}$
C. $\frac{a_5}{b_6} = \frac{19}{2}$ D. $\frac{a_5}{b_6} = \frac{25}{2}$

10. 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，例如：四叶草曲线就是其中一种，其方程

为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ ，则下列说法正确的是 ()



- A. 四叶草曲线有四条对称轴

B. 设 P 为四叶草曲线上一点, 且在第一象限内, 过 P 作两坐标轴的垂线, 则两垂线与

两坐标轴围成的矩形面积的最大值为 $\frac{1}{8}$

C. 四叶草曲线上的点到原点的最大距离为 $\frac{1}{4}$

D. 四叶草曲线的面积小于 $\frac{\pi}{4}$

七、未知

11. 已知 $f(x) = x + a \cos x (a \neq 0)$, 则下列说法中正确的是 ()

A. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可能单调递减

B. 若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 $a \in [-1, 0) \cup (0, 1]$

C. $\left(\frac{\pi\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 是 $f(x)$ 的一个对称中心

D. $f(x)$ 所有的对称中心在同一条直线上

八、填空题

12. 已知向量 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (3, 4)$, 若 $(\vec{a} - \lambda \vec{b}) \perp \vec{b}$, 则 $\lambda =$ ____.

13. 若动直线 $l_1: mx - y - m + 3 = 0$, 圆 $C: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 3$, 则直线 l_1 与圆 C 相交的最短弦长为_____.

14. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_7 = 28$, $a_1 + a_4 = 5$, 若

$4a_n + a_m = a_{17} \ (m, n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $n^2 + m^2$ 的最小值为_____.

九、解答题

15. 已知圆 C 经过点 $A(3,1)$, $B(-1,3)$ 且圆心 C 在直线 $3x - y - 2 = 0$ 上.

(1)求圆 C 方程;

(2)若 E 点为圆 C 上任意一点, 且点 $F(4,0)$, 求线段 EF 的中点 M 的轨迹方程.

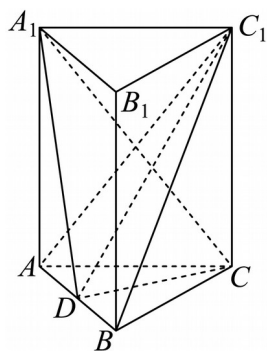
16. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , 点 D 在边 AC 上, 且满足

$$DB:DA:DC = 2:3:4, \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{BD \cdot b \cdot \sin B}{2}$$

(1)证明: $2b^2 = 7ac$

(2)求 $\cos \angle ABC$.

17. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $\triangle ABC$ 是等边三角形, 且 D 为棱 AB 的中点.



(1)证明: $AB \perp$ 平面 CC_1D .

(2)若 $2AA_1 = 3AB$, 求平面 A_1CD 与平面 ABC_1 所成锐二面角的余弦值.

18. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程;

(II) 当 $x \in [-2, 4]$ 时, 求证: $x - 6 \leq f(x) \leq x$;

(III) 设 $F(x) = |f(x) - (x + a)|$ ($a \in \mathbf{R}$), 记 $F(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上的最大值为 $M(a)$, 当 $M(a)$ 最小时, 求 a 的值.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n . 定义: 若存在 $k \in \mathbf{Z}$, 使得对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$,

$a_{n+1} - T_n = k$ 恒成立, 则称数列 $\{a_n\}$ 为 “ k 数列”.

(1) 若 $a_1 = 1$, 且 $\{a_n\}$ 为 “2 数列”, 求 a_5 .

(2) 若 $a_1 = 2$, 且 $\{a_n\}$ 为 “ k 数列”, $\{a_n\}$ 的前 n 项的平方和为 G_n , 数列 $\{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 满足 $b_n = 2^{G_n - T_n}$, 求 k 的值和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(3) 若 $a_1 > 1$, $k > 0$, 且 $\{a_n\}$ 为 “ k 数列”, $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 证明: $S_n > \ln T_n + n$.

参考答案:

题号	2	5	6	7	9	10				
答案	B	D	A	A	AC	ABD				

1. B

【分析】化简 $z = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ ，再求 $|z|$ 得解.

【详解】由题得 $z = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$,

所以 $|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选: B

2. B

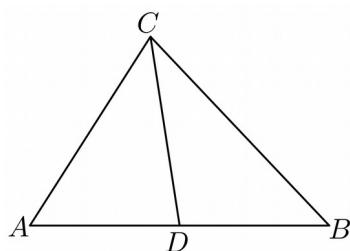
【分析】由 $A \cap B = \{x | 3 < x < 5\}$ ，分析集合 A, B 的端点值，知 $2a-1=3$ ，求解即可

【详解】由题意可得 $2a-1=3$ ，解得 $a=2$.

故选: B.

3. C

【分析】根据向量的加减法运算法则算出即可.



【详解】

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} + 2(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}) = 2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}$$

故选: C

【点睛】本题考查的是向量的加减法，较简单.

4. A

【分析】运用完全平方公式、二倍角公式、同角三角函数平方关系及由三角函数值判断角

的范围可求得结果.

【详解】因为 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$,

所以 $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$,

因为 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$,

所以 $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \frac{3\pi}{2}$,

又因为 $\sin 2\alpha < 0$,

所以 $\pi < 2\alpha < \frac{3\pi}{2}$,

所以 $\cos 2\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = -\frac{1}{2}$,

故选: A.

5. D

【分析】对于 AB: 举反例说明即可; 对于 C: 根据抽象函数定义域运算求解; 对于 D: 根据偶函数性质分析判断.

【详解】对于选项 A: 例如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 为奇函数, 但 $f(0)$ 无定义, 故 A 错误;

对于选项 B: 因为 $f(0) = -1, f(2) = 1$, 所以函数 $f(x)$ 在定义域上不是减函数, 故 B 错误;

对于选项 C: 因为函数 $y = f(2x+1)$ 的定义域为 $[2, 3]$,

即 $x \in [2, 3]$, 则 $2x+1 \in [5, 7]$,

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $[5, 7]$, 故 C 错误;

对于选项 D: 因为函数 $f(x)$ 为偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是单调递减, 故 D 正确;

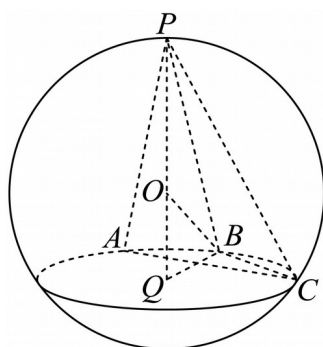
故选: D.

6. A

【分析】先利用正弦定理求 $\triangle ABC$ 的外接圆半径, 再求点 P 到平面 ABC 的距离, 设三棱锥

$P-ABC$ 外接球半径为 R , 根据勾股定理列方程求出 R , 进一步计算球的表面积.

【详解】如图:



在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC = 2, AC = 2\sqrt{3}$,

由余弦定理: $\cos \angle ABC = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA \cdot BC} = \frac{4 + 4 - 12}{8} = -\frac{1}{2}$,

所以 $\angle ABC = 120^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 $\frac{AC}{2\sin \angle ABC} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$, 即 $QB = 2$.

在直角三角形 PQB 中, $BQ = 2, BP = 4$, 所以 $QP = 2\sqrt{3}$.

设棱锥 $P-ABC$ 外接球半径为 R , 在直角三角形 OQB 中, $(2\sqrt{3} - R)^2 + 2^2 = R^2$,

解得： $R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

所以球 O 的表面积为： $S = 4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{64\pi}{3}$.

故选：A

7. A

【分析】先由 $r = \sqrt{2}$ ，点到直线距离公式列出方程，求出此时 $k = -1$ ，充分性成立；求出

$l: kx - y + 1 - k = 0$ 所过定点，再由存在唯一 k 使得直线 l 与 $\odot O$ 相切”，得到 $r = 1$ 或定点在圆上，得到方程，求出相应的答案，必要性不成立.

【详解】 $r = \sqrt{2}$ 时， $l: kx - y + 1 - k = 0$ 到 $\odot O: x^2 + y^2 = 2$ 的距离为 $\frac{|1-k|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{2}$ ，

故 $1 - 2k + k^2 = 2 + 2k^2$ ，解得 $k = -1$ ，

满足存在唯一 k 使得直线 l 与 $\odot O$ 相切”，充分性成立，

$l: kx - y + 1 - k = 0$ 经过定点 $M(1, 1)$ ，

若 $r = 1$ ， $\odot O: x^2 + y^2 = 1$ ，若 $k = 0$ ，此时直线 $l: y = 1$ ，

直线 $l: y = 1$ 与 $\odot O$ 相切，另一条切线斜率不存在，

故满足存在唯一 k 使得直线 l 与 $\odot O$ 相切”，

当 $M(1, 1)$ 在 $\odot O: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 上，满足存在唯一 k 使得直线 l 与 $\odot O$ 相切，

故 $r^2 = 1 + 1 = 2$ ，

又 $r > 0$ ，解得 $r = \sqrt{2}$ ，必要性不成立，

故“ $r = \sqrt{2}$ ”是“存在唯一 k 使得直线 l 与 $\odot O$ 相切”的充分不必要条件.

故选: A

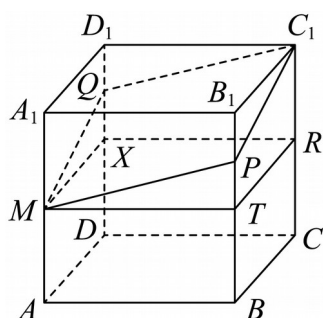
8. C

【分析】作出辅助线, 得到 $PMQC_1$ 为菱形, 从而得到多能装入的体积为长方体

$MTRX - ABCD$ 的体积加上长方体 $MTRX - A_1B_1C_1D_1$ 的体积的一半, 结合正方体的体积求出

答案.

【详解】棱长为 2 的正方体的体积为 $2^3 = 8$,



在 BB_1, DD_1 上分别取 P, Q , 使得 $B_1P = D_1Q = \frac{1}{2}$,

又 M 为棱 AA_1 的中点, 故由勾股定理得 $C_1P = MQ = MP = C_1Q = \sqrt{4 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$,

故四边形 $PMQC_1$ 为菱形, 故 P, M, Q, C_1 四点共面,

取 BB_1, CC_1, DD_1 的中点 T, R, X , 连接 MT, TR, RX, XM ,

则平面 $PMQC_1$ 将长方体 $MTRX - A_1B_1C_1D_1$ 的体积平分,

故以 BD 为轴转动正方体, 则用此容器装水,

则最多能装入的体积为长方体 $MTRX - ABCD$ 的体积加上长方体 $MTRX - A_1B_1C_1D_1$ 的体积的一半,

故最多能装水的体积 $V = \frac{3}{4}V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = \frac{3}{4} \times 8 = 6$.

故选：C

9. AC

【分析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，根据等差数列、等比数

列求和公式及 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n+1}{2}$ ，推导出 $q=1$ ，不妨设 $S_n = (2n+1)nk$ ， $T_n = 2nk$ ， k 是不为 0 的

常数，即可表示出 a_n ， b_n ，从而得解.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，

因为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$ ；

等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = \begin{cases} b_1 n, q=1 \\ \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1 \end{cases}$ ；

又 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n+1}{2}$ ，所以等比数列 $\{b_n\}$ 的公比 $q=1$ ，即 $b_n = b_1$.

不妨设 $S_n = (2n+1)nk$ ， $T_n = 2nk$ ， k 是不为 0 的常数，

所以当 $n=1$ 时 $a_1 = 3k$ ，

当 $n \geq 2$ 时 $a_n = S_n - S_{n-1} = (2n+1)nk - (2n-1)(n-1)k = (4n-1)k$ ，

则 $a_n = (4n-1)k$ ， $b_n = 2k$ ，

所以 $\frac{a_4}{b_4} = \frac{15}{2}$ ， $\frac{a_5}{b_6} = \frac{19}{2}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/868140034105007011>