

# 概率论与数理统计习题答案 第四版 盛骤 (浙江大学)

## 浙大第四版 (高等教育出版社)

### 第一章 概率论的基本概念

1.[一] 写出下列随机试验的样本空间

(1) 记录一个小班一次数学考试的平均分数 (充以百分制记分) ([一] 1)

$$S = \left\{ \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n \times 100}{n} \right\}, \quad n \text{ 表小班人数}$$

(3) 生产产品直到得到 10 件正品, 记录生产产品的总件数。 ([一] 2)

$$S = \{10, 11, 12, \dots, n, \dots\}$$

(4) 对某工厂出厂的产品进行检查, 合格的盖上“正品”, 不合格的盖上“次品”, 如连续查出二个次品就停止检查, 或检查 4 个产品就停止检查, 记录检查的结果。

查出合格品记为“1”, 查出次品记为“0”, 连续出现两个“0”就停止检查, 或查满 4 次才停止检查。 ([一] (3))

$$S = \{00, 100, 0100, 0101, 1010, 0110, 1100, 0111, 1011, 1101, 1110, 1111, \}$$

2.[二] 设  $A, B, C$  为三事件, 用  $A, B, C$  的运算关系表示下列事件。

(1)  $A$  发生,  $B$  与  $C$  不发生。

表示为:  $\overline{ABC}$  或  $A - (AB + AC)$  或  $A - (B \cup C)$

(2)  $A, B$  都发生, 而  $C$  不发生。

表示为:  $AB\overline{C}$  或  $AB - ABC$  或  $AB - C$

(3)  $A, B, C$  中至少有一个发生 表示为:  $A + B + C$

(4)  $A, B, C$  都发生, 表示为:  $ABC$

(5)  $A, B, C$ 都不发生, 表示为:  $\overline{ABC}$  或  $S - (A+B+C)$  或  $\overline{A \cup B \cup C}$

(6)  $A, B, C$ 中不多于一个发生, 即  $A, B, C$ 中至少有两个同时不发生

相当于  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ 中至少有一个发生。故 表示为:  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$ 。

(7)  $A, B, C$ 中不多于二个发生。

相当于:  $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ 中至少有一个发生。故 表示为:  $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$  或  $\overline{ABC}$

(8)  $A, B, C$ 中至少有二个发生。

相当于:  $AB, BC, AC$ 中至少有一个发生。故 表示为:  $AB+BC+AC$

6.[三] 设  $A, B$  是两事件且  $P(A)=0.6, P(B)=0.7$ . 问(1)在什么条件下  $P(AB)$ 取到最大值, 最大值是多少? (2) 在什么条件下  $P(AB)$ 取到最小值, 最小值是多少?

解: 由  $P(A)=0.6, P(B)=0.7$  即知  $AB \neq \phi$ , (否则  $AB = \phi$  依互斥事件加法定理,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.6 + 0.7 = 1.3 > 1$  与  $P(A \cup B) \leq 1$  矛盾)。

从而由加法定理得

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \quad (*)$$

(1) 从  $0 \leq P(AB) \leq P(A)$  知, 当  $AB=A$ , 即  $A \cap B$  时  $P(AB)$ 取到最大值, 最大值为

$$P(AB) = P(A) = 0.6,$$

(2) 从(\*)式知, 当  $A \cup B = S$  时,  $P(AB)$ 取最小值, 最小值为

$$P(AB) = 0.6 + 0.7 - 1 = 0.3。$$

7.[四] 设  $A, B, C$  是三事件, 且  $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = P(BC) = 0, P(AC) = \frac{1}{8}$ . 求  $A, B, C$  至少有一个发生的概率。

解:  $P(A, B, C \text{ 至少有一个发生}) = P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} + 0 = \frac{5}{8}$

8.[五] 在一标准英语字典中具有 55 个由二个不相同的字母新组成的单词, 若从 26 个英语字母中任取两个字母予以排列, 问能排成上述单词的概率是多少?

记  $A$  表“能排成上述单词”

$\therefore$  从 26 个任选两个来排列，排法有  $A_{26}^2$  种。每种排法等可能。

字典中的二个不同字母组成的单词：55 个

$$\therefore P(A) = \frac{55}{A_{26}^2} = \frac{11}{130}$$

9. 在电话号码簿中任取一个电话号码，求后面四个数全不相同的概率。（设后面 4 个数中的每一个数都是等可能性地取自 0, 1, 2, …, 9）

记  $A$  表“后四个数全不同”

$\therefore$  后四个数的排法有  $10^4$  种，每种排法等可能。

后四个数全不同的排法有  $A_{10}^4$

$$\therefore P(A) = \frac{A_{10}^4}{10^4} = 0.504$$

10.[六] 在房间里有 10 人。分别佩带着从 1 号到 10 号的纪念章，任意选 3 人记录其纪念章的号码。

(1) 求最小的号码为 5 的概率。

记“三人纪念章的最小号码为 5”为事件  $A$

$\therefore$  10 人中任选 3 人为一组：选法有  $\binom{10}{3}$  种，且每种选法等可能。

又事件  $A$  相当于：有一人号码为 5，其余 2 人号码大于 5。这种组合的种数有  $1 \times \binom{5}{2}$

$$\therefore P(A) = \frac{1 \times \binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{12}$$

(2) 求最大的号码为 5 的概率。

记“三人中最大的号码为 5”为事件  $B$ ，同上 10 人中任选 3 人，选法有  $\binom{10}{3}$  种，且每种选法等可能，又事件  $B$  相当于：有一人号码为 5，其余 2 人号码小于 5，选法有  $1 \times \binom{4}{2}$

种

$$P(B) = \frac{1 \times \binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{20}$$

11.[七] 某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶，红漆 3 桶。在搬运中所标笺脱落，交货人随意将这些标笺重新贴，问一个定货 4 桶白漆，3 桶黑漆和 2 桶红漆顾客，按所定的颜色如数得到定货的概率是多少？

记所求事件为  $A$ 。

在 17 桶中任取 9 桶的取法有  $C_{17}^9$  种，且每种取法等可能。

取得 4 白 3 黑 2 红的取法有  $C_{10}^4 \times C_4^3 \times C_3^2$

故 
$$P(A) = \frac{C_{10}^4 \times C_4^3 \times C_3^2}{C_{17}^9} = \frac{252}{2431}$$

12.[八] 在 1500 个产品中有 400 个次品，1100 个正品，任意取 200 个。

(1) 求恰有 90 个次品的概率。

记“恰有 90 个次品”为事件  $A$

$\therefore$  在 1500 个产品中任取 200 个，取法有  $\binom{1500}{200}$  种，每种取法等可能。

200 个产品恰有 90 个次品，取法有  $\binom{400}{90} \binom{1100}{110}$  种

$\therefore$  
$$P(A) = \frac{\binom{400}{90} \binom{1100}{110}}{\binom{1500}{200}}$$

(2) 至少有 2 个次品的概率。

记： $A$  表“至少有 2 个次品”

$B_0$  表“不含有次品”， $B_1$  表“只含有一个次品”，同上，200 个产品不含次品，取法

有  $\binom{1100}{200}$  种, 200 个产品含一个次品, 取法有  $\binom{400}{1}\binom{1100}{199}$  种

$\therefore \bar{A} = B_0 + B_1$  且  $B_0, B_1$  互不相容。

$$\therefore P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - [P(B_0) + P(B_1)] = 1 - \left[ \frac{\binom{1100}{200}}{\binom{1500}{200}} + \frac{\binom{400}{1}\binom{1100}{199}}{\binom{1500}{200}} \right]$$

13.[九] 从 5 双不同鞋子中任取 4 只, 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率是多少?

记 A 表 “4 只全中至少有两支配成一对”

则  $\bar{A}$  表 “4 只人不配对”

$\therefore$  从 10 只中任取 4 只, 取法有  $\binom{10}{4}$  种, 每种取法等可能。

要 4 只都不配对, 可在 5 双中任取 4 双, 再在 4 双中的每一双里任取一只。取法有  $\binom{5}{4} \times 2^4$

$$\therefore P(\bar{A}) = \frac{C_5^4 \cdot 2^4}{C_{10}^4} = \frac{8}{21}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{8}{21} = \frac{13}{21}$$

15.[十一] 将三个球随机地放入 4 个杯子中去, 问杯子中球的最大个数分别是 1, 2, 3, 的概率各为多少?

记  $A_i$  表 “杯中球的最大个数为  $i$  个”  $i=1,2,3$ ,

三只球放入四只杯中, 放法有  $4^3$  种, 每种放法等可能

对  $A_1$ : 必须三球放入三杯中, 每杯只放一球。放法  $4 \times 3 \times 2$  种。

(选排列: 好比 3 个球在 4 个位置做排列)

$$P(A_1) = \frac{4 \times 3 \times 2}{4^3} = \frac{6}{16}$$

对  $A_2$ : 必须三球放入两杯, 一杯装一球, 一杯装两球。放法有  $C_3^2 \times 4 \times 3$  种。

(从 3 个球中选 2 个球, 选法有  $C_3^2$ , 再将此两个球放入一个杯中, 选法有 4

种，最后将剩余的 1 球放入其余的一个杯中，选法有 3 种。

$$P(A_2) = \frac{C_3^2 \times 4 \times 3}{4^3} = \frac{9}{16}$$

对  $A_3$ ：必须三球都放入一杯中。放法有 4 种。(只需从 4 个杯中选 1 个杯子，放入此 3 个球，选法有 4 种)

$$P(A_3) = \frac{4}{4^3} = \frac{1}{16}$$

16.[十二] 50 个铆钉随机地取来用在 10 个部件，其中三个铆钉强度太弱，每个部件用 3 只铆钉，若将三只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱，问发生一个部件强度太弱的概率是多少？

记  $A$  表“10 个部件中有一个部件强度太弱”。

法一：用古典概率作：

把随机试验  $E$  看作是用三个钉一组，三个钉一组去铆完 10 个部件（在三个钉的一组中不分先后次序。但 10 组钉铆完 10 个部件要分先后次序）

对  $E$ ：铆法有  $C_{50}^3 \times C_{47}^3 \times C_{44}^3 \cdots \cdots \times C_{23}^3$  种，每种装法等可能

对  $A$ ：三个次钉必须铆在一个部件上。这种铆法有  $(C_3^3 \times C_{47}^3 \times C_{44}^3 \cdots \cdots C_{23}^3) \times 10$  种

$$P(A) = \frac{[C_3^3 \times C_{47}^3 \times C_{44}^3 \cdots \cdots \times C_{23}^3] \times 10}{C_{50}^3 \times C_{47}^3 \times \cdots \cdots \times C_{23}^3} = \frac{1}{1960} = 0.00051$$

法二：用古典概率作

把试验  $E$  看作是在 50 个钉中任选 30 个钉排成一列，顺次钉下去，直到把部件铆完。（铆钉要计先后次序）

对  $E$ ：铆法有  $A_{50}^3$  种，每种铆法等可能

对  $A$ ：三支次钉必须铆在“1, 2, 3”位置上或“4, 5, 6”位置上, …或“28, 29, 30”位置上。这种铆法有  $A_3^3 \times A_{47}^{27} + A_3^3 \times A_{47}^{27} + \cdots \cdots + A_3^3 \times A_{47}^{27} = 10 \times A_3^3 \times A_{47}^{27}$  种

$$P(A) = \frac{10 \times A_3^3 \times A_{47}^{27}}{A_{50}^{30}} = \frac{1}{1960} = 0.00051$$

17.[十三] 已知  $P(\bar{A}) = 0.3$ ,  $P(B) = 0.4$ ,  $P(A\bar{B}) = 0.5$ , 求  $P(B|A \cup \bar{B})$ 。

解一:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0.7, P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0.6, A = AS = A(B \cup \bar{B}) = AB \cup A\bar{B}$$

注意  $(AB)(A\bar{B}) = \phi$ . 故有

$$P(AB) = P(A) - P(A\bar{B}) = 0.7 - 0.5 = 0.2.$$

再由加法定理,

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A\bar{B}) = 0.7 + 0.6 - 0.5 = 0.8$$

$$\text{于是 } P(B|A \cup \bar{B}) = \frac{P[B(A \cup \bar{B})]}{P(A \cup \bar{B})} = \frac{P(AB)}{P(A \cup \bar{B})} = \frac{0.2}{0.8} = 0.25$$

$$\text{解二: } P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}|A) \xrightarrow{\text{由已知}} 0.5 = 0.7 \cdot P(\bar{B}|A)$$

$$\therefore P(\bar{B}|A) = \frac{0.5}{0.7} = \frac{5}{7} \Rightarrow P(B|A) = \frac{2}{7} \quad \text{故 } P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{5}$$

$$P(B|A \cup \bar{B}) \stackrel{\text{定义}}{=} \frac{P(BA \cup B\bar{B})}{P(A \cup \bar{B})} = \frac{P(BA)}{P(A) + P(\bar{B}) - P(A\bar{B})} = \frac{\frac{1}{5}}{0.7 + 0.6 - 0.5} = 0.25$$

18.[十四]  $P(A) = \frac{1}{4}$ ,  $P(B|A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A|B) = \frac{1}{2}$ , 求  $P(A \cup B)$ 。

$$\text{解: 由 } P(A|B) \stackrel{\text{定义}}{=} \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} \xrightarrow{\text{由已知条件}} \text{有 } \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{6}$$

$$\text{由乘法公式, 得 } P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{12}$$

$$\text{由加法公式, 得 } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

19.[十五] 掷两颗骰子, 已知两颗骰子点数之和为 7, 求其中有一颗为 1 点的概率(用两种方法)。

解: (方法一) (在缩小的样本空间  $SB$  中求  $P(A|B)$ , 即将事件  $B$  作为样本空间, 求事件  $A$  发生的概率)。

掷两颗骰子的试验结果为一有序数组  $(x, y)$  ( $x, y=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) 并且满足  $x+y=7$ , 则样本空间为

$$S = \{(x, y) | (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$$

每种结果  $(x, y)$  等可能。

$$A = \{\text{掷二骰子, 点数和为 7 时, 其中有一颗为 1 点。故 } P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\}$$

$$\text{方法二: (用公式 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \text{)}$$

$S = \{(x, y) | x=1, 2, 3, 4, 5, 6; y=1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  每种结果均可能

$A =$  “掷两颗骰子,  $x, y$  中有一个为 “1” 点”,  $B =$  “掷两颗骰子,  $x+y=7$ ”。则

$$P(B) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}, P(AB) = \frac{2}{6^2},$$

$$\text{故 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6^2}}{\frac{1}{6}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

20.[十六] 据以往资料表明, 某一 3 口之家, 患某种传染病的概率有以下规律:  $P(A) = P\{\text{孩子得病}\} = 0.6$ ,  $P(B|A) = P\{\text{母亲得病} | \text{孩子得病}\} = 0.5$ ,  $P(C|AB) = P\{\text{父亲得病} | \text{母亲及孩子得病}\} = 0.4$ 。求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率。

解: 所求概率为  $P(AB\bar{C})$  (注意: 由于 “母病”, “孩病”, “父病” 都是随机事件, 这里不是求  $P(\bar{C} | AB)$ )

$$P(AB) = P(A) = P(B|A) = 0.6 \times 0.5 = 0.3, P(\bar{C} | AB) = 1 - P(C | AB) = 1 - 0.4 = 0.6.$$

$$\text{从而 } P(AB\bar{C}) = P(AB) \cdot P(\bar{C} | AB) = 0.3 \times 0.6 = 0.18.$$

21.[十七] 已知 10 只晶体管中有 2 只次品, 在其中取二次, 每次随机地取一只, 作不放回抽样, 求下列事件的概率。

(1) 二只都是正品 (记为事件 A)

法一: 用组合做 在 10 只中任取两只来组合, 每一个组合看作一个基本结果, 每种取法等可能。

$$P(A) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{28}{45} = 0.62$$

法二: 用排列做 在 10 只中任取两个来排列, 每一个排列看作一个基本结果, 每个排列等可能。

$$P(A) = \frac{A_8^2}{A_{10}^2} = \frac{28}{45}$$

法三: 用事件的运算和概率计算法则来作。

记  $A_1, A_2$  分别表第一、二次取得正品。

$$P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$$

(2) 二只都是次品 (记为事件 B)

法一: 
$$P(B) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

法二: 
$$P(B) = \frac{A_2^2}{A_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

法三: 
$$P(B) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$$

(3) 一只是正品, 一只是次品 (记为事件 C)

法一: 
$$P(C) = \frac{C_8^1 \times C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45}$$

法二: 
$$P(C) = \frac{(C_8^1 \times C_2^1) \times A_2^2}{A_{10}^2} = \frac{16}{45}$$

法三:  $P(C) = P(A_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1A_2)$  且  $A_1\bar{A}_2$  与  $\bar{A}_1A_2$  互斥

$$= P(A_1)P(\bar{A}_2 | A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1) = \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{8}{9} = \frac{16}{45}$$

(4) 第二次取出的是次品 (记为事件  $D$ )

法一: 因为要注意第一、第二次的顺序。不能用组合作,

法二: 
$$P(D) = \frac{A_9^1 \times A_2^1}{A_{10}^2} = \frac{1}{5}$$

法三:  $P(D) = P(A_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1A_2)$  且  $A_1\bar{A}_2$  与  $\bar{A}_1A_2$  互斥

$$= P(A_1)P(\bar{A}_2 | A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1) = \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{8}{9} = \frac{1}{5}$$

22.[十八] 某人忘记了电话号码的最后一个数字, 因而随机的拨号, 求他拨号不超过三次而接通所需的电话的概率是多少? 如果已知最后一个数字是奇数, 那么此概率是多少?

记  $H$  表拨号不超过三次而能接通。

$A_i$  表第  $i$  次拨号能接通。

注意: 第一次拨号不通, 第二拨号就不再拨这个号码。

$\therefore H = A_1 + \bar{A}_1A_2 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$  三种情况互斥

$$\begin{aligned} \therefore P(H) &= P(A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(A_3 | \bar{A}_1\bar{A}_2) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} + \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

如果已知最后一个数字是奇数 (记为事件  $B$ ) 问题变为在  $B$  已发生的条件下, 求  $H$  再发生的概率。

$$\begin{aligned} P(H|B) &= P(A_1 | B) + P(\bar{A}_1A_2 | B) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3 | B) \\ &= P(A_1 | B) + P(\bar{A}_1 | B)P(A_2 | \bar{A}_1) + P(\bar{A}_1 | B)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(A_3 | \bar{A}_1\bar{A}_2) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

24.[十九] 设有甲、乙二袋，甲袋中装有  $n$  只白球  $m$  只红球，乙袋中装有  $N$  只白球  $M$  只红球，今从甲袋中任取一球放入乙袋中，再从乙袋中任取一球，问取到（即从乙袋中取到）白球的概率是多少？（此为第三版 19 题(1)）

记  $A_1, A_2$  分别表“从甲袋中取得白球，红球放入乙袋”

再记  $B$  表“再从乙袋中取得白球”。

$\therefore B = A_1B + A_2B$  且  $A_1, A_2$  互斥

$\therefore P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$

$$= \frac{n}{n+m} \times \frac{N+1}{N+M+1} + \frac{m}{n+m} \times \frac{N}{N+M+1}$$

[十九](2) 第一只盒子装有 5 只红球，4 只白球；第二只盒子装有 4 只红球，5 只白球。先从第一盒子中任取 2 只球放入第二盒中去，然后从第二盒子中任取一只球，求取到白球的概率。

记  $C_1$  为“从第一盒子中取得 2 只红球”。

$C_2$  为“从第一盒子中取得 2 只白球”。

$C_3$  为“从第一盒子中取得 1 只红球，1 只白球”，

$D$  为“从第二盒子中取得白球”，显然  $C_1, C_2, C_3$  两两互斥， $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = S$ ，由全概率公式，有

$P(D) = P(C_1)P(D|C_1) + P(C_2)P(D|C_2) + P(C_3)P(D|C_3)$

$$= \frac{C_5^2}{C_9^2} \cdot \frac{5}{11} + \frac{C_4^2}{C_9^2} \cdot \frac{7}{11} + \frac{C_5^1 \cdot C_4^1}{C_9^2} \cdot \frac{6}{11} = \frac{53}{99}$$

26.[二十一] 已知男人中有 5% 是色盲患者，女人中有 0.25% 是色盲患者。今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

解： $A_1 = \{\text{男人}\}, A_2 = \{\text{女人}\}, B = \{\text{色盲}\}$ ，显然  $A_1 \cup A_2 = S, A_1 A_2 = \phi$

由已知条件知  $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$ 。  $P(B|A_1) = 5\%, P(B|A_2) = 0.25\%$

由贝叶斯公式，有

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B | A_1)}{P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{10000}} = \frac{20}{21}$$

[二十二] 一学生接连参加同一课程的两次考试。第一次合格的概率为  $P$ ，若第一次及格则第二次及格的概率也为  $P$ ；若第一次不及格则第二次及格的概率为  $\frac{P}{2}$  (1) 若至少有一次及格则他能取得某种资格，求他取得该资格的概率。(2) 若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率。

解：  $A_i = \{\text{他第 } i \text{ 次及格}\}$ ，  $i=1,2$

已知  $P(A_1) = P(A_2 | A_1) = P$ ，  $P(A_2 | \bar{A}_1) = \frac{P}{2}$

(1)  $B = \{\text{至少有一次及格}\}$

所以  $\bar{B} = \{\text{两次均不及格}\} = \bar{A}_1 \bar{A}_2$

$$\begin{aligned} \therefore P(B) &= 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) \\ &= 1 - [1 - P(A_1)][1 - P(A_2 | \bar{A}_1)] \\ &= 1 - (1 - P)(1 - \frac{P}{2}) = \frac{3}{2}P - \frac{1}{2}P^2 \end{aligned}$$

(2)  $P(A_1 | A_2) \stackrel{\text{定义}}{=} \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_2)}$  (\*)

由乘法公式，有  $P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) = P^2$

由全概率公式，有  $P(A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1)$

$$\begin{aligned} &= P \cdot P + (1 - P) \cdot \frac{P}{2} \\ &= \frac{P^2}{2} + \frac{P}{2} \end{aligned}$$

将以上两个结果代入 (\*) 得  $P(A_1 | A_2) = \frac{P^2}{\frac{P^2}{2} + \frac{P}{2}} = \frac{2P}{P+1}$

28.[二十五] 某人下午 5:00 下班，他所积累的资料表明：

到家时间	5:35~5:39	5:40~5:44	5:45~5:49	5:50~5:54	迟于 5:54
乘地铁到家的概率	0.10	0.25	0.45	0.15	0.05
乘汽车到家的概率	0.30	0.35	0.20	0.10	0.05

某日他抛一枚硬币决定乘地铁还是乘汽车，结果他是 5:47 到家的，试求他是乘地铁回家的概率。

解：设  $A =$  “乘地铁”， $B =$  “乘汽车”， $C =$  “5:45~5:49 到家”，由题意  $AB = \phi, A \cup B = S$

已知： $P(A)=0.5, P(C|A)=0.45, P(C|B)=0.2, P(B)=0.5$

由贝叶斯公式有

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)} = \frac{0.5 \times 0.45}{P(C|A)\frac{1}{2} + P(C|B)\frac{1}{2}} = \frac{0.45}{0.65} = \frac{9}{13} = 0.6923$$

29.[二十四] 有两箱同种类型的零件。第一箱装 5 只，其中 10 只一等品；第二箱 30 只，其中 18 只一等品。今从两箱中任挑出一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取一只，作不放回抽样。试求（1）第一次取到的零件是一等品的概率。（2）第一次取到的零件是一等品的条件下，第二次取到的也是一等品的概率。

解：设  $B_i$  表示 “第  $i$  次取到一等品”  $i=1, 2$

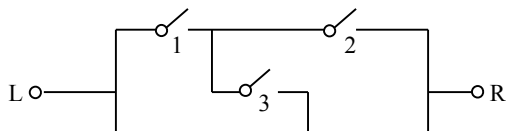
$A_j$  表示 “第  $j$  箱产品”  $j=1,2$ , 显然  $A_1 \cup A_2 = S, A_1 A_2 = \phi$

$$(1) P(B_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{50} + \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{30} = \frac{2}{5} = 0.4 \quad (B_1 = A_1 B_1 + A_2 B_1 \text{ 由全概率公式解}).$$

$$(2) P(B_2 | B_1) = \frac{P(B_1 B_2)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{50} \cdot \frac{9}{49} + \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29}}{\frac{2}{5}} = 0.4857$$

(先用条件概率定义，再求  $P(B_1 B_2)$  时，由全概率公式解)

32.[二十六 (2)] 如图 1, 2, 3, 4, 5



表示继电器接点，假设每一继电器接点闭合的概率为  $p$ ，且设各继电器闭合与否相互独立，求  $L$  和  $R$  是通路的概率。

记  $A_i$  表第  $i$  个接点接通

4

5

记  $A$  表从  $L$  到  $R$  是构成通路的。

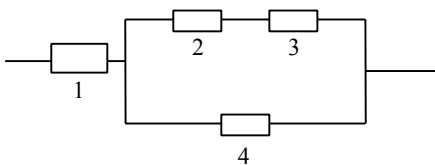
$\therefore A = A_1A_2 + A_1A_3A_5 + A_4A_5 + A_4A_3A_2$  四种情况不互斥

$$\begin{aligned} \therefore P(A) &= P(A_1A_2) + P(A_1A_3A_5) + P(A_4A_5) + P(A_4A_3A_2) - P(A_1A_2A_3A_5) \\ &\quad + P(A_1A_2A_4A_5) + P(A_1A_2A_3A_4) + P(A_1A_3A_4A_5) \\ &\quad + P(A_1A_2A_3A_4A_5) - P(A_2A_3A_4A_5) + P(A_1A_2A_3A_4A_5) + P(A_1A_2A_3A_4A_5) \\ &\quad + P(A_1A_2A_3A_4A_5) + P(A_1A_2A_3A_4A_5) - P(A_1A_2A_3A_4A_5) \end{aligned}$$

又由于  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  互相独立。

$$\begin{aligned} \text{故 } P(A) &= p^2 + p^3 + p^2 + p^3 - [p^4 + p^4 + p^4 + p^4 + p^5 + p^4] \\ &\quad + [p^5 + p^5 + p^5 + p^5] - p^5 = 2p^2 + 3p^3 - 5p^4 + 2p^5 \end{aligned}$$

[二十六 (1)] 设有 4 个独立工作的元件 1, 2, 3, 4。它们的可靠性分别为  $P_1, P_2, P_3, P_4$ ，将它们按图 (1) 的方式联接，求系统的可靠性。



记  $A_i$  表示第  $i$  个元件正常工作， $i=1, 2, 3, 4$ ，

$A$  表示系统正常。

$\therefore A = A_1A_2A_3 + A_1A_4$  两种情况不互斥

$$\begin{aligned} \therefore P(A) &= P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_4) - P(A_1A_2A_3A_4) \quad (\text{加法公式}) \\ &= P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\ &= P_1P_2P_3 + P_1P_4 - P_1P_2P_3P_4 \quad (A_1, A_2, A_3, A_4 \text{ 独立}) \end{aligned}$$

34.[三十一] 袋中装有  $m$  只正品硬币， $n$  只次品硬币，(次品硬币的两面均印有国徽)。在袋中任取一只，将它投掷  $r$  次，已知每次都得到国徽。问这只硬币是正品的概率为多少？

解：设“出现  $r$  次国徽面” =  $B_r$  “任取一只是正品” =  $A$

由全概率公式，有

$$P(B_r) = P(A)P(B_r | A) + P(\bar{A})P(B_r | \bar{A}) = \frac{m}{m+n} \left(\frac{1}{2}\right)^r + \frac{n}{m+n} \times 1^r$$
$$\therefore P(A | B_r) = \frac{P(A)P(B_r | A)}{P(B_r)} = \frac{\frac{m}{m+n} \left(\frac{1}{2}\right)^r}{\frac{m}{m+n} \left(\frac{1}{2}\right)^r + \frac{n}{m+n}} = \frac{m}{m+n \cdot 2^r}$$

(条件概率定义与乘法公式)

35. 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击，三人击中的概率分别为 0.4, 0.5, 0.7。飞机被一人击中而被击落的概率为 0.2，被两人击中而被击落的概率为 0.6，若三人都击中，飞机必定被击落。求飞机被击落的概率。

解：高  $H_i$  表示飞机被  $i$  人击中， $i=1, 2, 3$ 。  $B_1, B_2, B_3$  分别表示甲、乙、丙击中飞机

$$\therefore H_1 = \bar{B}_1 \bar{B}_2 B_3 + \bar{B}_1 B_2 \bar{B}_3 + B_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3, \text{ 三种情况互斥。}$$

$$H_2 = B_1 B_2 \bar{B}_3 + B_1 \bar{B}_2 B_3 + \bar{B}_1 B_2 B_3 \text{ 三种情况互斥}$$

$$H_3 = B_1 B_2 B_3$$

又  $B_1, B_2, B_3$  独立。

$$\therefore P(H_1) = P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2)P(B_3) + P(\bar{B}_1)P(B_2)P(\bar{B}_3) + P(B_1)P(\bar{B}_2)P(\bar{B}_3)$$
$$= 0.4 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.7 = 0.36$$

$$P(H_2) = P(B_1)P(B_2)P(\bar{B}_3) + P(B_1)P(\bar{B}_2)P(B_3) + P(\bar{B}_1)P(B_2)P(B_3)$$
$$= 0.4 \times 0.5 \times 0.3 + 0.4 \times 0.5 \times 0.7 + 0.6 \times 0.5 \times 0.7 = 0.41$$

$$P(H_3) = P(B_1)P(B_2)P(B_3) = 0.4 \times 0.5 \times 0.7 = 0.14$$

又因:  $A=H_1A+H_2A+H_3A$  三种情况互斥

故由全概率公式, 有

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3) \\ &= 0.36 \times 0.2 + 0.41 \times 0.6 + 0.14 \times 1 = 0.458 \end{aligned}$$

36.[三十三] 设由以往记录的数据分析。某船只运输某种物品损坏 2% (这一事件记为  $A_1$ ), 10% (事件  $A_2$ ), 90% (事件  $A_3$ ) 的概率分别为  $P(A_1)=0.8$ ,  $P(A_2)=0.15$ ,  $P(A_3)=0.05$ , 现从中随机地独立地取三件, 发现这三件都是好的 (这一事件记为  $B$ ), 试分别求  $P(A_1|B)$ ,  $P(A_2|B)$ ,  $P(A_3|B)$  (这里设物品件数很多, 取出第一件以后不影响取第二件的概率, 所以取第一、第二、第三件是互相独立地)

$\therefore B$  表取得三件好物品。

$$B=A_1B+A_2B+A_3B \quad \text{三种情况互斥}$$

由全概率公式, 有

$$\begin{aligned} \therefore P(B) &= P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3) \\ &= 0.8 \times (0.98)^3 + 0.15 \times (0.9)^3 + 0.05 \times (0.1)^3 = 0.8624 \end{aligned}$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.8 \times (0.98)^3}{0.8624} = 0.8731$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0.15 \times (0.9)^3}{0.8624} = 0.1268$$

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3B)}{P(B)} = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{0.05 \times (0.1)^3}{0.8624} = 0.0001$$

37.[三十四] 将  $A, B, C$  三个字母之一输入信道, 输出为原字母的概率为  $\alpha$ , 而输出为其它一字母的概率都是  $(1-\alpha)/2$ 。今将字母串  $AAAA, BBBB, CCCC$  之一输入信道, 输入  $AAAA, BBBB, CCCC$  的概率分别为  $p_1, p_2, p_3$  ( $p_1+p_2+p_3=1$ ), 已知输出为  $ABCA$ , 问输入的是  $AAAA$  的概率是多少? (设信道传输每个字母的工作是相互独立的。)

解: 设  $D$  表示输出信号为  $ABCA$ ,  $B_1, B_2, B_3$  分别表示输入信号为  $AAAA, BBBB, CCCC$ , 则  $B_1, B_2, B_3$  为一完备事件组, 且  $P(B_i)=P_i, i=1, 2, 3$ 。

再设  $A$  发、 $A$  收分别表示发出、接收字母  $A$ , 其余类推, 依题意有

$$P(A_{\text{收}}|A_{\text{发}})=P(B_{\text{收}}|B_{\text{发}})=P(C_{\text{收}}|C_{\text{发}})=\alpha,$$

$$P(A_{\text{收}}|B_{\text{发}})=P(A_{\text{收}}|C_{\text{发}})=P(B_{\text{收}}|A_{\text{发}})=P(B_{\text{收}}|C_{\text{发}})=P(C_{\text{收}}|A_{\text{发}})=P(C_{\text{收}}|B_{\text{发}})=\frac{1-\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } P(ABCA|AAAA) &= P(D|B_1) = P(A_{\text{收}}|A_{\text{发}})P(B_{\text{收}}|A_{\text{发}})P(C_{\text{收}}|A_{\text{发}})P(A_{\text{收}}|A_{\text{发}}) \\ &= \alpha^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

$$\text{同样可得 } P(D|B_2)=P(D|B_3)=\alpha\cdot\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3$$

于是由全概率公式，得

$$\begin{aligned} P(D) &= \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(D|B_i) \\ &= p_1\alpha^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 + (P_2 + P_3)\alpha\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

由 Bayes 公式，得

$$\begin{aligned} P(AAAA|ABCA) &= P(B_1|D) = \frac{P(B_1)P(D|B_1)}{P(D)} \\ &= \frac{2\alpha P_1}{2\alpha P_1 + (1-\alpha)(P_2 + P_3)} \end{aligned}$$

[二十九] 设第一只盒子装有 3 只蓝球，2 只绿球，2 只白球；第二只盒子装有 2 只蓝球，3 只绿球，4 只白球。独立地分别从两只盒子各取一只球。(1) 求至少有一只蓝球的概率，(2) 求有一只蓝球一只白球的概率，(3) 已知至少有一只蓝球，求有一只蓝球一只白球的概率。

解：记  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  分别表示是从第一只盒子中取到一只蓝球、绿球、白球， $B_1$ 、 $B_2$ 、 $B_3$  分别表示是从第二只盒子中取到一只蓝球、绿球、白球。

(1) 记  $C=\{\text{至少有一只蓝球}\}$

$C=A_1B_1+A_1B_2+A_1B_3+A_2B_1+A_3B_1$ ，5 种情况互斥

由概率有限可加性，得

$$P(C) = P(A_1B_1) + P(A_1B_2) + P(A_1B_3) + P(A_2B_1) + P(A_3B_1)$$

$$\underline{\text{独立性}} P(A_1)P(B_1) + P(A_1)P(B_2) + P(A_1)P(B_3) + P(A_2)P(B_1) + P(A_3)P(B_1)$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9} + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

(2) 记  $D = \{\text{有一只蓝球, 一只白球}\}$ , 而且知  $D = A_1B_3 + A_3B_1$  两种情况互斥

$$P(D) = P(A_1B_3 + A_3B_1) = P(A_1)P(B_3) + P(A_3)P(B_1)$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{63}$$

$$(3) P(D|C) = \frac{P(CD)}{P(C)} = \frac{P(D)}{P(C)} = \frac{16}{35} \quad (\text{注意到 } CD = D)$$

[三十]  $A, B, C$  三人在同一办公室工作, 房间有三部电话, 据统计知, 打给  $A, B, C$  的电话的概率分别为  $\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$ 。他们三人常因工作外出,  $A, B, C$  三人外出的概率分别为  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ , 设三人的行动相互独立, 求

(1) 无人接电话的概率; (2) 被呼叫人在办公室的概率; 若某一时间断打进了 3 个电话, 求 (3) 这 3 个电话打给同一人的概率; (4) 这 3 个电话打给不同人的概率; (5) 这 3 个电话都打给  $B$ , 而  $B$  却都不在的概率。

解: 记  $C_1, C_2, C_3$  分别表示打给  $A, B, C$  的电话

$D_1, D_2, D_3$  分别表示  $A, B, C$  外出

注意到  $C_1, C_2, C_3$  独立, 且  $P(C_1) = P(C_2) = \frac{2}{5}, P(C_3) = \frac{1}{5}$

$$P(D_1) = \frac{1}{2}, P(D_2) = P(D_3) = \frac{1}{4}$$

$$(1) P(\text{无人接电话}) = P(D_1D_2D_3) = P(D_1)P(D_2)P(D_3)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$

(2) 记  $G = \text{“被呼叫人在办公室”}$ ,  $G = C_1\overline{D_1} + C_2\overline{D_2} + C_3\overline{D_3}$  三种情况互斥, 由有限可加性与乘法公式

$$\begin{aligned}
 P(G) &= P(C_1 \overline{D_1}) + P(C_2 \overline{D_2}) + P(C_3 \overline{D_3}) \\
 &= P(C_1)P(\overline{D_1} | C_1) + P(C_2)P(\overline{D_2} | C_2) + P(C_3)P(\overline{D_3} | C_3) \\
 &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{13}{20}
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \text{由于某人外出与} \\ \text{否和来电话无关} \\ \text{故 } P(\overline{D_k} | C_k) = P(\overline{D_k}) \end{array} \right)$$

(3)  $H$ 为“这3个电话打给同一个人”

$$P(H) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{17}{125}$$

(4)  $R$ 为“这3个电话打给不同的人”

$R$ 由六种互斥情况组成，每种情况为打给A, B, C的三个电话，每种情况的概率为

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{125}$$

$$\text{于是 } P(R) = 6 \times \frac{4}{125} = \frac{24}{125}$$

(5) 由于是知道每次打电话都给B，其概率是1，所以每一次打给B电话而B不在的概率为 $\frac{1}{4}$ ，且各次情况相互独立

$$\text{于是 } P(\text{3个电话都打给B, B都不在的概率}) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

## 第二章 随机变量及其分布

1.[一] 一袋中有5只乒乓球，编号为1、2、3、4、5，在其中同时取三只，以 $X$ 表示取出的三只球中的最大号码，写出随机变量 $X$ 的分布律

解： $X$ 可以取值3, 4, 5，分布律为

$$P(X=3) = P(\text{一球为3号, 两球为1,2号}) = \frac{1 \times C_2^2}{C_5^3} = \frac{1}{10}$$

$$P(X=4) = P(\text{一球为4号, 再在1,2,3中任取两球}) = \frac{1 \times C_3^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=5) = P(\text{一球为5号, 再在1,2,3,4中任取两球}) = \frac{1 \times C_4^2}{C_5^3} = \frac{6}{10}$$

也可列为下表

$X$ : 3, 4, 5

$P$ :  $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{6}{10}$

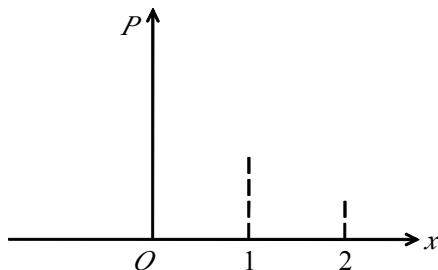
3.[三] 设在 15 只同类型零件中有 2 只是次品, 在其中取三次, 每次任取一只, 作不放回抽样, 以  $X$  表示取出次品的只数, (1) 求  $X$  的分布律, (2) 画出分布律的图形。

解: 任取三只, 其中新含次品个数  $X$  可能为 0, 1, 2 个。

$$P(X=0) = \frac{C_{13}^3}{C_{15}^3} = \frac{22}{35}$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 \times C_{13}^2}{C_{15}^3} = \frac{12}{35}$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 \times C_{13}^1}{C_{15}^3} = \frac{1}{35}$$



再列为下表

$X$ : 0, 1, 2

$P$ :  $\frac{22}{35}, \frac{12}{35}, \frac{1}{35}$

4.[四] 进行重复独立实验, 设每次成功的概率为  $p$ , 失败的概率为  $q=1-p(0<p<1)$

(1) 将实验进行到出现一次成功为止, 以  $X$  表示所需的试验次数, 求  $X$  的分布律。(此时称  $X$  服从以  $p$  为参数的几何分布。)

(2) 将实验进行到出现  $r$  次成功为止, 以  $Y$  表示所需的试验次数, 求  $Y$  的分布律。(此时称  $Y$  服从以  $r, p$  为参数的巴斯卡分布。)

(3) 一篮球运动员的投篮命中率为 45%, 以  $X$  表示他首次投中时累计已投篮的次数, 写出  $X$  的分布律, 并计算  $X$  取偶数的概率。

解: (1)  $P(X=k) = q^{k-1}p \quad k=1, 2, \dots$

(2)  $Y=r+n = \{\text{最后一次实验前 } r+n-1 \text{ 次有 } n \text{ 次失败, 且最后一次成功}\}$

$P(Y=r+n) = C_{r+n-1}^n q^n p^{r-1} p = C_{r+n-1}^n q^n p^r$ ,  $n=0,1,2,\dots$ , 其中  $q=1-p$ ,  
 或记  $r+n=k$ , 则  $P\{Y=k\} = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$ ,  $k=r, r+1, \dots$

$$(3) P(X=k) = (0.55)^{k-1} 0.45 \quad k=1,2,\dots$$

$$P(X \text{ 取偶数}) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X=2k) = \sum_{k=1}^{\infty} (0.55)^{2k-1} 0.45 = \frac{11}{31}$$

6.[六] 一大楼装有 5 个同类型的供水设备, 调查表明在任一时刻  $t$  每个设备使用的概率为 0.1, 问在同一时刻

(1) 恰有 2 个设备被使用的概率是多少?

$$P(X=2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = C_5^2 \times (0.1)^2 \times (0.9)^3 = 0.0729$$

(2) 至少有 3 个设备被使用的概率是多少?

$$P(X \geq 3) = C_5^3 \times (0.1)^3 \times (0.9)^2 + C_5^4 \times (0.1)^4 \times (0.9) + C_5^5 \times (0.1)^5 = 0.00856$$

(3) 至多有 3 个设备被使用的概率是多少?

$$P(X \leq 3) = C_5^0 (0.9)^5 + C_5^1 \times 0.1 \times (0.9)^4 + C_5^2 \times (0.1)^2 \times (0.9)^3 \\ + C_5^3 \times (0.1)^3 \times (0.9)^2 = 0.99954$$

(4) 至少有一个设备被使用的概率是多少?

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.59049 = 0.40951$$

[五] 一房间有 3 扇同样大小的窗子, 其中只有一扇是打开的。有一只鸟自开着的窗子飞入了房间, 它只能从开着的窗子飞出去。鸟在房子里飞来飞去, 试图飞出房间。假定鸟是没有记忆的, 鸟飞向各扇窗子是随机的。

(1) 以  $X$  表示鸟为了飞出房间试飞的次数, 求  $X$  的分布律。

(2) 户主声称, 他养的一只鸟, 是有记忆的, 它飞向任一窗子的尝试不多于一次。以  $Y$  表示这只聪明的鸟为了飞出房间试飞的次数, 如户主所说是确实的, 试求  $Y$  的分布律。

(3) 求试飞次数  $X$  小于  $Y$  的概率; 求试飞次数  $Y$  小于  $X$  的概率。

解: (1)  $X$  的可能取值为 1, 2, 3,  $\dots$ ,  $n, \dots$

$$P\{X=n\} = P\{\text{前 } n-1 \text{ 次飞向了另 2 扇窗子, 第 } n \text{ 次飞了出去}\} \\ = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}, \quad n=1, 2, \dots$$

(2)  $Y$  的可能取值为 1, 2, 3

$$P\{Y=1\} = P\{\text{第 1 次飞了出去}\} = \frac{1}{3}$$

$$P\{Y=2\} = P\{\text{第 1 次飞向另 2 扇窗子中的一扇, 第 2 次飞了出去}\}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$P\{Y=3\} = P\{\text{第1, 2次飞向了另2扇窗子, 第3次飞了出去}\}$

$$= \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}$$

$$(3) P\{X < Y\} = \sum_{k=1}^3 P\{Y=k\} P\{X < Y | Y=k\} \quad \left( \begin{array}{l} \text{全概率公式并注意到} \\ P\{X < Y | Y=1\} = 0 \end{array} \right)$$

$$= \sum_{k=2}^3 P\{Y=k\} P\{X < Y | Y=k\}$$

$$= \sum_{k=2}^3 P\{Y=k\} P\{X < k\} \quad \begin{array}{l} \text{注意到 } X, Y \text{ 独立即} \\ P\{X < Y | Y=k\} \\ = P\{X < k\} \end{array}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \right] = \frac{8}{27}$$

同上,  $P\{X=Y\} = \sum_{k=1}^3 P\{Y=k\} P\{X=Y | Y=k\}$

$$= \sum_{k=1}^3 P\{Y=k\} P\{X=k\} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{27} = \frac{19}{81}$$

故  $P\{Y < X\} = 1 - P\{X < Y\} - P\{X=Y\} = \frac{38}{81}$

8.[八] 甲、乙二人投篮, 投中的概率各为 0.6, 0.7, 令各投三次。求

(1) 二人投中次数相等的概率。

记  $X$  表甲三次投篮中投中的次数

$Y$  表乙三次投篮中投中的次数

由于甲、乙每次投篮独立, 且彼此投篮也独立。

$$P(X=Y) = P(X=0, Y=0) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=3)$$

$$= P(X=0) P(Y=0) + P(X=1) P(Y=1) + P(X=2) P(Y=2) + P(X=3) P(Y=3)$$

$$= (0.4)^3 \times (0.3)^3 + [C_3^1 \times 0.6 \times (0.4)^2] \times [C_3^1 \times 0.7 \times (0.3)^2]$$

$$+ [C_3^2 \times (0.6)^2 \times 0.4] \times [C_3^2 \times (0.7)^2 \times .3] + (0.6)^3$$

$$\times (0.7)^3 = 0.321$$

(2) 甲比乙投中次数多的概率。

$$P(X > Y) = P(X=1, Y=0) + P(X=2, Y=0) + P(X=2, Y=1) +$$

$$P(X=3) P(Y=0) + P(X=3) P(Y=1) + P(X=3) P(Y=2)$$

$$= P(X=1) P(Y=0) + P(X=2, Y=0) + P(X=2, Y=1) +$$

$$\begin{aligned}
& P(X=3)P(Y=0)+P(X=3)P(Y=1)+P(X=3)P(Y=2) \\
& = [C_3^1 \times 0.6 \times (0.4)^2] \times (0.3)^3 + [C_3^2 \times (0.6)^2 \times 0.4] \times (0.3)^8 + \\
& \quad [C_3^2 \times (0.6)^2 \times 0.4] \times [C_3^1 \times 0.7 \times (0.3)^2] + (0.6)^3 \\
& \quad \times (0.3)^3 + (0.6)^3 \times [C_3^1 \times 0.7 \times (0.3)^2] + (0.6)^3 \\
& \quad \times [C_3^2 \times (0.7)^2 \times 0.3] = 0.243
\end{aligned}$$

9.[十] 有甲、乙两种味道和颜色极为相似的名酒各 4 杯。如果从中挑 4 杯，能将甲种酒全部挑出来，算是试验成功一次。

(1) 某人随机地去猜，问他试验成功一次的概率是多少？

(2) 某人声称他通过品尝能区分两种酒。他连续试验 10 次，成功 3 次。试问他是猜对的，还是他确有区分的能力（设各次试验是相互独立的。）

解：(1)  $P(\text{一次成功}) = \frac{1}{C_8^4} = \frac{1}{70}$

(2)  $P(\text{连续试验 10 次，成功 3 次}) = C_{10}^3 \left(\frac{1}{70}\right)^3 \left(\frac{69}{70}\right)^7 = \frac{3}{10000}$ 。此概率太小，按实际推断原理，就认为他确有区分能力。

[九] 有一大批产品，其验收方案如下，先做第一次检验：从中任取 10 件，经验收无次品接受这批产品，次品数大于 2 拒收；否则作第二次检验，其做法是从中再任取 5 件，仅当 5 件中无次品时接受这批产品，若产品的次品率为 10%，求

- (1) 这批产品经第一次检验就能接受的概率
- (2) 需作第二次检验的概率
- (3) 这批产品按第 2 次检验的标准被接受的概率
- (4) 这批产品在第 1 次检验未能做决定且第二次检验时被通过的概率
- (5) 这批产品被接受的概率

解： $X$  表示 10 件中次品的个数， $Y$  表示 5 件中次品的个数，

由于产品总数很大，故  $X \sim B(10, 0.1)$ ， $Y \sim B(5, 0.1)$ （近似服从）

- (1)  $P\{X=0\} = 0.9^{10} \approx 0.349$
- (2)  $P\{X \leq 2\} = P\{X=2\} + P\{X=1\} = C_{10}^2 0.1^2 0.9^8 + C_{10}^1 0.1 0.9^9 \approx 0.581$
- (3)  $P\{Y=0\} = 0.9^5 \approx 0.590$
- (4)  $P\{0 < X \leq 2, Y=0\}$  ( $\{0 < X \leq 2\}$  与  $\{Y=2\}$  独立)  
 $= P\{0 < X \leq 2\} P\{Y=0\}$

$$=0.581 \times 0.590 \approx 0.343$$

$$(5) P\{X=0\} + P\{0 < X \leq 2, Y=0\}$$

$$\approx 0.349 + 0.343 = 0.692$$

12.[十三] 电话交换台每分钟的呼唤次数服从参数为 4 的泊松分布, 求

(1) 每分钟恰有 8 次呼唤的概率

$$\text{法一: } P(X=8) = \frac{4^8}{8!} e^{-4} = 0.029770 \quad (\text{直接计算})$$

$$\text{法二: } P(X=8) = P(X \geq 8) - P(X \geq 9) \quad (\text{查 } \lambda = 4 \text{ 泊松分布表}).$$

$$= 0.051134 - 0.021363 = 0.029771$$

(2) 每分钟的呼唤次数大于 10 的概率。

$$P(X > 10) = P(X \geq 11) = 0.002840 \quad (\text{查表计算})$$

[十二 (2)] 每分钟呼唤次数大于 3 的概率。

$$P\{X > 3\} = P\{X \geq 4\} = 0.566530$$

[十六] 以  $X$  表示某商店从早晨开始营业起直到第一顾客到达的等待时间(以分计),  $X$  的分布函数是

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.4x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

求下述概率:

(1)  $P\{\text{至多 3 分钟}\}$ ; (2)  $P\{\text{至少 4 分钟}\}$ ; (3)  $P\{3 \text{ 分钟至 } 4 \text{ 分钟之间}\}$ ;

(4)  $P\{\text{至多 3 分钟或至少 4 分钟}\}$ ; (5)  $P\{\text{恰好 2.5 分钟}\}$

$$\text{解: (1) } P\{\text{至多 3 分钟}\} = P\{X \leq 3\} = F_X(3) = 1 - e^{-1.2}$$

$$(2) P\{\text{至少 4 分钟}\} = P(X \geq 4) = 1 - F_X(4) = e^{-1.6}$$

$$(3) P\{3 \text{ 分钟至 } 4 \text{ 分钟之间}\} = P\{3 < X \leq 4\} = F_X(4) - F_X(3) = e^{-1.2} - e^{-1.6}$$

$$(4) P\{\text{至多 3 分钟或至少 4 分钟}\} = P\{\text{至多 3 分钟}\} + P\{\text{至少 4 分钟}\}$$

$$= 1 - e^{-1.2} + e^{-1.6}$$

$$(5) P\{\text{恰好 2.5 分钟}\} = P(X=2.5) = 0$$

18.[十七] 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \ln x, & 1 \leq x < e, \\ 1, & x \geq e. \end{cases}$

求 (1)  $P(X < 2)$ ,  $P\{0 < X \leq 3\}$ ,  $P(2 < X < \frac{5}{2})$ ; (2) 求概率密度  $f_X(x)$ .

$$\text{解: (1) } P(X \leq 2) = F_X(2) = \ln 2, \quad P(0 < X \leq 3) = F_X(3) - F_X(0) = 1,$$

$$P(2 < X < \frac{5}{2}) = F_X(\frac{5}{2}) - F_X(2) = \ln \frac{5}{2} - \ln 2 = \ln \frac{5}{4}$$

$$(2) f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 1 < x < e, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

20.[十八(2)] 设随机变量  $X$  的概率密度  $f(x)$  为

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求  $X$  的分布函数  $F(x)$ , 并作出 (2) 中的  $f(x)$  与  $F(x)$  的图形。

解: 当  $-1 \leq x \leq 1$  时:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^x \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right]_{-1}^x \\ &= \frac{1}{\pi} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\pi} \arcsin x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{当 } 1 < x \text{ 时: } F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \int_{-1}^1 \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} dx + \int_1^x 0 dx = 1$$

故分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{\pi} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\pi} \arcsin x + \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$

$$\text{解: (2) } F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

$$\text{当 } 0 \leq x < 1 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$$

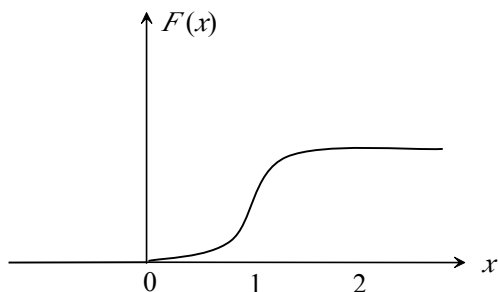
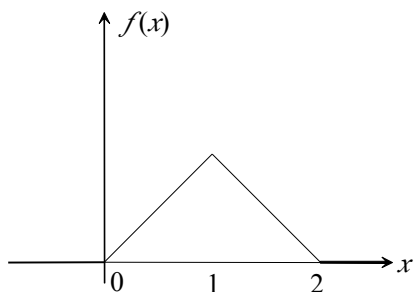
$$\text{当 } 1 \leq x \leq 2 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 t dt + \int_1^x (2-t) dt = 2x - \frac{x^2}{2} - 1$$

$$\text{当 } 2 < x \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 t dt + \int_1^2 (2-t) dt + \int_2^x 0 dt = 1$$

故分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

(2) 中的  $f(x)$  与  $F(x)$  的图形如下



22.[二十] 某种型号的电子的寿命  $X$  (以小时计) 具有以下的概率密度:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10000}{x^2} & x > 1000 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

现有一大批此种管子 (设各电子管损坏与否相互独立)。任取 5 只, 问其中至少有 2 只寿命大于 1500 小时的概率是多少?

解: 一个电子管寿命大于 1500 小时的概率为

$$\begin{aligned} P(X > 1500) &= 1 - P(X \leq 1500) = 1 - \int_{1000}^{1500} \frac{10000}{x^2} dx = 1 - \left\{ 10000 \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_{1000}^{1500} \right\} \\ &= 1 - \left( 1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

令  $Y$  表示 “任取 5 只此种电子管中寿命大于 1500 小时的个数”。则  $Y \sim B(5, \frac{2}{3})$ ,

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y < 2) = 1 - \{P(Y=0) + P(Y=1)\} = 1 - \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^5 + C_5^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \right\} \\ &= 1 - \frac{1 + 5 \times 2}{3^5} = 1 - \frac{11}{243} = \frac{232}{243} \end{aligned}$$

23.[二十一] 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间  $X$  (以分计) 服从指数分布, 其概率密度为:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟他就离开。他一个月要到银行 5 次。以  $Y$  表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，写出  $Y$  的分布律。并求  $P(Y \geq 1)$ 。

解：该顾客“一次等待服务未成而离去”的概率为

$$P(X > 10) = \int_{10}^{+\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{5} \int_{10}^{+\infty} e^{-\frac{x}{5}} dx = -e^{-\frac{x}{5}} \Big|_{10}^{+\infty} = e^{-2}$$

因此  $Y \sim B(5, e^{-2})$ . 即  $P(Y = k) = \binom{5}{k} e^{-2k} (1 - e^{-2})^{5-k}$ ,  $(k=1, 2, 3, 4, 5)$

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - e^{-2})^5 = 1 - \left(1 - \frac{1}{7.389}\right)^5 = 1 - (1 - 0.1353363)^5 \\ &= 1 - 0.8677^5 = 1 - 0.4833 = 0.5167. \end{aligned}$$

24.[二十二] 设  $K$  在  $(0, 5)$  上服从均匀分布，求方程  $4x^2 + 4xK + K + 2 = 0$  有实根的概率

$$\therefore K \text{ 的分布密度为: } f(K) = \begin{cases} \frac{1}{5-0} & 0 < K < 5 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

要方程有根，就是要  $K$  满足  $(4K)^2 - 4 \times 4 \times (K+2) \geq 0$ 。

解不等式，得  $K \geq 2$  时，方程有实根。

$$\therefore P(K \geq 2) = \int_2^{+\infty} f(x) dx = \int_2^5 \frac{1}{5} dx + \int_5^{+\infty} 0 dx = \frac{3}{5}$$

25.[二十三] 设  $X \sim N(3, 2^2)$

(1) 求  $P(2 < X \leq 5)$ ,  $P(-4 < X \leq 10)$ ,  $P\{|X| > 2\}$ ,  $P(X > 3)$

$$\therefore \text{若 } X \sim N(\mu, \sigma^2), \text{ 则 } P(\alpha < X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore P(2 < X \leq 5) &= \Phi\left(\frac{5-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2-3}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0.5) \\ &= 0.8413 - 0.3085 = 0.5328 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(-4 < X \leq 10) &= \Phi\left(\frac{10-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-4-3}{2}\right) = \Phi(3.5) - \Phi(-3.5) \\ &= 0.9998 - 0.0002 = 0.9996 \end{aligned}$$

$$P(|X| > 2) = 1 - P(|X| \leq 2) = 1 - P(-2 < X < 2)$$

$$= 1 - \left[ \Phi\left(\frac{2-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2-3}{2}\right) \right]$$

$$=1 - \Phi(-0.5) + \Phi(-2.5)$$

$$=1 - 0.3085 + 0.0062 = 0.6977$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \Phi\left(\frac{3-3}{2}\right) = 1 - 0.5 = 0.5$$

(2) 决定  $C$  使得  $P(X > C) = P(X \leq C)$

$$\therefore P(X > C) = 1 - P(X \leq C) = P(X \leq C)$$

得  $P(X \leq C) = \frac{1}{2} = 0.5$

又  $P(X \leq C) = \Phi\left(\frac{C-3}{2}\right) = 0.5$ , 查表可得  $\frac{C-3}{2} = 0 \quad \therefore C = 3$

26.[二十四] 某地区 18 岁的女青年的血压(收缩区, 以 mm-Hg 计)服从  $N(110, 12^2)$  在该地区任选一 18 岁女青年, 测量她的血压  $X$ 。求

(1)  $P(X \leq 105)$ ,  $P(100 < X \leq 120)$ . (2) 确定最小的  $X$  使  $P(X > x) \leq 0.05$ .

解: (1)  $P(X \leq 105) = \Phi\left(\frac{105-110}{12}\right) = \Phi(-0.4167) = 1 - \Phi(0.4167) = 1 - 0.6616 = 0.3384$

$$P(100 < X \leq 120) = \Phi\left(\frac{120-110}{12}\right) - \Phi\left(\frac{100-110}{12}\right) = \Phi\left(\frac{5}{6}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{6}\right)$$

$$= 2\Phi\left(\frac{5}{6}\right) - 1 = 2\Phi(0.8333) - 1 = 2 \times 0.7976 - 1 = 0.5952$$

$$(2) P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \Phi\left(\frac{x-110}{12}\right) \leq 0.05 \Rightarrow \Phi\left(\frac{x-110}{12}\right) \geq 0.95.$$

查表得  $\frac{x-110}{12} \geq 1.645 \Rightarrow x \geq 110 + 19.74 = 129.74$ . 故最小的  $X = 129.74$ .

27.[二十五] 由某机器生产的螺栓长度 ( $cm$ ) 服从参数为  $\mu = 10.05$ ,  $\sigma = 0.06$  的正态分布。规定长度在范围  $10.05 \pm 0.12$  内为合格品, 求一螺栓为不合格的概率是多少?

设螺栓长度为  $X$

$$P\{X \text{ 不属于 } (10.05 - 0.12, 10.05 + 0.12)\}$$

$$= 1 - P(10.05 - 0.12 < X < 10.05 + 0.12)$$

$$= 1 - \left\{ \Phi\left[\frac{(10.05 + 0.12) - 10.05}{0.06}\right] - \Phi\left[\frac{(10.05 - 0.12) - 10.05}{0.06}\right] \right\}$$

$$= 1 - \{ \Phi(2) - \Phi(-2) \}$$

$$= 1 - \{ 0.9772 - 0.0228 \}$$

$$= 0.0456$$

28.[二十六] 一工厂生产的电子管的寿命  $X$  (以小时计) 服从参数为  $\mu = 160$ ,  $\sigma$  (未知) 的正态分布, 若要求  $P(120 < X \leq 200) = 0.80$ , 允许  $\sigma$  最大为多少?

$$\therefore P(120 < X \leq 200) = \Phi\left(\frac{200-160}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{120-160}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{40}{\sigma}\right) = 0.80$$

又对标准正态分布有  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$$\therefore \text{上式变为 } \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)\right] \geq 0.80$$

$$\text{解出 } \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) \text{ 便得: } \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) \geq 0.9$$

$$\text{再查表, 得 } \frac{40}{\sigma} \geq 1.281 \quad \sigma \leq \frac{40}{1.281} = 31.25$$

30.[二十七] 设随机变量  $X$  的分布律为:

$$\begin{array}{ccccc} X: & -2, & -1, & 0, & 1, & 3 \\ P: & \frac{1}{5}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{15}, & \frac{11}{30} \end{array}$$

求  $Y=X^2$  的分布律

$$\begin{array}{ccccc} Y=X^2: & (-2)^2 & (-1)^2 & (0)^2 & (1)^2 & (3)^2 \\ P: & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{11}{30} \end{array}$$

再把  $X^2$  的取值相同的合并, 并按从小到大排列, 就得函数  $Y$  的分布律为:

$$\begin{array}{ccccc} Y: & 0 & 1 & 4 & 9 \\ P: & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} + \frac{1}{15} & \frac{1}{5} & \frac{11}{30} \end{array}$$

31.[二十八] 设随机变量  $X$  在  $(0, 1)$  上服从均匀分布

(1) 求  $Y=e^X$  的分布密度

$$\therefore X \text{ 的分布密度为: } f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x \text{ 为其他} \end{cases}$$

$Y=g(X) = e^X$  是单调增函数

又  $X=h(Y) = \ln Y$ , 反函数存在

且  $\alpha = \min[g(0), g(1)] = \min(1, e) = 1$

$\beta = \max[g(0), g(1)] = \max(1, e) = e$

$$\therefore Y \text{ 的分布密度为: } \psi(y) = \begin{cases} f[h(y)] \cdot |h'(y)| = 1 \cdot \frac{1}{y} & 1 < y < e \\ 0 & y \text{ 为其他} \end{cases}$$

(2) 求  $Y=-2\ln X$  的概率密度。

$\therefore Y=g(X) = -2\ln X$  是单调减函数

又  $X=h(Y) = e^{-\frac{Y}{2}}$  反函数存在。

且  $\alpha = \min[g(0), g(1)] = \min(+\infty, 0) = 0$

$\beta = \max[g(0), g(1)] = \max(+\infty, 0) = +\infty$

$\therefore Y$  的分布密度为: 
$$\psi(y) = \begin{cases} f[h(y)] \cdot |h'(y)| = 1 \cdot \left| -\frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} \right| = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} & 0 < y < +\infty \\ 0 & y \text{ 为其他} \end{cases}$$

32.[二十九] 设  $X \sim N(0, 1)$

(1) 求  $Y=e^X$  的概率密度

$\therefore X$  的概率密度是  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty$

$Y=g(X)=e^X$  是单调增函数

又  $X=h(Y)=\ln Y$  反函数存在

且  $\alpha = \min[g(-\infty), g(+\infty)] = \min(0, +\infty) = 0$

$\beta = \max[g(-\infty), g(+\infty)] = \max(0, +\infty) = +\infty$

$\therefore Y$  的分布密度为:

$$\psi(y) = \begin{cases} f[h(y)] \cdot |h'(y)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}} \cdot \frac{1}{y} & 0 < y < +\infty \\ 0 & y \text{ 为其他} \end{cases}$$

(2) 求  $Y=2X^2+1$  的概率密度。

在这里,  $Y=2X^2+1$  在  $(+\infty, -\infty)$  不是单调函数, 没有一般的结论可用。

设  $Y$  的分布函数是  $F_Y(y)$ ,

则  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(2X^2+1 \leq y)$

$$= P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}} \leq X \leq \sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)$$

当  $y < 1$  时:  $F_Y(y) = 0$

当  $y \geq 1$  时: 
$$F_Y(y) = P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}} \leq X \leq \sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) = \int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

故  $Y$  的分布密度  $\psi(y)$  是:

当  $y \leq 1$  时:  $\psi(y) = [F_Y(y)]' = (0)' = 0$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/875104343242011100>