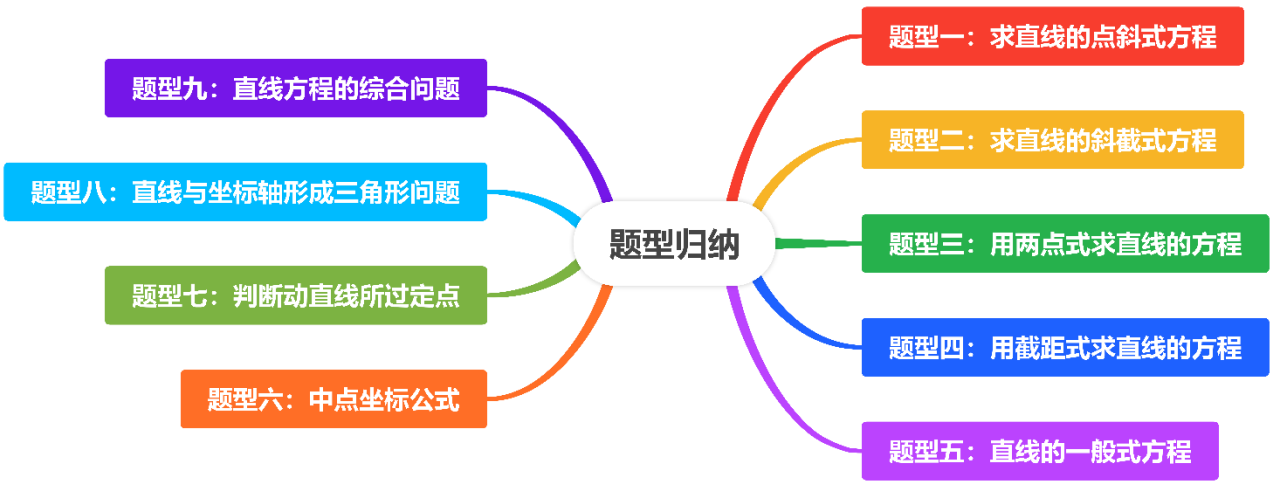
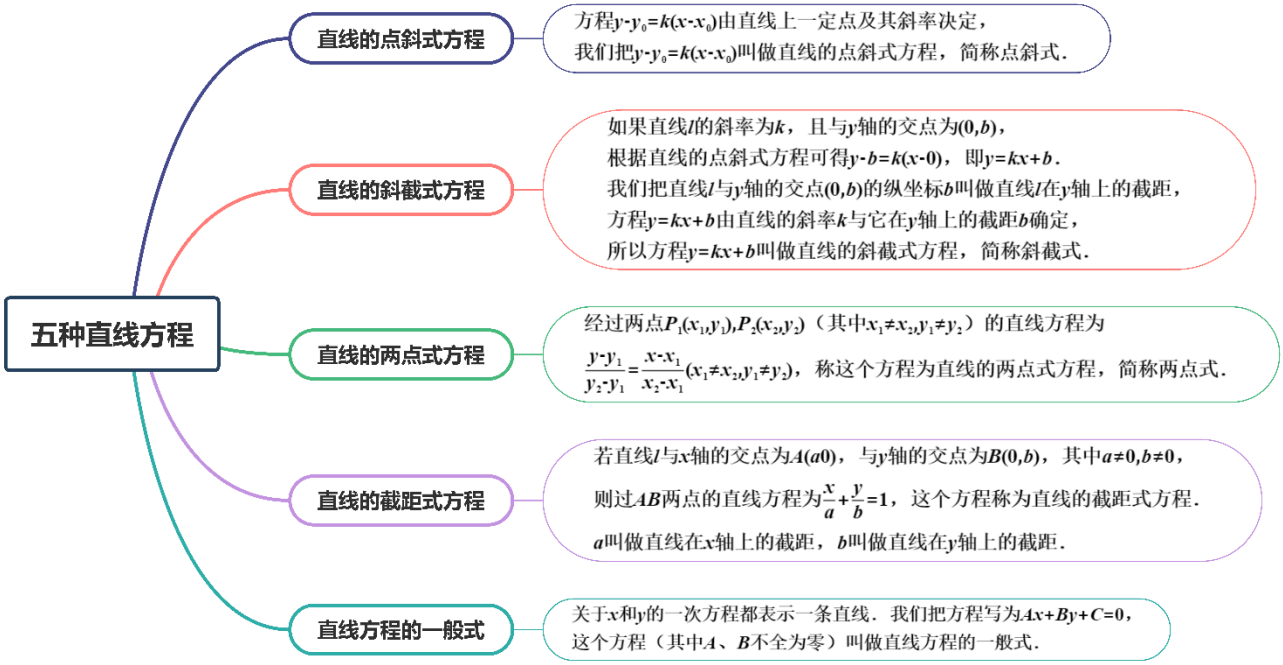
1.2 直线的方程

01 学习目标

课程标准	学习目标
1、能说出平面直角坐标系中确定直线的几何要素，能结合直线的点斜式方程求解过程，说明“直线的方程”和“方程的直线”之间的关系. 2、能根据确定直线的几何要素（一点和方向）建立点斜式方程，能通过点的特殊化得出斜截式方程. 3、能利用点斜式推出两点式，能通过特殊化得出截距式. 4、能通过归纳点斜式、斜截式、两点式、截距式的共性，概括出直线的一般式方程；能用自己的语言解释直线与二元一次方程的关系. 5、能用直线的方程解决简单的问题.	1、了解由斜率公式推导直线方程的点斜式的过程. 2、掌握直线的点斜式方程与斜截式方程 3、根据确定直线位置的几何要素，探索并掌握直线的两点式方程 4、掌握直线的一般式方程 5、会进行直线方程的五种形式之间的转化.

02 思维导图





03 知识清单

知识点一：直线的点斜式方程

方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 由直线上一定点及其斜率决定，我们把 $y-y_0=k(x-x_0)$ 叫做直线的点斜式方程，简称点斜式.

知识点诠释：

1、点斜式方程是由直线上一点和斜率确定的，点斜式的前提是直线的斜率存在．点斜式不能表示平行于 y 轴的直线，即斜率不存在的直线；

2、当直线的倾斜角为 0°时，直线方程为 $y=y_1$；

3、当直线倾斜角为 90°时，直线没有斜率，它的方程不能用点斜式表示．这时直线方程为：$x=x_1$.

4、$k=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$ 表示直线去掉一个点 $P_0(x_0,y_0)$；$y-y_0=k(x-x_0)$ 表示一条直线.

【即学即练 1】（2024·高二·贵州遵义·阶段练习）过点 $P(5,2)$ 且斜率为 -1 的直线的点斜式方程为（　　）

A．$y=-x+7$　　B．$y-2=-(x-5)$

C．$y+2=-(x+5)$　　D．$y-5=-(x-2)$

【答案】B

【解析】过点 $P(5,2)$ 且斜率为 -1 的直线的点斜式方程为 $y-2=-(x-5)$，

故选：B.

知识点二：直线的斜截式方程

如果直线 l 的斜率为 k，且与 y 轴的交点为 $(0,b)$，根据直线的点斜式方程可得 $y-b=k(x-0)$，即

$y=kx+b$．我们把直线 l 与 y 轴的交点 $(0,b)$ 的纵坐标 b 叫做直线 l 在 y 轴上的截距，方程 $y=kx+b$ 由直线的斜率 k 与它在 y 轴上的截距 b 确定，所以方程 $y=kx+b$ 叫做直线的斜截式方程，简称斜截式．

知识点诠释：

1、b 为直线 l 在 y 轴上截距，截距可以取一切实数，即可以为正数、零、负数；距离必须大于或等于零；

2、斜截式方程可由过点 $(0,b)$ 的点斜式方程得到；

3、当 $k\neq 0$ 时，斜截式方程就是一次函数的表示形式．

4、斜截式的前提是直线的斜率存在．斜截式不能表示平行于 y 轴的直线，即斜率不存在的直线．

5、斜截式是点斜式的特殊情况，在方程 $y=kx+b$ 中，k 是直线的斜率，b 是直线在 y 轴上的截距．

【即学即练 2】（2024·高二·上海·专题练习）已知两点 $A(3,4)$、$B(-5,6)$，则直线 AB 的斜截式方程是 __．

【答案】$y=-\frac{1}{4}x+\frac{19}{4}$

【解析】已知两点 $A(3,4)$、$B(-5,6)$，故直线的斜率 $k=\frac{6-4}{-5-3}=-\frac{1}{4}$，

则方程为：$y-6=-\frac{1}{4}(x+5)$，整理得 $x+4y=19$，

转化为直线的斜截式为 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{19}{4}$．

故答案为：$y=-\frac{1}{4}x+\frac{19}{4}$．

知识点三：直线的两点式方程

经过两点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$（其中 $x_1\neq x_2,y_1\neq y_2$）的直线方程为 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2,y_1\neq y_2)$，称这个方程为直线的两点式方程，简称两点式．

知识点诠释：

1、这个方程由直线上两点确定；

2、当直线没有斜率（$x_1=x_2$）或斜率为 $0(y_1=y_2)$ 时，不能用两点式求出它的方程．

3、直线方程的表示与 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 选择的顺序无关．

4、在应用两点式求直线方程时，往往把分式形式 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2,y_1\neq y_2)$ 通过交叉相乘转化为整式形式 $(y-y_1)(x_2-x_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$，从而得到的方程中，包含了 $x_1=x_2$ 或 $y_1=y_2$ 的情况，但此转化过程不是一个等价的转化过程，不能因此忽略由 x_1、x_2 和 y_1、y_2 是否相等引起的讨论．要避免讨论，可直接假设两点式的整式形式．

【即学即练 3】（2024·高二·全国·课后作业）经过点 $A(-3,2),B(4,4)$ 的直线的两点式方程为（　）

A．$\frac{y-2}{2}=\frac{x+3}{7}$　　B．$\frac{y-2}{-2}=\frac{x-3}{7}$

C．$\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{x-3}{7}$　　D．$\dfrac{y-2}{x+3}=\dfrac{2}{7}$

【答案】A

【解析】因为直线经过点$A(-3,2),B(4,4)$，

所以由方程的两点式可得直线方程为$\dfrac{y-2}{4-2}=\dfrac{x-(-3)}{4-(-3)}$，即$\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{x+3}{7}$．

故选：A

知识点四：直线的截距式方程

若直线l与x轴的交点为$A(a,0)$，与y轴的交点为$B(0,b)$，其中$a\neq 0,b\neq 0$，则过AB两点的直线方程为$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，这个方程称为直线的截距式方程．$a$叫做直线在$x$轴上的截距，$b$叫做直线在$y$轴上的截距．

知识点诠释：

1、截距式的条件是$a\neq 0,b\neq 0$，即截距式方程不能表示过原点的直线以及不能表示与坐标轴平行的直线．

2、求直线在坐标轴上的截距的方法：令$x=0$得直线在y轴上的截距；令$y=0$得直线在x轴上的截距．

【即学即练 4】（2024·高二·全国·课后作业）过两点$A(0,3)$，$B(-2,0)$的截距式方程为（　）

A．$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}=1$　B．$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1$　　C．$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$　　D．$\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}=1$

【答案】D

【解析】由于直线过$A(0,3)$，$B(-2,0)$两点，

所以直线在x轴，y轴上的截距分别为－2，3，由截距式可知，方程为$\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}=1$．

故选：D

知识点五：直线方程的一般式

关于x和y的一次方程都表示一条直线．我们把方程写为$Ax+By+C=0$，这个方程（其中A、B不全为零）叫做直线方程的一般式．

知识点诠释：

1、A、B不全为零才能表示一条直线，若A、B全为零则不能表示一条直线．

当$B\neq 0$时，方程可变形为$y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$，它表示过点$\left(0,-\dfrac{C}{B}\right)$，斜率为$-\dfrac{A}{B}$的直线．

当$B=0$，$A\neq 0$时，方程可变形为$Ax+C=0$，即$x=-\dfrac{C}{A}$，它表示一条与x轴垂直的直线．

由上可知，关于x、y的二元一次方程，它都表示一条直线．

2、在平面直角坐标系中，一个关于x、y的二元一次方程对应着唯一的一条直线，反过来，一条直线可以对应着无数个关于x、y的一次方程．

【即学即练 5】（2024·高二·上海闵行·期末）若直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 且在 x 轴上的截距为 -1，则直线 l 的一般方程是_____.

【答案】$\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$

【解析】由直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，可得直线 l 的斜率为 $k=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，

又由直线 l 在 x 轴上的截距为 -1，所以直线方程为 $y=\sqrt{3}(x+1)$，即 $\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$.

故答案为：$\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$.

04 题型精讲

题型一：求直线的点斜式方程

【典例 1-1】（2024·高二·全国·课后作业）已知直线的方程是 $y+2=-x-1$，则由点斜式知该直线经过的定点、斜率分别为（　）

A.（－1，2），－1 B.（2，－1），－1　　C.（－1，－2），－1　D.（－2，－1），1

【答案】C

【解析】由 $y+2=-x-1$，得 $y+2=-(x+1)$，所以直线的斜率为－1，过定点（－1，－2）.

故选：C.

【典例 1-2】（2024·高二·河南·阶段练习）经过点 $(2,5)$，斜率为 -2 的直线的点斜式方程为（　）

A．$y+5=-2(x+2)$　　B．$y-5=-2(x-2)$

C．$y-5=2(x+2)$　　D．$y-5=-2(x+2)$

【答案】B

【解析】根据题意，经过点 $(2,5)$，斜率为 -2 的直线的点斜式方程为 $y-5=-2(x-2)$.

故选：B

【方法技巧与总结】

（1）利用点斜式求直线方程的步骤是：①判断斜率 k 是否存在，并求出存在时的斜率；②在直线上找一点，并求出其坐标.

（2）要注意点斜式直线方程的逆向运用，即由方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 可知该直线过定点 $P(x_0,y_0)$ 且斜率为 k.

【变式 1-1】（2024·高二·山东·阶段练习）经过点 $(4,1)$，斜率为 3 的点斜式方程为（　）

A．$y-1=3(x-4)$　B．$y-1=3(x+4)$　　C．$y+1=3(x+4)$　　D．$y-1=-3(x-4)$

【答案】A

【解析】根据直线的点斜式方程：过点 (x_1,y_1) 且斜率为 k 的直线方程是 $y-y_1=k(x-x_1)$，

所以经过点 $(4,1)$，斜率为 3 的点斜式方程为：$y-1=3(x-4)$

故选：A.

【变式 1-2】（2024·高一·陕西延安·期末）若光线沿倾斜角为$120°$的直线射向x轴上的点$A(2,0)$，经x轴反射，则反射直线的点斜式方程是（　）

A．$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$　　B．$y=\sqrt{3}(x-2)$

C．$y=-\sqrt{3}(x-2)$　　D．$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$

【答案】B

【解析】光线沿倾斜角为$120°$的直线射向x轴上经x轴反射，则反射直线的倾斜角为$60°$，

反射光线斜率为$k=\tan 60°=\sqrt{3}$，且反射光线过点$A(2,0)$，

这反射光线所在直线方程为点斜式方程是$y=\sqrt{3}(x-2)$.

故选:B.

题型二：求直线的斜截式方程

【典例 2-1】（2024·高二·广东湛江·阶段练习）倾斜角为$150°$，在y轴上的截距是-3的直线的斜截式方程为_____.

【答案】$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-3$

【解析】由题意得，直线斜率为$\tan 150°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故直线的斜截式方程为$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-3$.

故答案为：$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-3$

【典例 2-2】（2024·高二·全国·专题练习）经过点$A(2,3)$，且倾斜角为$\frac{\pi}{4}$的直线的斜截式方程为_____.

【答案】$y=x+1$

【解析】因为直线l的倾斜角为$\frac{\pi}{4}$，所以直线l的斜率$k=\tan\frac{\pi}{4}=1$，

所以直线l的方程为$y-3=x-2$，即$y=x+1$，

故答案为：$y=x+1$.

【方法技巧与总结】

（1）选用斜截式表示直线方程的依据是知道（或可以求出）直线的斜率k和直线在y轴上的截距b.

（2）直线的斜截式方程的好处在于它比点斜式方程少一个参数，即斜截式方程只要两个参数k、b即可确定直线的方程，而点斜式方程则需要三个参数k、x_0、y_0才能确定，而且它的形式简洁明了，这样当我们仅知道直线满足一个条件时，由参数选用斜截式方程具有化繁为简的作用.

（3）若直线过某一点，则这一点坐标一定满足直线方程，这一隐含条件应充分利用.

【变式 2-1】（2024·高一·上海杨浦·期末）直线l：$y=2x-1$绕着点$A(1,1)$逆时针旋转$\frac{\pi}{4}$与直线l_1重合，则l_1

的斜截式方程是_____.

【答案】$y=-3x+4$

【解析】设直线 l 的倾斜角为 α，则 $\tan\alpha=2$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=-3$，

所以直线 $l_1: y-1=-3(x-1)\Rightarrow y=-3x+4$，

故答案为：$y=-3x+4$.

【变式 2-2】（2024·高二·全国·课后作业）倾斜角为 $30°$，且过点 $(-2,0)$ 的直线斜截式方程为_____.

【答案】$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】因为直线的倾斜角为 $30°$，则直线的斜率 $k=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以直线的方程 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$，即 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故答案为：$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

题型三：用两点式求直线的方程

【典例 3-1】（2024·高二·全国·课后作业）有关直线方程的两点式，有如下说法：

①直线方程的两点式适用于求与两坐标轴均不垂直的直线方程；

②直线方程 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ 也可写成 $\frac{y-y_2}{y_1-y_2}=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}$；

③过点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 的直线可以表示成 $(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$.

其中正确说法的个数为(　)

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【答案】D

【解析】①正确，从两点式方程的形式看，只要 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$，就可以用两点式来求解直线的方程；②正确，方程 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ 与 $\frac{y-y_2}{y_1-y_2}=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}$ 的形式有异，但实质相同，均表示过点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 的直线；③显然正确.

故选：D.

【典例 3-2】（2024·高二·河北邢台·阶段练习）下列直线方程是两点式方程的是（　）

A．$y=kx+b$　　B．$y-y_0=k(x-2x_0)$

C．$\frac{x}{a}+\frac{y}{2b}=1$　　D．$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2,y_1\neq y_2)$

【答案】D

【解析】对于选项 A：$y=kx+b$ 是斜截式方程，故 A 错误；

对于选项 B：$y-y_0=k(x-2x_0)$ 是点斜式方程，故 B 错误；

对于选项 C：$\frac{x}{a}+\frac{y}{2b}=1$ 是截距式方程，故 C 错误；

对于选项 D：$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\left(x_1\neq x_2,y_1\neq y_2\right)$ 是两点式方程，故 D 正确；

故选：D.

【方法技巧与总结】

当已知两点坐标，求过这两点的直线方程时，首先要判断是否满足两点式方程的适用条件，若满足即可考虑用两点式求方程．在斜率存在的情况下，也可以先应用斜率公式求出斜率，再用点斜式写出方程．

【变式 3-1】（2024·高二·内蒙古呼伦贝尔·阶段练习）过点 $A(5,6)$ 和点 $B(-1,2)$ 的直线的两点式方程是_____.

【答案】$\frac{y-6}{2-6}=\frac{x-5}{-1-5}$

【解析】由题意，AB 不和坐标轴垂直，符合两点式方程的使用条件，

当直线经过 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 时，两点式方程为：$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$，

于是直线 AB 的两点式方程为：$\frac{y-6}{2-6}=\frac{x-5}{-1-5}$.

故答案为：$\frac{y-6}{2-6}=\frac{x-5}{-1-5}$

【变式 3-2】（2024·高二·上海金山·阶段练习）已知 $A(1,2)$，$B(-1,1)$，则直线 AB 的两点式方程为__.

【答案】$\frac{y-2}{2-1}=\frac{x-1}{1-(-1)}$

【解析】当直线过两点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 时，其两点式方程为 $\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2}$，

则直线 AB 的两点式方程为 $\frac{x-1}{1-(-1)}=\frac{y-2}{2-1}$，

故答案为：$\frac{y-2}{2-1}=\frac{x-1}{1-(-1)}$.

题型四：用截距式求直线的方程

【典例 4-1】（2024·高二·全国·课后作业）（1）经过点 $P(-2,3)$，在两坐标轴上的截距之和等于 6 的直线的截距式方程为_____.

（2）过点 $(-2,0)$ 且在两坐标轴上的截距之差为 3 的直线的截距式方程是_____.

【答案】$\frac{x}{-3}+\frac{y}{9}=1$ 或 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$　　$\frac{x}{-2}+y=1$ 或 $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-5}=1$

【解析】（1）设直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{6-a}=1$，因为直线过点 $P(-2,3)$，

所以 $\frac{-2}{a}+\frac{3}{6-a}=1$，整理得 $a^2-a-12=0$，解得 $a=-3$ 或 $a=4$.

于是所求直线方程的截距式为$\frac{x}{-3}+\frac{y}{9}=1$或$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$.

（2）由题可知，直线过点$(-2,0)$，所以直线在x轴上的截距为-2，

又直线在两坐标轴上的截距之差为3，所以直线在y轴上的截距为1或-5，

则所求直线方程为$\frac{x}{-2}+y=1$或$\frac{x}{-2}+\frac{y}{-5}=1$

故答案为：（1）$\frac{x}{-3}+\frac{y}{9}=1$或$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$；（2）$\frac{x}{-2}+y=1$或$\frac{x}{-2}+\frac{y}{-5}=1$.

【典例4-2】（2024·高二·全国·专题练习）已知直线l经过点$A(-5,6)$和$B(-4,8)$两点，求直线l的一般式方程和截距式方程，并画出图象.

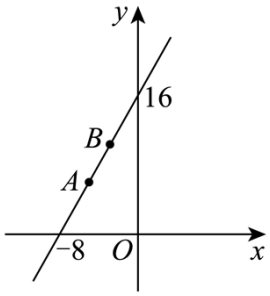
【解析】由直线l过点$A(-5,6)$和$B(-4,8)$两点，

根据直线的两点式方程，可得$\frac{y-6}{8-6}=\frac{x+5}{-4+5}$，

可得直线的一般式方程为$2x-y+16=0$，

可得$2x-y=-16$，可得截距式方程为$\frac{x}{-8}+\frac{y}{16}=1$，

图象如图所示，



【方法技巧与总结】

应用截距式求直线方程时，一定要注意讨论截距是否为零.

【变式4-1】（2024·高二·全国·专题练习）将直线的方程$x-2y+6=0$作如下转换：

(1)化成斜截式，并指出它们的斜率与在y轴上的截距.

(2)化成截距式，并指出它在x轴、y轴上的截距.

【解析】（1）将原方程移项，可得$2y=x+6$，可得直线的截距式方程为$y=\frac{1}{2}x+3$，

则直线的斜率为$k=\frac{1}{2}$，在y轴上的截距为3.

（2）将原方程化简为$x-2y=-6$，可得直线的截距式方程为$\frac{x}{-6}+\frac{y}{3}=1$，

所以直线在x轴和y轴上的截距分别为$-6,3$.

【变式4-2】（2024·高二·陕西西安·阶段练习）已知直线l经过点$A(1,3)$.

(1)若l的斜率为2，求l的斜截式方程；

(2)若l在y轴上的截距为6，求l的截距式方程.

【解析】（1）由题意得l的方程为$y-3=2(x-1)$，其斜截式方程为$y=2x+1$.

（2）设l的截距式方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{6}=1$.

由题意得$\frac{1}{a}+\frac{3}{6}=1$，得$a=2$，所以$l$的截距式方程为$\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$.

题型五：直线的一般式方程

【典例 5-1】（2024·高二·山东青岛·期末）直线l在x轴、y轴上的截距分别是$\frac{3}{2}$和-3，则直线l的一般式直线方程为_____.

【答案】$2x-y-3=0$

【解析】由题意，直线l的截距式方程为$\frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{-3}=1$，

化为一般式方程为$2x-y-3=0$.

故答案为：$2x-y-3=0$.

【典例 5-2】（2024·高二·新疆克孜勒苏·期末）（1）求经过点$A(8,-2)$，倾斜角为60°的直线的一般式方程.

（2）$\triangle ABC$的三个顶点是$A(4,0),B(6,7),C(0,3)$，求边BC上的中线所在的直线方程.

【解析】（1）由倾斜角为60°可得直线斜率为$k=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，由于经过点$A(8,-2)$，

代入点斜式方程得$y+2=\sqrt{3}(x-8)$，即：$\sqrt{3}x-y-8\sqrt{3}-2=0$；

（2）设边BC的中点为$M(x_0,y_0)$，根据中点坐标公式得$M(3,5)$，

从而可得中线AM所在直线方程为$\frac{y-0}{5-0}=\frac{x-4}{3-4}$，即：$5x+y-20=0$.

【方法技巧与总结】

对于直线方程的一般式，一般作如下约定：x的系数为正，x，y的系数及常数项一般不出现分数，一般按含x项、y项、常数项顺序排列．求直线方程的题目，无特别要求时，结果写成直线方程的一般式.

【变式 5-1】（2024·高二·全国·专题练习）$\triangle ABC$的三个顶点为$A(2,8),B(-4,0),C(6,0)$，则AC边上的中线所在直线的方程为_____.

【答案】$x-2y+4=0$

【解析】$\frac{2+6}{2}=4$，$\frac{8+0}{2}=4$，$\therefore AC$边中点为$D(4,4)$，

$\therefore$中线BD方程为$\frac{x+4}{4+4}=\frac{y}{4}$，即$x-2y+4=0$.

故答案为：$x-2y+4=0$.

题型六：中点坐标公式

【典例 6-1】（2024·高一·湖南长沙·阶段练习）若点$(k,0)$与$(b,0)$的中点为$(-1,0)$，则直线$y=kx+b$必定经过点

A．$(1,-2)$　　B．$(1,2)$　　C．$(-1,2)$　　D．$(-1,-2)$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/876011135022010233