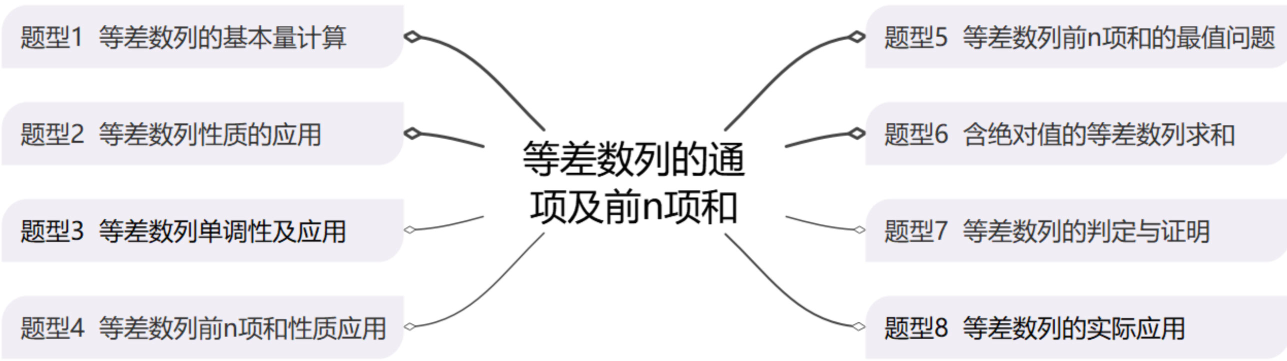
热点 5-1 等差数列的通项及前 n 项和

主要考查等差数列的基本量计算和基本性质、等差数列的中项性质、判定与证明，这是高考热点；等差数列的求和及综合应用是高考考查的重点。这部分内容难度以中、低档题为主，结合等比数列一般设置一道选择题和一道解答题。



【题型 1 等差数列的基本量计算】

满分技巧

1、等差数列的通项公式及前 n 项和公式共涉及五个量 a_1，a_n，d，n，S_n，知其中三个就能求另外两个，体现了方程思想．

2、数列的通项公式和前 n 项和公式在解题中起到变量代换的作用，而 a_1 和 d 是等差数列的两个基本量，用它们表示已知量和未知量是常用方法．

【例 1】(2023·四川乐山·统考一模）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，若$S_3=9$，$S_6=36$，则$a_8+a_9+a_{10}=$（　　）

A．63　　B．51　　C．45　　D．27

【答案】B

【解析】由题意知等差数列$\{a_n\}$中，$S_3=9$，$S_6=36$，

设首项为a_1，公差为d，

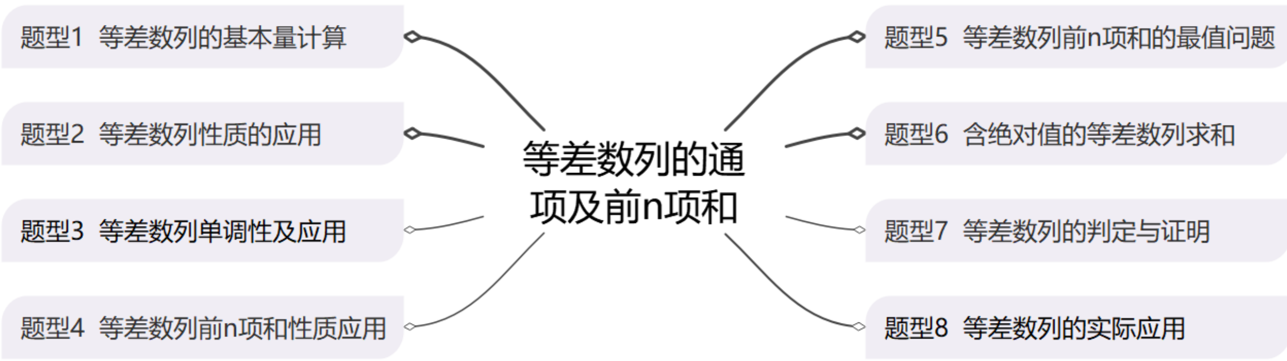
则$\begin{cases}3a_1+\dfrac{3\times 2}{2}d=9\\6a_1+\dfrac{6\times 5}{2}d=36\end{cases}$，即$\begin{cases}a_1+d=3\\a_1+\dfrac{5}{2}d=6\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$，

故$a_8+a_9+a_{10}=3a_1+24d=51$，故选：B

【变式 1-1】(2023·全国·高三校联考期中）记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_{17}=51$，$a_1=15$，则$\{a_n\}$的公差为（　　）

热点 5-1 等差数列的通项及前 n 项和

主要考查等差数列的基本量计算和基本性质、等差数列的中项性质、判定与证明，这是高考热点；等差数列的求和及综合应用是高考考查的重点。这部分内容难度以中、低档题为主，结合等比数列一般设置一道选择题和一道解答题。



【题型 1　等差数列的基本量计算】

满分技巧

1、等差数列的通项公式及前 n 项和公式共涉及五个量 a_1，a_n，d，n，S_n，知其中三个就能求另外两个，体现了方程思想．

2、数列的通项公式和前 n 项和公式在解题中起到变量代换的作用，而 a_1 和 d 是等差数列的两个基本量，用它们表示已知量和未知量是常用方法．

【例 1】（2023·四川乐山·统考一模）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，若$S_3=9$，$S_6=36$，则$a_8+a_9+a_{10}=$（　　）

A．63　　B．51　　C．45　　D．27

【答案】B

【解析】由题意知等差数列$\{a_n\}$中，$S_3=9$，$S_6=36$，

设首项为a_1，公差为d，

则$\begin{cases}3a_1+\dfrac{3\times2}{2}d=9\\6a_1+\dfrac{6\times5}{2}d=36\end{cases}$，即$\begin{cases}a_1+d=3\\a_1+\dfrac{5}{2}d=6\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$，

故$a_8+a_9+a_{10}=3a_1+24d=51$，故选：B

【变式 1-1】（2023·全国·高三校联考期中）记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_{17}=51$，$a_1=15$，则$\{a_n\}$的公差为（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．-1　　C．$-\frac{3}{2}$　　D．-2

【答案】C

【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

因为$S_{17}=51$且$a_1=15$，可得$17a_1+\frac{17\times16}{2}d=17\times15+\frac{17\times16}{2}d=51$，解得$d=-\frac{3}{2}$.故选：C.

【变式 1-2】(2023·广东广州·高三广雅中学校考阶段练习)已知数列$\{a_n\}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$是等差数列，$S_n$是其前$n$项和.若$a_2a_5+a_8=0$，$S_9=27$，则$a_2$的值是(　　)

A．1　　B．-1　　C．-3　　D．-5

【答案】C

【解析】设等差数列的公差为d，

则$\begin{cases}(a_1+d)(a_1+4d)+a_1+7d=0\\9a_1+36d=27\end{cases}$，解得$a_1=-5,d=2$，所以$a_2=a_1+d=-3$.故选：C

【变式 1-3】(2023·湖南衡阳·高三衡阳市八中校联考阶段练习)已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_2=3$，$S_4=10$，则$a_5=$______.

【答案】0

【解析】设数列$\{a_n\}$的公差为d，由已知有$a_1+d=3$，$S_4=4a_1+6d=10$，解得$a_1=4$，$d=-1$，

所以$a_5=a_1+4d=4-4=0$.

【题型 2　等差数列性质的应用】

满分技巧

1、在等差数列$\{a_n\}$中，当$m\neq n$时，$d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$为公差公式，利用这个公式很容易求出公差，

还可变形为$a_m=a_n+(m-n)d$.

2、等差数列$\{a_n\}$中，每隔相同的项抽出来的项按照原来的顺序排列，构成的新数列仍然是等差数列．

3、等差数列$\{a_n\}$中，若$m+n=p+q$，则$a_n+a_m=a_p+a_q(n，m，p，q\in\mathbf{N}^*)$，

特别地，若$m+n=2p$，则$a_n+a_m=2a_p$.

【例 2】(2023·全国·模拟预测)已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_3+2a_4+a_{13}=120$，则$S_{11}-5a_6=$(　　)

A．60　　B．120　　C．180　　D．240

【答案】C

【解析】根据等差数列下标和性质可知$a_3+2a_4+a_{13}=2a_4+2a_8=4a_6=120$，得$a_6=30$，

所以$S_{11}-5a_6=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}-5a_6=11a_6-5a_6=6a_6=180$．故选：C．

【变式 2-1】(2023·山东济宁·高三统考期中)设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_3+a_7=18$，$a_2+a_4+a_6=21$，则$S_8=$（　　）.

A．32　　B．64　　C．80　　D．128

【答案】B

【解析】因为$\{a_n\}$是等差数列，所以$a_3+a_7=2a_5=18$，则$a_5=9$；

又$a_2+a_4+a_6=3a_4=21$，则$a_4=7$；则$S_8=\frac{8(a_1+a_8)}{2}=4(a_4+a_5)=4\times16=64$.故选：B.

【变式 2-2】(2023·上海·高三校考期中)已知数列$\{\log_3 a_n\}$是等差数列，$\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_{4045}=8090$，则$a_{2023}=$__________.

【答案】9

【解析】因为数列$\{\log_3 a_n\}$是等差数列，

所以$\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_{4045}=\frac{4045(\log_3 a_1+\log_3 a_{4045})}{2}=8090$，

所以$\log_3 a_1+\log_3 a_{4045}=2\log_3 a_{2023}=4$，

所以$\log_3 a_{2023}=2$，所以$a_{2023}=9$.

【变式 2-3】(2023·河南·高三校联考期中)(多选)记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则根据下列条件能够确定S_{21}的值的是（　　）

A．$a_{11}=10$　　B．$a_4+a_{19}=10$　　C．$a_7=10$，$S_{13}=130$　　D．$S_7=100$，$S_{14}=300$

【答案】AD

【解析】$S_{21}=\frac{(a_1+a_{21})\times21}{2}=\frac{2a_{11}\times21}{2}=21a_{11}$，所以 A 正确，

由于$a_4+a_{19}=a_{11}+a_{12}$，结合$S_{21}=21a_{11}$,所以 B 错误，

对于 C，$a_7=10$，$S_{13}=\frac{(a_1+a_{13})\times13}{2}=\frac{2a_7\times13}{2}=13a_7$，故 C 错误，

对于 D，$S_{14}-S_7=300-100=200=a_8+a_9+\cdots+a_{14}=a_1+a_2+\cdots+a_7+7d\times7=100+49d$，

$S_7=a_1+a_2+\cdots+a_7=100$，所以$49d=100$，

又$S_{21}-S_{14}=a_{15}+a_{16}+\cdots+a_{21}=a_1+a_2+\cdots+a_7+14d\times7=100+200=300$，

所以$S_{21}=S_{14}+300=600$，故 D 正确，故选：AD

【题型 3　等差数列的单调性及应用】

满分技巧

当公差$d\neq0$时，等差数列的通项公式$a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d$是关于n的一次函数，且一次项系数为公差d.若公差$d>0$，则为递增数列，若公差$d<0$，则为递减数列．

【例 3】（2022·广东惠州·统考一模）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，若$b_n=2^{a_n}$，则“$d<0$”是“$b_{n+1}<b_n$（$n\in\mathbf{N}^*$）”的（　　）

A．充分不必要条件　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　D．既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】充分性：若$d<0$，则$a_{n+1}-a_n=d<0$，即$a_{n+1}<a_n$，

$\therefore 2^{a_{n+1}}<2^{a_n}$，即$b_{n+1}<b_n$，所以充分性成立；

必要性：若$b_{n+1}<b_n$，即$2^{a_{n+1}}<2^{a_n}$，$\therefore a_{n+1}<a_n$，则$a_{n+1}-a_n=d<0$，必要性成立.

因此，“$d<0$”是“$b_{n+1}<b_n$”的充要条件.故选：C.

【变式 3-1】（2023·吉林白山·抚松县第一中学校考模拟预测）若等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$S_{4043}>0,S_{4044}<0$，对任意正整数n，都有$|a_n|\geq|a_m|$，则m的值为（　　）

A．2020　　B．2021　　C．2022　　D．2023

【答案】C

【解析】依题意$S_{4043}=\dfrac{4043(a_1+a_{4043})}{2}=4043a_{2022}>0,a_{2022}>0$，

又$S_{4044}=\dfrac{4044(a_1+a_{4044})}{2}<0$，即$a_1+a_{4044}<0$，则$a_{2022}+a_{2023}<0$

则$a_{2023}<0$，且$|a_{2022}|<|a_{2023}|$，

所以等差数列$\{a_n\}$单调递减，$a_1>a_2>\cdots>a_{2021}>a_{2022}>0>a_{2023}>a_{2024}>\cdots$，

所以对任意正整数n，都有$|a_n|\geq|a_m|$，则$m=2022$．故选，C．

【变式 3-2】（2022·湖北襄阳·高二校考阶段练习）（多选）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_{11}<S_9<S_{10}$，则下列结论正确的是（　　）

A．数列$\{a_n\}$是递减数列　　B．$a_{10}+a_{11}<0$　　C．当$n>19$时，$S_n<0$　　D．$S_{16}-S_4<0$

【答案】ABCD

【解析】若$S_{11}<S_9<S_{10}$，可得$S_{11}-S_9=a_{11}+a_{10}<0,S_{10}-S_9=a_{10}>0$，可得 B 正确；

$\therefore a_{11}<0$　$\therefore d<0$故数列为递减数列，故 A 正确；

因为$a_{10}+a_{11}<0$，所以$S_{20}=a_1+a_2+.....+a_{20}=10(a_{10}+a_{11})<0$，

因为$a_{10}>0$，所以$S_{19}=\frac{a_1+a_{19}}{2}\times 19=\frac{2a_{10}}{2}\times 19=a_{10}\times 19>0$，

因为数列是递减数列，故当$n>19$时，$S_n<0$，故C正确；

$S_{16}-S_4=a_5+a_6+......+a_{16}=6\left(a_{10}+a_{11}\right)<0$，故D正确；故选：ABCD.

【变式3-3】(2023·黑龙江·高三校联考阶段练习)(多选)若数列$\{a_n\}$是等差数列，公差$d>0$，则下列对数列$\{b_n\}$的判断正确的是(　　)

A．若$b_n=-a_n$，则数列$\{b_n\}$是递减数列

B．若$b_n=a_n^2$，则数列$\{b_n\}$是递增数列

C．若$b_n=a_n+a_{n+1}$，则数列$\{b_n\}$是公差为d的等差数列

D．若$b_n=a_n+n$，则数列$\{b_n\}$是公差为$d+1$的等差数列

【答案】AD

【解析】由$a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$且$d>0$，

A：由$b_n=-a_n=-dn+(d-a_1)$，即数列$\{b_n\}$是递减数列，对；

B：由$b_n=a_n^2=[dn+(a_1-d)]^2$，若$d>a_1$时，如$d=1,a_1=-2$，$\{b_n\}$不单调，错；

C：由$b_n=a_n+a_{n+1}=2dn+(2a_1-d)$，则数列$\{b_n\}$是公差为$2d$的等差数列，错；

D：由$b_n=a_n+n=(d+1)n+(a_1-d)$，则数列$\{b_n\}$是公差为$d+1$的等差数列，对.故选：AD

【题型4　等差数列前n项和性质应用】

满分技巧

1、等差数列的依次k项之和，S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$，…组成公差为k^2d的等差数列．

2、数列$\{a_n\}$是等差数列⇔$S_n=an^2+bn$(a，b为常数)⇔数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列．

3、若$S_{奇}$表示奇数项的和，$S_{偶}$表示偶数项的和，公差为d，

①当项数为偶数$2n$时，$S_{偶}-S_{奇}=nd$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$；

②当项数为奇数$2n-1$时，$S_{奇}-S_{偶}=a_n$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{n}{n-1}$.

【例4】(2024·四川宜宾·南溪第一中学校校考模拟预测)已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=-2020,S_{2024}=6072$，则$\frac{S_{2021}}{2021}-\frac{S_{2013}}{2013}=$(　　)

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

【答案】D

【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

因为 $\frac{S_n}{n}=\frac{na_1+\frac{n(n-1)d}{2}}{n}=a_1+\frac{d}{2}(n-1)$，

可知 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以首项为 a_1，公差为 $\frac{d}{2}$ 的等差数列，

则 $\frac{S_{2024}}{2024}-\frac{S_1}{1}=2023\times\frac{d}{2}$，即 $\frac{6072}{2024}-\frac{-2020}{1}=2023\times\frac{d}{2}$，解得 $d=2$，

所以 $\frac{S_{2021}}{2021}-\frac{S_{2013}}{2013}=8\times\frac{d}{2}=4d=8$.故选：D.

【变式 4-1】(2023·湖北荆州·高三松滋市第一中学校考阶段练习)等差数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 与 T_n，且 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n+2}{n+3}$，则 $\frac{a_3+a_9}{3b_7-b_9}=$ (　　)

A．$\frac{14}{9}$　　B．$\frac{12}{7}$　　C．$\frac{26}{15}$　　D．$\frac{7}{4}$

【答案】B

【解析】由等差数列性质得，$\frac{a_3+a_9}{3b_7-b_9}=\frac{2a_6}{3(b_1+6d)-(b_1+8d)}=\frac{2a_6}{2(b_1+5d)}=\frac{2a_6}{2b_6}=\frac{a_6}{b_6}$，

等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和满足 $S_{2n-1}=(2n-1)a_n$，则 $S_{11}=11a_6$，

等差数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和满足 $T_{2n-1}=(2n-1)b_n$，则 $T_{11}=11b_6$，

所以 $\frac{a_6}{b_6}=\frac{S_{11}}{T_{11}}=\frac{2\times11+2}{11+3}=\frac{24}{14}=\frac{12}{7}$.故选：B.

【变式 4-2】(2023·海南·校联考模拟预测)等差数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 前 n 项和分别为 S_n,T_n，且 $\frac{S_9}{T_{13}}=3$，则 $\frac{a_5}{b_7}=$______.

【答案】$\frac{13}{3}$

【解析】由等差数列性质可得 $\frac{S_9}{T_{13}}=\frac{9a_5}{13b_7}=3$，解得 $\frac{a_5}{b_7}=\frac{13}{3}$.

【变式 4-3】(2023·安徽安庆·高三安徽省太湖中学校考阶段练习)(多选)已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 和，下列说法正确的是(　　)

A．若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，则 S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$ 为等差数列

B．若 $\{a_n\}$ 为等比数列，则 S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$ 为等比数列

C．若 $\{a_n\}$ 为等差数列，则 $\frac{S_m}{m}$，$\frac{S_{2m}}{2m}$，$\frac{S_{3m}}{3m}$ 为等差数列

D．若 $\{a_n\}$ 为等比数列，则 $\frac{S_m}{m}$，$\frac{S_{2m}}{2m}$，$\frac{S_{4m}}{4m}$ 为等比数列

【答案】AC

【解析】对于 B 和 D，当公比$q=-1$时，且 m 为偶数时，$S_m=S_{2m}-S_m=S_{3m}-S_{2m}=0$，

此时S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$不为等比数列；

$\frac{S_m}{m}=\frac{S_{2m}}{2m}=\frac{S_{4m}}{4m}=0$，此时$\frac{S_m}{m}$，$\frac{S_{2m}}{2m}$，$\frac{S_{4m}}{4m}$不为等比数列，则 B 和 D 错误；

对于 A，若数列$\{a_n\}$为等差数列，设公差为d，则$S_m=a_1+a_2+\cdots+a_m$，

$S_{2m}-S_m=a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{2m}$，$S_{3m}-S_{2m}=a_{2m+1}+a_{2m+2}+\cdots+a_{3m}$，

由等差数列片段和性质知S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$为等差数列，公差为md ,A 正确；

对于 C，若$\{a_n\}$为等差数列，设公差为d，

则$\frac{S_m}{m}=\frac{ma_1+\frac{m(m-1)}{2}d}{m}=a_1+\frac{(m-1)}{2}d=\frac{d}{2}m+a_1-\frac{d}{2}$，

$\frac{S_{2m}}{2m}=md+a_1-\frac{d}{2}$，$\frac{S_{3m}}{3m}=\frac{3m}{2}d+a_1-\frac{d}{2}$，

则$2\times\frac{S_{2m}}{2m}=\frac{S_m}{m}+\frac{S_{3m}}{3m}$，所以$\frac{S_m}{m}$，$\frac{S_{2m}}{2m}$，$\frac{S_{3m}}{3m}$为等差数列，C 正确；故选：AC

【题型 5　等差数列前 n 项和的最值问题】

满分技巧

1、二次函数法：将 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$ 配方．转化为求二次函数的最值问题，

但要注意 $n\in\mathbf{N}^*$，结合二次函数图象的对称性来确定 n 的值，更加直观．

2、邻项变号法：当 $a_1>0$，$d<0$，$\begin{cases}a_n\geq 0,\\ a_{n+1}\leq 0\end{cases}$ 时，S_n 取得最大值；当 $a_1<0$，$d>0$，$\begin{cases}a_n\leq 0,\\ a_{n+1}\geq 0\end{cases}$ 时，S_n 取得最小值．

特别地，若 $a_1>0$，$d>0$，则 S_1 是$\{S_n\}$的最小值；若 $a_1<0$，$d<0$，则 S_1 是$\{S_n\}$的最大值．

【例 5】（2023·贵州·高三贵阳一中校考阶段练习）已知S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，且$S_{15}<S_{10}$，且$a_1+a_{14}+a_{15}+a_{19}>0$，则$S_n$的最大值为（　　）

A．S_{12}　　B．S_{13}　　C．S_{14}　　D．S_{15}

【答案】A

【解析】设数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，

由$S_{15}-S_{10}=a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=5a_{13}<0$，可得$a_{13}<0$，

又由$a_1+a_{14}+a_{15}+a_{19}=4a_1+45d=4\left(a_1+\frac{45}{4}d\right)>0$，可得$a_1+\frac{45}{4}d>0$，

因为$a_1+\frac{45}{4}d=a_1+12d-\frac{3}{4}d=a_{13}-\frac{3}{4}d>0$，所以$d<\frac{4}{3}a_{13}<0$，所以$d<0$，

可得等差数列$\{a_n\}$为递减数列，

又因为$a_1+\frac{45}{4}d=\left(a_1+11d\right)+\frac{1}{4}d=a_{12}+\frac{d}{4}>0$，所以$a_{12}>-\frac{d}{4}>0$，

故等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n最大值为S_{12}.故选；A.

【变式 5-1】(2023·黑龙江·高三省实验中学校考阶段练习)等差数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n, a_1=15, a_2+a_3+a_4+a_5=30$,则$S_n$的最大值为(　　)

A．60　　B．45　　C．30　　D．15

【答案】B

【解析】因为$a_1=15, a_2+a_3+a_4+a_5=30,$

则$a_2+a_3+a_4+a_5=a_1+d+a_1+2d+a_1+3d+a_1+4d=4a_1+10d=60+10d=30$，

则$d=-3$，则$a_n=a_1+\left(n-1\right)d=15-3\left(n-1\right)=-3n+18$，

令$a_n=0$，解得：$n=6$，

因为$\{a_n\}$是等差数列，

所以当$n<6, n\in \mathrm{N}^*$时，$a_n>0$，$a_6=0$，当$n>6, n\in \mathrm{N}^*$时，$a_n<0$，

所以S_n的最大值为$S_5=S_6=\frac{6\left(a_1+a_6\right)}{2}=45$.故选：B.

【变式 5-2】(2023·江苏无锡·高三江阴市第一中学校考阶段练习)(多选)递增等差数列$\{a_n\}$满足$a_7=3a_5$，前n项和为S_n，下列选项正确的是(　　)

A．$d>0$　　B．$a_1<0$　　C．当$n=5$时S_n最小　　D．$S_n>0$时n的最小值为 8

【答案】ABD

【解析】A、B：由题意可设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

因为$a_7=3a_5$，可得$a_1+6d=3\left(a_1+4d\right)$，解得$a_1=-3d$，

又由等差数列$\{a_n\}$是递增数列，可知$d>0$，则$a_1<0$，故 A，B 正确.

C：$S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n=\frac{d}{2}n^2-\frac{7d}{2}n$，

由$n=-\frac{-\frac{7d}{2}}{d}=\frac{7}{2}$得，当$n=3$或 4 时$S_n$最小，故 C 错误.

D：令$S_n=\frac{d}{2}n^2-\frac{7d}{2}n>0$，解得$n<0$或$n>7$，即$S_n>0$时$n$的最小值为 8，故 D 正确.故选：ABD.

【变式 5-3】(2023·河北石家庄·高三新乐市第一中学校考开学考试)(多选)已知等差数列$\{a_n\}$，其前n项和为S_n，若$S_{15}>0, \frac{a_9}{a_8}<-1$，则下列结论正确的是(　　)

A．$|a_9|>a_8$　　B．使$S_n>0$的n的最大值为16　　C．公差$d<0$　　D．当$n=8$时S_n最大

【答案】ACD

【解析】$\because$等差数列$\{a_n\}$，$S_{15}=\frac{15}{2}(a_1+a_{15})=15a_8>0,\therefore a_8>0$，

又$\because \frac{a_9}{a_8}<-1 \therefore a_9<-a_8<0, a_8+a_9<0$，$\therefore |a_9|>a_8$，A 正确.

$\because d=a_9-a_8<-2a_8<0$，C 正确.

$\because a_8+a_9<0 \therefore S_{16}=\frac{16}{2}(a_1+a_{16})=\frac{16}{2}(a_8+a_9)<0, S_{15}>0$,

使$S_n>0$的n的最大值为15. B 错误.

$\because a_8>0, a_9<0 \therefore$当$n\le 8, a_n>0, n\ge 9, a_n<0$，所以当$n=8$时$S_n$最大. D 正确.故选：ACD

【题型 6　含绝对值的等差数列求和】

【例 6】(2023·上海·高三校考期中)在公差为d的等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=10$，且a_1，$2a_2+2$，$5a_3$成等比数列．

(1)求d，a_n；

(2)若$d<0$，$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|=100$，求$n$．

【答案】(1)$d=4$时$a_n=4n+6$，$d=-1$时$a_n=11-n$；(2)20

【解析】(1)公差为d的等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=10$，且a_1，$2a_2+2$，$5a_3$成等比数列．

所以$(2a_2+2)^2=5a_1\cdot a_3$，即$(20+2d+2)^2=5\times 10(10+2d)$解得$d=4$或$d=-1$，

①当$d=4$时，$a_n=10+4(n-1)=4n+6$．

②当$d=-1$时，$a_n=10-(n-1)=11-n$．

(2)因为$d<0$，所以$a_n=11-n$，

令$S_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|$，

①当$1\le n\le 11$时，$a_n\ge 0$，所以$|a_n|=a_n$，

所以$S_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{n(10+11-n)}{2}=\frac{n(21-n)}{2}$．

②当$n>11$时，$a_n<0$，

所以$S_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|$，$=a_1+a_2+\ldots+a_{11}-a_{12}-a_{13}-\ldots-a_n$，

$=2(a_1+a_2+\ldots+a_{11})-(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)$，$=110-\frac{n(21-n)}{2}$．

故$S_n=\begin{cases}\frac{n(n-21)}{2}+110, n>11\\ \frac{n(21-n)}{2}, 1\le n\le 11\end{cases}$．

又$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|=100$，

且当$n\le 11$时$S_n\le S_{11}=\frac{11\times(21-11)}{2}=55<100$，