电 磁 场 理 论

Electromagnetic Theory

郑州大学　马凤英

序　论

一、电磁学发展史

二、该课程的基本内容

三、场的基本概念

四、学习的目的、措施及其要求

一、电磁学发展史

1. 电现象最早的记载：公元前 623年左右（摩擦起电）

2. 1745年，荷兰莱顿大学教授马森布罗克制成了莱顿瓶，能够将电荷储存起来，供电学试验使用，为电学研究打下了基础。

3. 1752年7月，美国著名的科学家、文学家、政治家富兰克林（正电、负电；电荷守恒；避雷针）的风筝试验，证明了闪电是放电现象，从此拉开了人们研究电学的序幕。

•4. 1753年，俄国著名的电学家利赫曼在验证富兰克林的试验时，被雷电击中，为科学探索献出了宝贵的生命。

•5. 1638年，在我国的某些建筑学的书籍中就有有关避雷的记载：屋顶的四角都被雕饰成龙头的形状，仰头、张口，在它们的舌头上有一根金属芯子，其末端伸到地下，如有雷电击中房顶，会顺着龙舌引入地下，不会对房屋造成危险。

•6. 1771~1773年间，英国科学家卡文迪许进行了大量的静电试验，证明在静电情况下，导体上的电荷只分布在导体表面上。

7. 1785年，法国科学家库仑在试验规律的基础上，提出了第一种电学定律：库仑定律。使电学研究走上了理论研究的道路。

8. 1823年，由丹麦的科学家奥斯特在课堂上的一次试验中，发觉了电的磁效应，从此将电和磁联络在一起 。

9. 1823年，法国科学家安培提出了安培环路定律，将奥斯特的发觉上升为理论。

10. 1825年，德国科学家欧姆得出了第一种电路定律：欧姆定律。

11. 1831年，英国试验物理学家法拉第发觉了电磁感应定律 。并设计了世界上第一台感应发电机。

- 12、1840年，英国科学家焦耳提出了焦耳定律，揭示了电磁现象的能量特征。
- 13、1848年，德国科学家基尔霍夫提出了基尔霍夫电路理论，使电路理论趋于完善。
- 奥斯特的电生磁和法拉第的磁生电奠定了电磁学的基础。
- 14、 电磁学理论的完毕者---英国的物理学家麦克斯韦（1831~1 9）。麦克斯韦方程组---用最完美的数学形式体现了宏观电磁学的全部内容 。麦克斯韦从理论上预言了电磁波的存在。

- 15. 1866年，德国的西门子发明了使用电磁铁的发电机，为电力工业开辟了道路。
- 16. 1876年，美国贝尔发明了电话，实现了电声通信。
- 17. 1879年，美国发明家爱迪生发明了电灯，使电进入了人们的日常生活。
- 18. 1887年，德国的物理学家赫兹首次用人工的措施产生了电磁波。
- 19. 随之，俄国的波波夫和意大利的马可尼，利用电磁波通信取得成功，开创了人类无线通信的新时代。

二、该课程的主要内容

1. 矢量分析（电磁场理论的数学基础）、场论基础
2. 静态场（静电场、恒定电场与恒定磁场）基本定律、边界条件
3. 静态场边值问题的求解（解析法：分离变量法、镜像法、格林函数法、复变函数法等。数值法：有限差分法、有限元法、边界元法等。近似解析法：逐渐逼近法、微扰法、变分法、迭代变分法等。
4. 时变电磁场：在引出时变电磁场各物理量基础上，结正当拉第电磁感应定律、麦克斯韦位移电流假说，给出普遍意义的麦克斯韦方程组。并在此基础上研究电磁场的普遍规律、概念和表达措施。
5. 麦克斯韦方程组的应用：平面波的传播（无界理想介质和导电介质）规律以及在无限大平面上的反射和透射规律、电磁波的辐射、波导友好振腔等。

- 本课程内容是今后可能会遇到的多种射频、微波、电波传播、通信等问题的基础，是微波工程、通信工程、电子信息工程、电子科学与技术等工科电类专业的一门主要的技术基础课，具有非常主要的理论意义与实际应用价值。

三、场的基本概念

- **1.什么是场？**
- **重力场、温度场、速度场、电磁场、……**
- **a.从数学角度：场是给定区域内各点数值的集合，这些数值要求了该区域内一种特定量的特征。**
- 例如：T 是温度场中的物理量，T 就是温度场
- **b.从物理角度：场是遍及一种被界定的或无限扩展的空间内的，能够产生某种物理效应的特殊的物质，场是具有能量的。**

2. 场的分类

a. 按物理量的性质分：

标量场：描述场的物理量是标量。

矢量场：描述场的物理量是矢量。

b. 按场量与时间的关系分：

静态场：场量不随时间发生变化的场。

动态场：又称时变场，场量随时间变化而变化的场。

四、学习的目的、措施及其要求

1、掌握宏观电磁场的基本属性和运动规律

2、掌握宏观电磁场问题的基本求解措施

3、了解宏观电磁场的主要应用领域及其原理

4、训练分析问题、归纳问题的科学措施

5、培养用数学处理实际问题的能力

6、独立完毕作业，做好课堂笔记

第一章　矢量分析与场论基础

主要内容：

矢量的基本概念、代数运算、矢量分析、场论基础（梯度、矢量场的散度和旋度）矢量场的Helmholtz定理

1.1 矢量分析

一、 矢量

- 标量与矢量

标量：只有大小，没有方向的物理量（温度，高度等）

矢量：既有大小，又有方向的物理量（力，速度、电场等）

- 矢量的表达方式

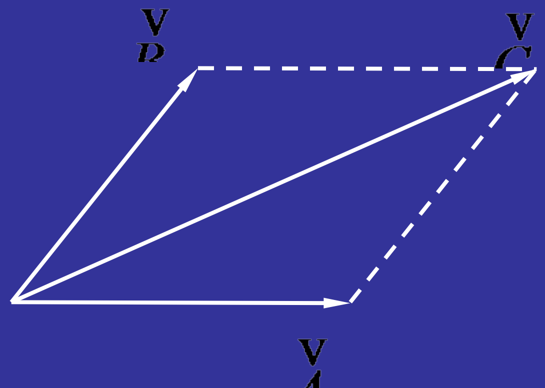
矢量可表达为：$\vec{A}=|\vec{A}|\vec{e}_A$ 其中 $|\vec{A}|$ 为其模值，表征矢量的大小；$\vec{e}_A$ 为其单位矢量，表征矢量的方向，其大小为1；

所以：一种矢量就表达成矢量的模与单位矢量的乘积。

注：矢量书写时，印刷体为场量符号加粗，如**D**。教材上符号即为印刷体。

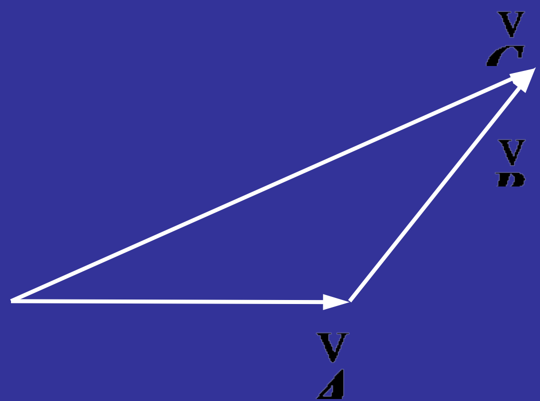
二、矢量的运算法则

1. 加法: 矢量加法是矢量的几何和，服从平行四边形规则。



$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$$

$$\Longrightarrow$$



a.满足互换律: $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

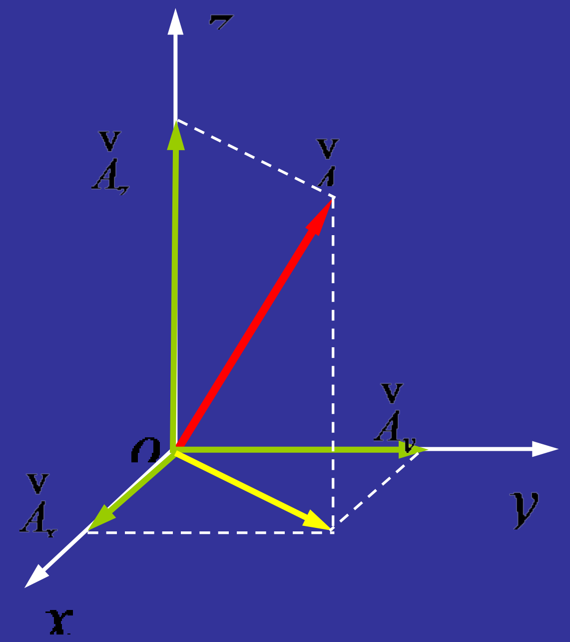
b.满足结合律: $(\vec{A}+\vec{B})+(\vec{C}+\vec{D})=(\vec{A}+\vec{C})+(\vec{B}+\vec{D})$

在直角坐标系下的矢量表达:

三个方向的单位矢量用 $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ 表达。

根据矢量加法运算:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$



其中:

$$\vec{A}_x = A_x\vec{e}_x,\ \vec{A}_y = A_y\vec{e}_y,\ \vec{A}_z = A_z\vec{e}_z$$

所以:

$$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$$

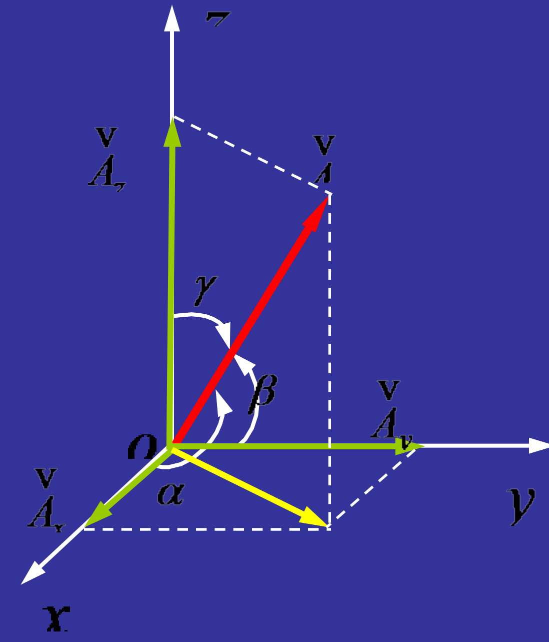
矢量：$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$

⇩模的计算：$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

⇩单位矢量：

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z}{|\vec{A}|}$$

$$= \cos\alpha\,\vec{e}_x + \cos\beta\,\vec{e}_y + \cos\gamma\,\vec{e}_z$$



⇩方向角与方向余弦：$\alpha,\ \beta,\ \gamma$

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|},\quad \cos\beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|},\quad \cos\gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|}$$

显然：$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

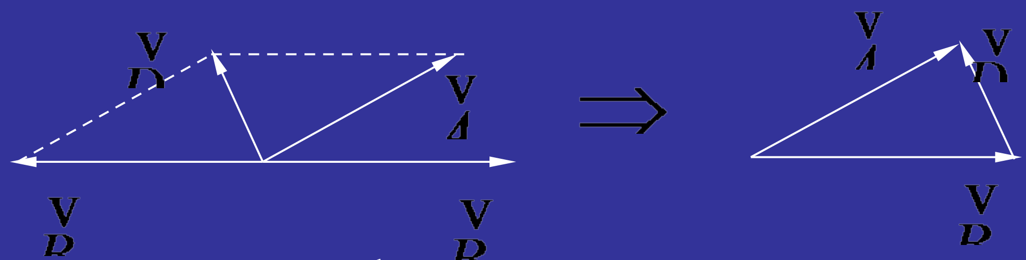
在直角坐标系中三个矢量加法运算：

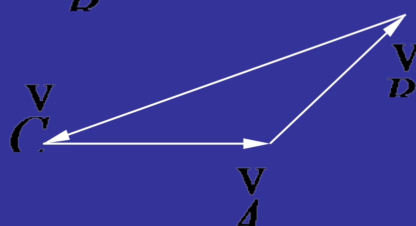
$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (A_x + B_x + C_x)\vec{e}_x + (A_y + B_y + C_y)\vec{e}_y + (A_z + B_z + C_z)\vec{e}_z$$

2. 减法：换成加法运算

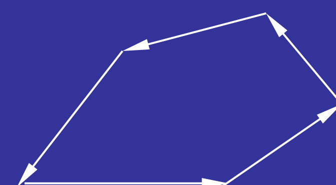
$$\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

逆矢量：$\vec{B}$ 和 $(-\vec{B})$ 的模相等，方向相反，互为逆矢量。





$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$$



推论：

任意多种矢量首尾相连构成闭合多边形，其矢量和必为零。

在直角坐标系中两矢量的减法运算：

$$\vec{A}-\vec{B}=(A_x-B_x)\vec{e}_x+(A_y-B_y)\vec{e}_y+(A_z-B_z)\vec{e}_z$$

3. 乘法

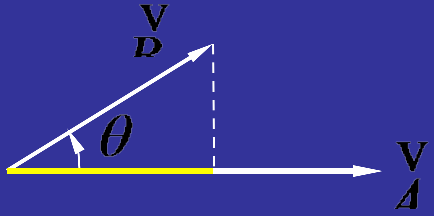
（1）标量与矢量的乘积：

$$k\vec{A} = k|\vec{A}|\vec{e}\begin{cases} k > 0 & \text{方向不变，大小为原来的k倍} \\ \mathrm{k} = 0 & \\ \mathrm{k} < 0 & \text{方向相反，大小为原来的k倍} \end{cases}$$

（2）矢量与矢量乘积分两种

a. 标量积（点积）：

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cos\theta$$



⇩两矢量点积的含义：

一矢量在另一矢量方向上的投影与另一矢量模的乘积，其成果是一标量。

推论1：满足互换律 $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

推论2：满足分配律 $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

推论3：当两个非零矢量点积为零,则这两个矢量必正交。

- 在直角坐标系中，三个坐标轴是相互正交的，即

$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y=0,\quad \vec{e}_x\cdot\vec{e}_z=0,\quad \vec{e}_y\cdot\vec{e}_z=0$$

$$\vec{e}\cdot\vec{e}=1,\quad \vec{e}\cdot\vec{e}=1,\quad \vec{e}\cdot\vec{e}=1$$

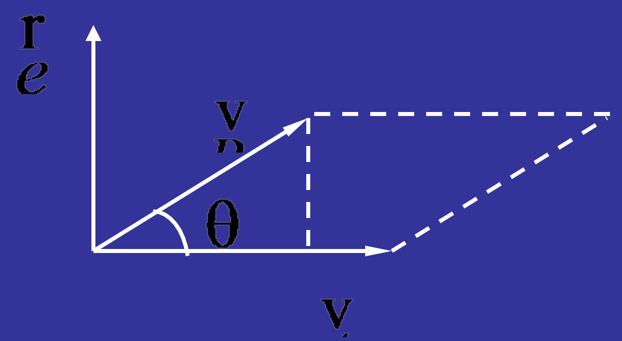
两矢量点积：

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\vec{e}_x+A_y\vec{e}_y+A_z\vec{e}_z)\cdot(B_x\vec{e}_x+B_y\vec{e}_y+B_z\vec{e}_z)$$

$$=A\ B+A\ B+A\ B$$

- 结论: 两矢量点积等于相应分量的乘积之和。

b. 矢量积（叉积）：



$$\vec{A}\times\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\sin\theta\,\vec{e}_c$$

•含义：

两矢量叉积，成果得一新矢量，其大小为这两个矢量构成的平行四边形的面积，方向为该面的法线方向，且三者符合右手螺旋法则。

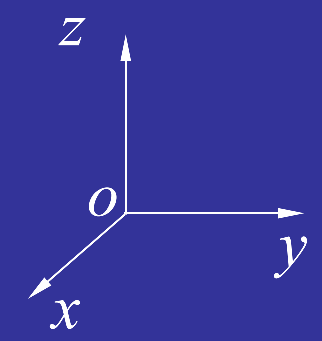
推论1：不服从互换律：$\vec{A}\times\vec{B}\neq\vec{B}\times\vec{A}$，$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

推论2：服从分配律：$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

推论3：不服从结合律：$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\neq(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$

推论4：当两个非零矢量叉积为零，则这两个矢量必平行。

•在直角坐标系中，三个坐标轴是相互正交的，即



$$\vec{e}_x\times\vec{e}_y=\vec{e}_z,\quad \vec{e}_x\times\vec{e}_z=-\vec{e}_y,\quad \vec{e}_y\times\vec{e}_z=\vec{e}_x$$

$$\vec{e}\times\vec{e}=0,\quad \vec{e}\times\vec{e}=0,\quad \vec{e}\times\vec{e}=0$$

在直角坐标系中，两矢量的叉积运算如下：

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\vec{e}_x+A_y\vec{e}_y+A_z\vec{e}_z)\times(B_x\vec{e}_x+B_y\vec{e}_y+B_z\vec{e}_z)$$

$$=(A\ B-A\ B)\vec{e}+(A\ B-A\ B)\vec{e}+(A\ B-A\ B)\vec{e}$$

两矢量的叉积又可表达为：

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

（3）三重积：

三个矢量相乘有下列几种形式：

$(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$ 矢量；标量与矢量相乘。

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ 标量；标量三重积：三矢量中一种和另两个矢量的叉积相乘得到的点积。

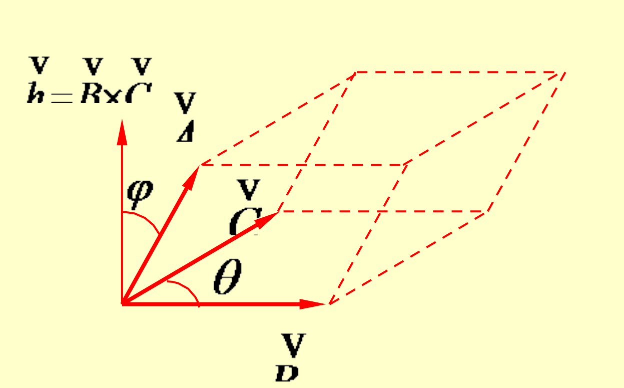
$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ 矢量；矢量三重积：三矢量中一种和另两个向量的叉积相乘得到的叉积。

a. 标量三重积

法则：在矢量运算中，先算叉积，后算点积。

定义：$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=|\vec{A}||\vec{B}||\vec{C}|sin\theta cos\varphi$

含义：标量三重积成果为三矢量构成的平行六面体的体积 。



例1： 已知 $\vec{A} = 2\vec{e} - 6\vec{e} - 3\vec{e}$ ， $\vec{B} = 4\vec{e} + 3\vec{e} - \vec{e}$

求：垂直于$\vec{A}$ 、$\vec{B}$ 所在平面的单位矢量。

解： 已知 $\vec{A}\times\vec{B}$ 所得矢量垂直于$\vec{A}$ 、$\vec{B}$所在平面。

$$\vec{e}_n = \pm\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15\vec{e}_x - 10\vec{e}_y + 30\vec{e}_z$$

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \sqrt{15^2 + (-10)^2 + 30^2} = 35$$

$$\vec{e}_n = \pm\frac{1}{7}(3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 6\vec{e}_z)$$

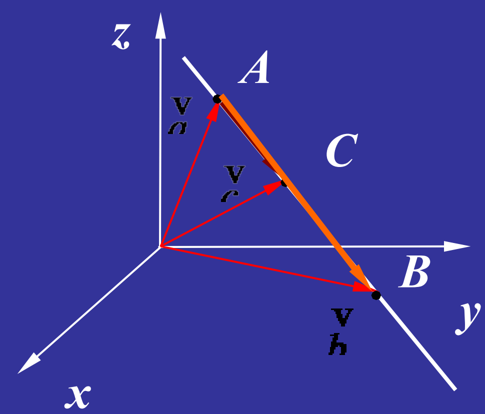
例2： 已知A点和B点对于原点的位置矢量为 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，

求：经过A点和B点的直线方程。

解： 在经过A点和B点的直线方程上，

任取一点C，对于原点的位置

矢量为 $\vec{c}$ ，则



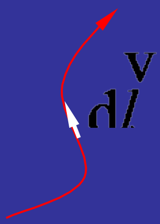
$$\vec{c}-\vec{a}=k(\vec{b}-\vec{a})$$

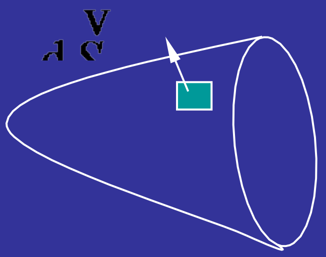
$$\vec{c}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$$

其中：k 为任意实数。

三、矢量微分元：线元、面元、体元

例： $\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$， $\int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$， $\int \rho \mathrm{d}V$





其中：$\mathrm{d}\vec{l}$, $\mathrm{d}\vec{S}$ 和 $\mathrm{d}V$称为微分元。

正交曲线坐标系：

为了考察某一物理量在空间的分布和变化规律，必须引入坐标系。而且，经常根据被研究物体的几何形状不同而采用不同的坐标系。在电磁场理论中，用得较多的是直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。

任何描述三维空间的坐标系都要有三个独立的坐标变量u_1, u_2, u_3，而u_1, u_2, u_3 均为常数时，就代表三组曲面（或平面），称为坐标面。若三组坐标面在空间每一点正交，则坐标面的交线（一般是曲线）也在空间每点正交，这种坐标系叫做正交曲线坐标系。直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系是许多正交曲线坐标系中较常用的三种。

在正交曲线坐标系中，其坐标变量(u_1, u_2, u_3) 不一定都是长度，其线元必然有一种修正系数，这些修正系数称为拉梅系数（Lame)，若已知正交坐标系的拉梅系数h_1, h_2, h_3，就可正确写出其线元、面元和体元。

- 线元：

$$d\vec{l} = h_1 du_1 \vec{e}_{u_1} + h_2 du_2 \vec{e}_{u_2} + h_3 du_3 \vec{e}_{u_3}$$

- 面元：

$$d\vec{S}_1 = h_2 h_3 du_2 du_3 \vec{e}_{u_1}$$

$$d\vec{S}_2 = h_1 h_3 du_1 du_3 \vec{e}_{u_2}$$

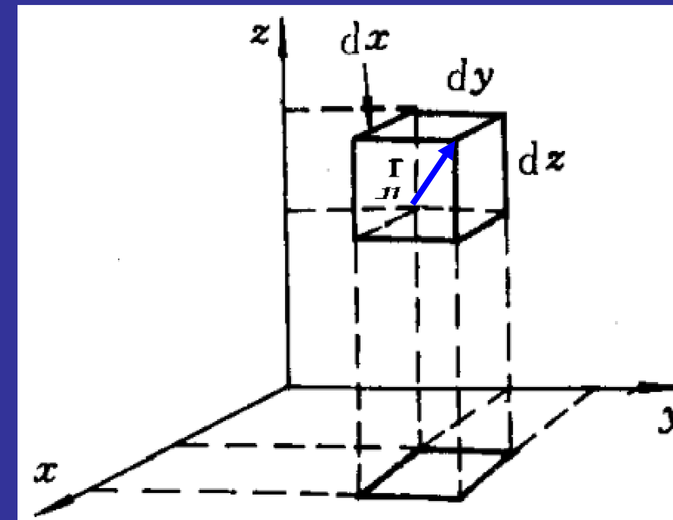
$$d\vec{S}_3 = h_1 h_2 du_1 du_2 \vec{e}_{u_3}$$

- 体元：

$$\mathrm{d}V = h_1 h_2 h_3 \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3$$

1. 直角坐标系

在直角坐标系中，坐标变量为(x,y,z)，如图，做一微分体元。



线元：

$$d\vec{l}_x = dx\vec{e}_x$$

$$d\vec{l}_y = dy\vec{e}_y$$

$$d\vec{l}_z = dz\vec{e}_z$$

$$d\vec{l} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

面元：

$$d\vec{S}_x = dydz\vec{e}_x$$

$$d\vec{S}_y = dxdz\vec{e}_y$$

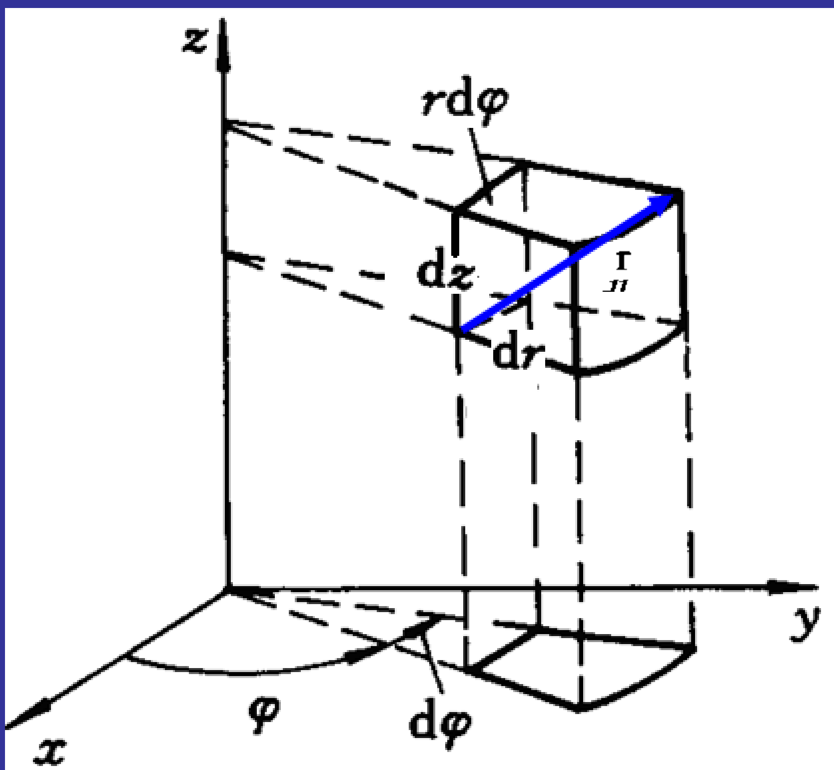
$$d\vec{S}_z = dxdy\vec{e}_z$$

体元：

$$dV = dxdydz$$

2. 圆柱坐标系

在圆柱坐标系中，坐标变量为(r,φ,z)，如图，做一微分体元。



线元：

$$d\vec{l} = dr\vec{e}_r + rd\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z$$

面元：

$$d\vec{S}_r = rd\varphi dz\vec{e}_r$$

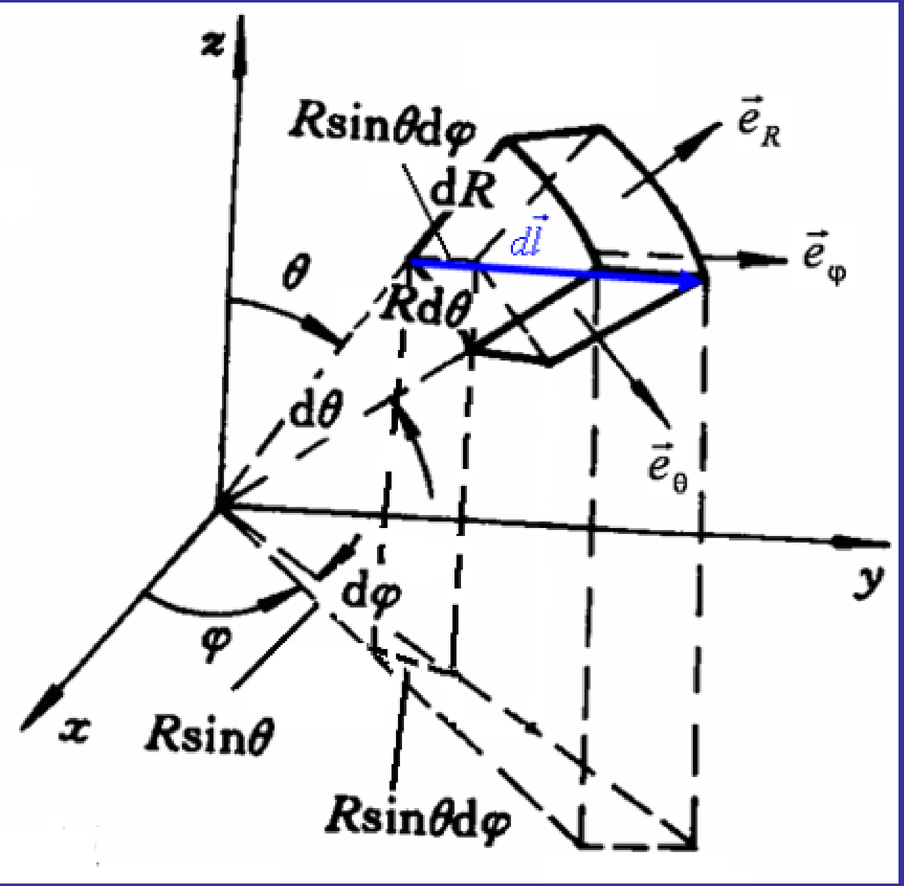
$$d\vec{S}_\varphi = drdz\vec{e}_\varphi$$

$$d\vec{S}_z = rd\varphi dr\vec{e}_z$$

体元：$\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$

3. 球坐标系

在球坐标系中，坐标变量为(R,θ,φ)，如图，做一微分体元。



线元：

$$d\vec{l} = dR\vec{e}_R + Rd\theta\vec{e}_\theta + R\sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$$

面元：

$$d\vec{S}_R = R^2\sin\theta d\theta d\varphi\vec{e}_R$$

$$d\vec{S}_\theta = R\sin\theta dRd\varphi\vec{e}_\theta$$

$$d\vec{S}_\varphi = RdRd\theta\vec{e}_\varphi$$

体元：

$$\mathrm{d}V = R^2\sin\theta\mathrm{d}R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

坐标变换

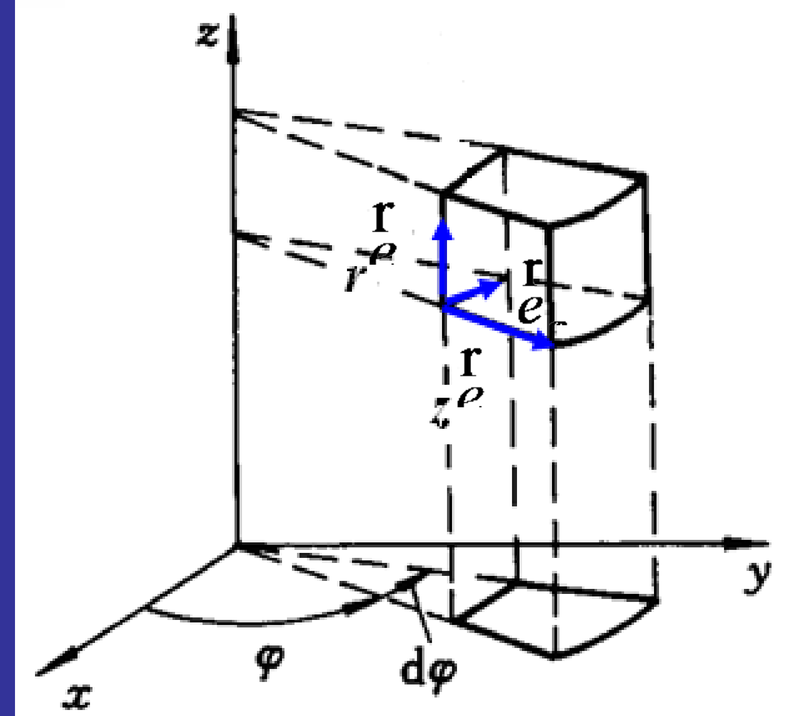
圆柱坐标系与直角坐标系间单位

矢量变换关系

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \cos\varphi + \vec{e}_y \sin\varphi$$

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \sin\varphi + \vec{e}_y \cos\varphi$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_z$$



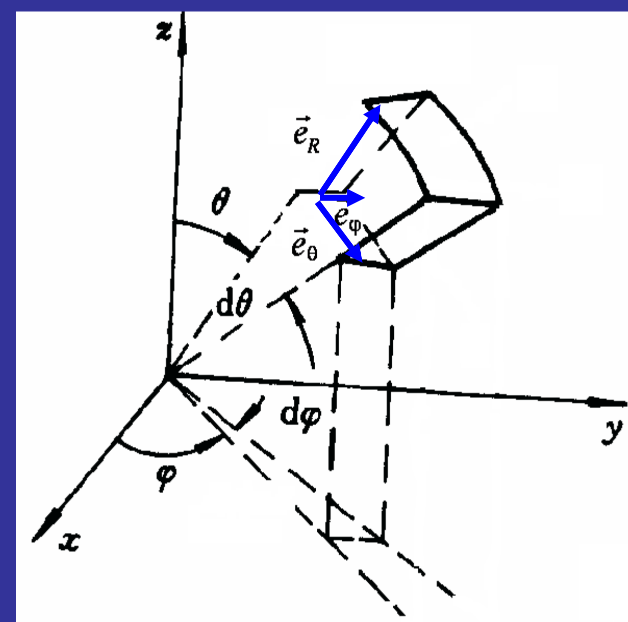
球面坐标系与直角坐标系间单位

矢量变换关系

$$\vec{e}_R = \vec{e}_x \sin\theta\cos\varphi + \vec{e}_y \sin\theta\sin\varphi + \vec{e}_z \cos\theta$$

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \sin\varphi + \vec{e}_y \cos\varphi$$

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_x \cos\theta\cos\varphi + \vec{e}_y \cos\theta\sin\varphi - \vec{e}_z \sin\theta$$



注意：

a. 在直角坐标系中，x,y,z 均为长度量，其拉梅系数均为1，即：

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1$$

b. 在柱坐标系中，坐标变量为(r,φ,z)，其中φ 为角度，其相应的线元 $rd\varphi\vec{e}_\varphi$ ，可见拉梅系数为：

$$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$$

c. 在球坐标系中，坐标变量为(R,θ,φ) ，其中θ,φ 均为角度，其拉梅系数为：

$$h_1 = 1, \quad h_2 = R, \quad h_3 = R\sin\theta$$

1.2 场

一、场的概念及分类

a. 场的概念

物理量（如温度、电场、磁场）在空间中以某种形式分布，若每一时刻每个位置该物理量都有一种拟定的值，则称在该空间中拟定了该物理量的场。如电荷在其周围空间激发的电场，电流在周围空间激发的磁场等。

从数学上看，场是定义在空间区域上的函数。

b. 场的分类

1、按物理量的性质

- 标量场（数量场）：在指定时刻，空间每一点能够用一种标量唯一地描述。 物理量为标量（温度场,电位场）
- 矢量场：在指定时刻，空间每一点能够用一种矢量唯一地描述。物理量为矢量（电场、磁场）

2、按物理量变化特征

- 静态场：物理量不随时间的变化而变化
- 时变场（动态场）：物理量随时间的变化而变化