§2 收敛数列的性质

本节首先考察收敛数列这个新概念有哪些优良性质？然后学习怎样利用这些性质.

一、惟一性
二、有界性
三、保号性
四、保不等式性
五、迫敛性(夹逼原理)
六、极限的四则运算
七、某些例子

一、惟一性

定理 2.2 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则它只有一种极限

证 设 a 是 $\{a_n\}$ 的一个极限. 下面证明对于任何定数 $b \neq a$, b 不能是$\{a_n\}$的极限.

若 a, b 都是 $\{a_n\}$ 的极限，则对于任何正数 $\varepsilon>0$,

$\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon; \qquad (1)$$

$\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$|a_n - b| < \varepsilon. \tag{2}$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时 (1), (2)同步成立,

从而有

$$|a - b| \le |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon.$$

因为 ε 是任意的，所以 $a = b$.

二、有界性

定理 2.3 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 为有界数列，即存在 $M>0$，使得 $|a_n| \le M$，$n=1, 2, \mathrm{L}\ .$

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，对于正数 $\varepsilon = 1$，$\exists N$，$n > N$ 时，有

$$|a_n - a| < 1,\ \text{即}\ a-1 < a_n < a+1.$$

若令 $M = \max\{\,|a_1|, |a_2|, \mathrm{L}\ , |a_n|, |a-1|, |a+1|\,\}$，

则对一切正整数 n，都有 $|a_n| \le M$.

前页 后页 返回

注 数列 $\{(-1)^n\}$ 是有界的, 但却不收敛. 这就说明有界只是数列收敛的必要条件，而不是充分条件.

三、保号性

定理 2.4 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，对于任意两个实数 b, c，$b < a < c$，则存在 N，当 $n > N$ 时，$b < a_n < c$.

证 取 $\varepsilon = \min\{a-b,\ c-a\} > 0, \exists N$，当 $n > N$ 时，

$$b \le a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \le c, \quad 故\ b < a_n < c.$$

注 若 $a > 0$ (或 $a < 0$)，我们可取 $b = \dfrac{a}{2}$ (或 $c = \dfrac{a}{2}$)，则 $a_n > \dfrac{a}{2} > 0$ (或 $a_n < \dfrac{a}{2} < 0$).

这也是为何称该定理为保号性定理的原因.

例1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

证 对任意正数 ε，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1/\varepsilon)^n}{n!}=0$，所以由

定理 2.4，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，

$$\frac{(1/\varepsilon)^n}{n!}<1,\ \text{即}\ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

四、保不等式性

定理 2.5 设$\{a_n\},\{b_n\}$均为收敛数列，假如存在正数N_0，当$n>N_0$时，有$a_n\le b_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 若$b<a$，取$\varepsilon=\dfrac{a-b}{2}$，

由保号性定理，存在$N>N_0$，当$n>N$时，

$$a_n>a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2},\quad b_n<b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2},$$

故$a_n>b_n$，导致矛盾. 所以 $a\le b$.

前页 后页 返回

注 若将定理 2.5 中的条件 $a_n \le b_n$ 改为 $a_n < b_n$,

也只能得到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

这就是说，虽然条件是严格不等式, 结论却不一定是严格不等式.

例如，虽然 $\dfrac{1}{n} < \dfrac{2}{n}$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n} = 0$.

例2 设 $a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

证 由于$a_n \geq 0$, 根据极限的保不等式性, 有$a \geq 0$.

对于任意 $\varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. 于是可得:

(1) $a = 0$ 时, 有 $|\sqrt{a_n} - 0| = \sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon}$;

(2) $a > 0$ 时, 有

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ 得证.

五、迫敛性（夹逼原理）

定理 2.6 设数列$\{a_n\},\{b_n\}$都以 a 为极限，数列$\{c_n\}$满足：存在 N_0，当$n>N_0$ 时，有$a_n\le c_n\le b_n$，则$\{c_n\}$收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

证 对任意正数ε，因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$，所以分别存在$N_1,N_2$，使得当$n>N_1$时，$a-\varepsilon<a_n$；当$n>N_2$时，$b_n<a+\varepsilon$. 取$N=\max\{N_0,N_1,N_2\}$，当$n>N$时，$a-\varepsilon<a_n\le c_n\le b_n<a+\varepsilon$. 这就证得

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

例3 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的极限.

解 设 $h_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$, 则有

$$n = (1+h_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 \quad (n \geq 2),$$

故 $1 \leq \sqrt[n]{n} = 1 + h_n \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. 又因

$$\lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) = 1,$$

所以由迫敛性，求得 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

六、四则运算法则

定理2.7 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 为收敛数列,则 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$, $\{a_n\cdot b_n\}$ 也都是收敛数列, 且有

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, 当 b_n 为常数 c 时,

$\lim\limits_{n\to\infty}cb_n=c\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;

(3) 若 $b_n\neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$, 则 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 也收敛, 且

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\Big/\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

证明 (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$, $|b_n - b| < \varepsilon$, 所以

$$|a_n + b_n - (a + b)| < |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 得到

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n.$$

证明 (2) 因 $\{b_n\}$ 收敛, 故 $\{b_n\}$ 有界, 设 $|b_n| \le M$.

对于任意 $\varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{M+1}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{|a|+1},$$

前页 后页 返回

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/876225221214010224