数学学业水平复习知识点

第一章 集合与简易逻辑

1、集合

〔1〕、定义：某些指定的对象集在一起叫集合；集合中的每个对象叫集合的元素。

集合中的元素具有确定性、互异性和无序性；表示一个集合要用{ }。

〔2〕、集合的表示法：列举法〔〕、描述法〔〕、图示法〔〕；

〔3〕、集合的分类：有限集、无限集和空集〔记作φ，φ 是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集〕；

〔4〕、元素 a 和集合 A 之间的关系：$a \in A$，或 $a \in A$；

〔5〕、常用数集：自然数集：N；正整数集：N；整数集：Z；整数：Z；有理数集：Q；实数集：R。

2、子集

〔1〕、定义：A 中的任何元素都属于 B，那么 A 叫 B 的子集；记作：$A \subseteq B$，

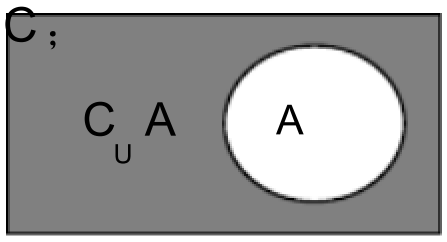
注意：$A \subseteq B$ 时，A 有两种情况：$A=\phi$ 与 $A \neq \phi$

〔2〕、性质：①、$A \subseteq A, \varphi \subseteq A$；②、假设 $A \subseteq B, B \subseteq C$，那么 $A \subseteq C$；③、假设 $A \subseteq B, B \subseteq A$ 那么 $A=B$；

3、真子集

〔1〕、定义：A 是 B 的子集，且 B 中至少有一个元素不属于 A；记作：$A \subset B$；

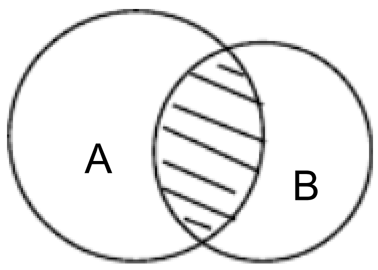
〔2〕、性质：①、$A \neq \varphi, \varphi \subseteq A$；②、假设 $A \subseteq B, B \subseteq C$，那么 $A \subseteq C$；



4、补集

①、定义：记作：$C_U A = \{x \mid x \in U, 且 x \in A\}$；

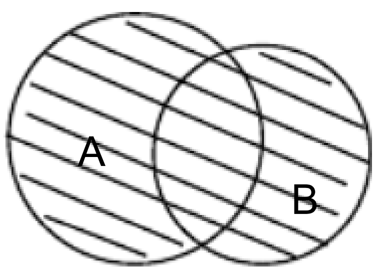
②、性质：$A \cap C_U A = \varphi$，$A \cup C_U A = U$，$C_U(C_U A) = A$；



5、交集与并集

〔1〕、交集：$A \cap B = \{x \mid x \in A 且 x \in B\}$

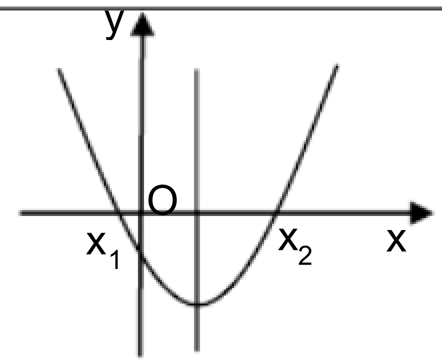
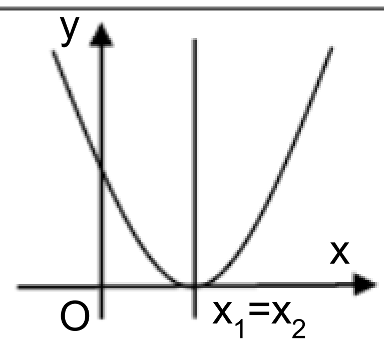
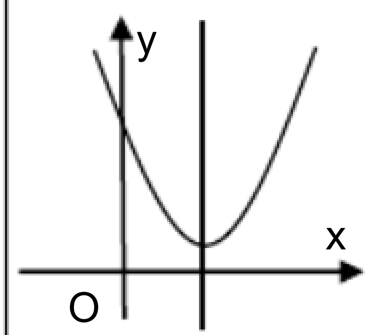
性质：①、$A \cap A = A, A \cap \varphi = \varphi$　②、假设 $A \cap B = B$，那么 $B \subseteq A$



〔2〕、并集：$A \cup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$

性质：①、$A \cup A = A, A \cup \varphi = A$　②、假设 $A \cup B = B$，那么 $A \subseteq B$

6、**一元二次不等式的解法：** 〔二次函数、二次方程、二次不等式三者之间的关系〕

判别式：$\triangle=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根	有两相异实数根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两相等实数根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实数根
一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x<x_1, x>x_2\}$ “＞”取两边	$\{x\mid x\neq-\frac{b}{2a}\}$	R
一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$ “＜”取中间	φ	φ

不等式解集的边界值是相应方程的解

含参数的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 恒成立问题今 含参不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 R；

其解答分 $a=0$(验证 $bx+c>0$ 是否恒成立)、$a\neq0$〔$a<0$ 且$\triangle<0$〕两种情况。

7、**绝对值不等式的解法：** 〔“＞”取两边，“＜”取中间〕

〔1〕、当 $a>0$ 时，$|x|>a$ 的解集是$\{x\mid x<-a, x>a\}$，$|x|<a$ 的解集是$\{x\mid -a<x<a\}$

〔2〕、当$c>0$时，$|ax+b|>c$ 今 $ax+b<-c, ax+b>c$，　$|ax+b|<c$ 今 $-c<ax+b<c$

〔3〕、含两个绝对值的不等式：零点分段讨论法：例： $|x-3|+|2x+1|>2$

8、**简易逻辑：**

〔**1**〕**命题：**可以判断真假的语句；**逻辑联结词：**或、且、非；

简单命题：不含逻辑联结词的命题； **复合命题：**由简单命题与逻辑联结词构成的命题；

三种形式：p 或 q、p 且 q、非 p；

判断复合命题真假：

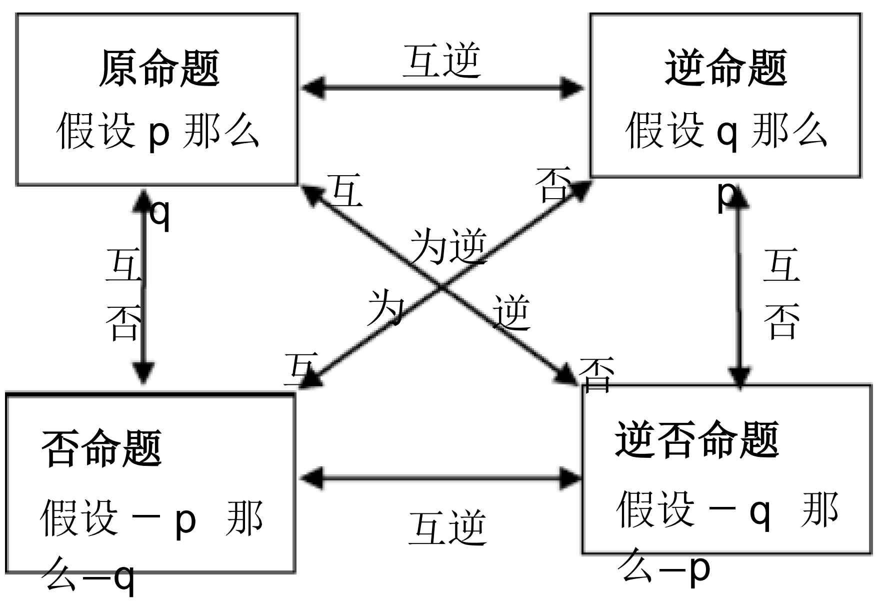
[1]、思路：①、确定复合命题的结构，

②、判断构成复合命题的简单命题的真假，

③、利用真值表判断复合命题的真假；

[2]、真值表：p 或q，同假为假，否那么为真；

p 且 q，同真为真；非 p，真假相反。



〔2〕、四种命题：

原命题：假设 p 那么q；　**逆命题**：假设 q 那么p；

否命题：假设 $\neg p$ 那么 $\neg q$；　**逆否命题**：假设 $\neg q$ 那么 $\neg p$；

互为逆否的两个命题是等价的。

原命题与它的逆否命题是等价命题。

〔3〕、反证法步骤：假设结论不成立→推出矛盾→否认假设。

〔4〕、充分条件与必要条件：

假设 $p \rightarrow q$，那么 p 叫 q 的充分条件；

假设 $p \leftarrow q$，那么 p 叫 q 的必要条件；

假设 $p \Leftrightarrow q$，那么 p 叫 q 的充要条件；

第二章 函数

1、**映射**：按照某种对应法那么f，集合 A 中的任何一个元素，在 B 中都有唯一确定的元素和它对应，记作f：A→B，假设$a \in A, b \in B$，且元素 a 和元素 b 对应，那么b 叫 a 的象，a 叫 b 的原象。

2、**函数**：〔1〕、定义：设 A，B 是非空数集，假设按某种确定的对应关系f，对于集合 A 中的任意一个数 x，集合 B 中都有唯一确定的数f〔x〕和它对应，就称f：A→B 为集合 A 到集合 B 的一个函数，记作 y=f〔x〕，

〔2〕、函数的三要素：定义域，值域，对应法那么；自变量x 的取值范围叫函数的定义域，函数值f〔x〕的范围叫函数的值域，定义域和值域都要用集合或区间表示；

〔3〕、函数的表示法常用：解析法，列表法，图象法〔画图象的三个步骤：列表、描点、连线〕；

〔4〕、区间：满足不等式$a \le x \le b$ 的实数x 的集合叫闭区间，表示为：[a ，b]

满足不等式$a < x < b$ 的实数x 的集合叫开区间，表示为：〔a ，b〕

满足不等式$a \le x < b$或$a < x \le b$ 的实数x 的集合叫半开半闭区间，分别表示为： [a ，b〕或〔a ，b]；

〔5〕、求定义域的一般方法：①、整式：全体实数，例一次函数、二次函数的定义域为R；

②、分式：分母$\neq 0$，0 次幂：底数$\neq 0$，例：$y = \dfrac{1}{2-|3x|}$

③、偶次根式：被开方式≥ 0，例：$y = \sqrt{25 - x^2}$

④、对数：真数> 0，例：$y = \log_a(1-\dfrac{1}{x})$

〔6〕、求值域的一般方法：①、图象观察法：$y = 0.2^{|x|}$

②、单调函数：代入求值法：$y = \log_2(3x-1), x \in [\dfrac{1}{3},3]$

③、二次函数：配方法： $y = x^2 - 4x, x \in [1,5)$， $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 2}$

④、“一次”分式：反函数法： $y = \dfrac{x}{2x+1}$

⑤、“对称”分式：别离常数法： $y = \dfrac{2-\sin x}{2+\sin x}$

⑥、换元法： $y = x + \sqrt{1-2x}$

〔7〕、求f〔x〕的一般方法：

①、待定系数法：一次函数f〔x〕，且满足$3f(x+1) - 2f(x-1) = 2x+17$，求f〔x〕

②、配凑法：$f(x-\dfrac{1}{x}) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$,求$f$〔$x$〕

③、换元法： $f(\sqrt{x}+1) = x + 2\sqrt{x}$，求f〔x〕

④、解方程〔方程组〕：定义在〔-1，0〕∪〔0，1〕的函数f〔x〕满足$2f(x) - f(x) = \dfrac{1}{x}$，求$f$〔$x$〕

3、函数的单调性：

〔1〕、定义：区间 D 上任意两个值x_1, x_2，假设$x_1 < x_2$时有$f(x_1) < f(x_2)$，称$f(x)$为 D 上增函数；

假设$x_1 < x_2$时有$f(x_1) > f(x_2)$，称$f(x)$为 D 上减函数。〔一致为增，不同为减〕

〔2〕、区间 D 叫函数$f(x)$的单调区间，单调区间⊆定义域；

〔3〕、判断单调性的一般步骤：①、设，②、作差，③、变形，④、下结论

〔4〕、复合函数$y = f[h(x)]$的单调性：内外一致为增，内外不同为减；

4、反函数：函数$y = f(x)$的反函数为$y = f^{-1}(x)$；函数$y = f(x)$和$y = f^{-1}(x)$互为反函数；

反函数的求法：①、由$y = f(x)$，解出$x = f^{-1}(y)$，②、x, y互换，写成$y = f^{-1}(x)$，③、写出$y = f^{-1}(x)$的定义域〔即原函数的值域〕；

反函数的性质：函数$y = f(x)$的定义域、值域分别是其反函数$y = f^{-1}(x)$的值域、定义域；

函数$y = f(x)$的图象和它的反函数$y = f^{-1}(x)$的图象关于直线$y = x$对称；

点〔a，b〕关于直线$y = x$的对称点为〔b，a〕；

5、指数及其运算性质：〔1〕、如果一个数的 n 次方根等于a〔$n > 1, n \in N^*$〕，那么这个数叫 a 的 n 次方根；

$\sqrt[n]{a}$叫根式，当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n} = a$；当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a(a \ge 0) \\ -a(a < 0) \end{cases}$

〔2〕、分数指数幂：正分数指数幂：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$；负分数指数幂：$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

0 的正分数指数幂等于 1，0 的负分数指数幂没有意义〔0 的负数指数幂没有意义〕；

〔3〕、运算性质：当 $a>0, b>0, r, s\in Q$ 时：$a^r\cdot a^s=a^{r+s}$，$(a^r)^s=a^{rs}$，$(ab)^r=a^rb^r$，$\sqrt[r]{a}=a^{\frac{1}{r}}$；

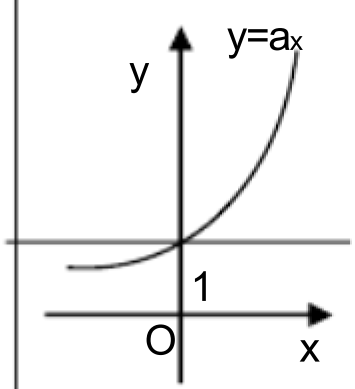
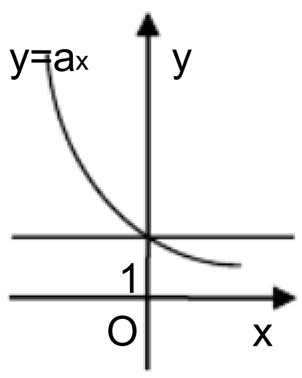
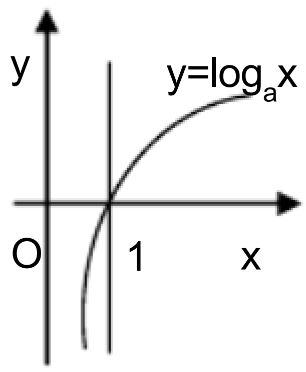
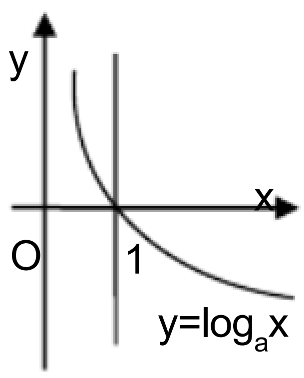
6、对数及其运算性质：〔1〕、定义：如果 $a^b=N(a>0, a\neq 1)$，数 b 叫以 a 为底 N 的对数，记作 $\log_a N=b$，其中 a 叫底数，N 叫真数，以 10 为底叫常用对数：记为 lgN…为底叫自然对数：记为 lnN

〔2〕、性质：①：负数和零没有对数，②、1 的对数等于 0：$\log_a 1=0$，③、底的对数等于 1：$\log_a a=1$，

④、积的对数：$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$，　商的对数：$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$，

幂的对数：$\log_a M^n=n\log_a M$，　方根的对数：$\log_a\sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$，

7、指数函数和对数函数的图象性质

函数		指数函数		对数函数	
定义		$y=a^x$〔$a>0$且$a\neq 1$〕		$y=\log_a x$〔$a>0$且$a\neq 1$〕	
图象〔非奇非偶〕		a>1	0<a<1	a>1	0<a<1
					
性	定义域	〔-∞，+∞〕	〔-∞，+∞〕	〔0，+∞〕	〔0，+∞〕
	值域	〔0，+∞〕	〔0，+∞〕	〔-∞，+∞〕	〔-∞，+∞〕
	单调性	在〔-∞，+∞〕上是增函数	在〔-∞，+∞〕上是减函数	在〔0，+∞〕上是增函数	在〔0，+∞〕上是减函数
质	函数值变化	$a^x\begin{cases}>1, x>0\\=1, x=0\\<1, x<0\end{cases}$	$a^x\begin{cases}<1, x>0\\=1, x=0\\>1, x<0\end{cases}$	$\log_a x\begin{cases}>0, x>1\\=0, x=1\\<0, 0<x<1\end{cases}$	$\log_a x\begin{cases}<0, x>1\\=0, x=1\\>0, 0<x<1\end{cases}$
图	定点	$\because a^0=1, \therefore$ 过定点〔0，1〕		$\because \log_a 1=0, \therefore$ 过定点〔1，0〕	
	图象	$\because a^x>0, \therefore$ 图象在 x 轴上方		$\because x>0, \therefore$ 图象在 y 轴右边	

象	特征		
	图象关系	$y=a^x$ 的图象与 $y=\log_a x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称	

第三章 数列

〔一〕、**数列**：〔**1**〕、**定义**：按一定次序排列的一列数叫数列；每个数都叫数列的项；

数列是特殊的函数：定义域：正整数集N^*〔或它的有限子集{1，2，3，⋯，n}〕，

值域：数列本身，对应法那么：数列的通项公式；

〔**2**〕、**通项公式**：数列$\{a_n\}$的第 n 项a_n与 n 之间的函数关系式；例：数列 1，2，⋯，n 的通项公式$a_n=n$

1，-1，1，-1，⋯，的通项公式$a_n=(-1)^{n-1}$ ；　0，1，0，1，0，⋯，的通项公式$a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$

〔**3**〕、**递推公式**：数列$\{a_n\}$的第一项，且任一项a_n与它的前一项a_{n-1}〔或前几项〕间的关系用一个公式表示，这个公式叫递推公式；例：数列$\{a_n\}$：$a_1=1$，$a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}}$，求数列$\{a_n\}$的各项。

〔**4**〕、**数列的前 n 项和**：$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$； **数列前 n 项和与通项的关系**：$a_n=\begin{cases}a_1=S_1\ (n=1)\\ S_n-S_{n-1}\ (n\ge 2)\end{cases}$

〔二〕、**等差数列** ：〔**1**〕、**定义**：如果一个数列从第2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，那么这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做等差数列的公差，公差通常用字母d 表示。

〔**2**〕、**通项公式**：$a_n=a_1+(n-1)d$ 〔其中首项是a_1，公差是d；整理后是关于 n 的一次函数〕，

〔**3**〕、**前 n 项和**：1. $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$　2. $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$〔整理后是关于 n 的没有常数项的二次函数〕

〔**4**〕、**等差中项**：如果a，A，b 成等差数列，那么A 叫做a 与b 的等差中项。即：$A=\dfrac{a+b}{2}$或$2A=a+b$

[说明]：在一个等差数列中，从第 2 项起，每一项〔有穷等差数列的末项除外〕都是它的前一项与后一项的等差中项；事实上等差数列中某一项为哪一项与其等距离的前后两项的等差中项。

〔**5**〕、**等差数列的判定方法**：

①、定义法：对于数列$\{a_n\}$，假设$a_{n+1}-a_n=d$ (常数)，那么数列$\{a_n\}$是等差数列。

②、等差中项：对于数列$\{a_n\}$，假设$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，那么数列$\{a_n\}$是等差数列。

〔**6**〕、**等差数列的性质**：

①、<u>等差数列任意两项间的关系</u>：如果a_n是等差数列的第n 项，a_m 是等差数列的第m 项，且$m\le n$，公差为d，那么有$a_n=a_m+(n-m)d$

②、等差数列$\{a_n\}$，假设$n+m=p+q$，那么$a_n+a_m=a_p+a_q$。

也就是：$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\ldots\ldots$，如下图：$\overbrace{a_1,\underbrace{a_2,a_3,\cdots,a_{n-2},a_{n-1}}_{a_2+a_{n-1}},a_n}^{a_1+a_n}$

③、假设数列$\{a_n\}$是等差数列，S_n是其前n项的和，$k\in N^*$，那么S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$成等差数列。如下列图所示：$\overbrace{\underbrace{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k}_{S_k}+\underbrace{a_{k+1}+\ldots+a_{2k}}_{S_{2k}-S_k}+\underbrace{a_{2k+1}+\ldots+a_{3k}}_{S_{3k}-S_{2k}}}^{S_{3k}}$

④、设数列$\{a_n\}$是等差数列，$S_{奇}$是奇数项的和，$S_{偶}$是偶数项项的和，S_n是前n项的和，

那么有：前n项的和$S_n=S_{奇}+S_{偶}$，当n为偶数时，$S_{偶}-S_{奇}=\frac{n}{2}d$，其中d为公差；

当n为奇数时，那么$S_{奇}-S_{偶}=a_{中}$，$S_{奇}=\frac{n+1}{2}a_{中}$，$S_{偶}=\frac{n-1}{2}a_{中}$（其中$a_{中}$是等差数列的中间一项）。

⑤、等差数列$\{a_n\}$的前$2n-1$项的和为S_{2n-1}，等差数列$\{b_n\}$的前$2n-1$项的和为S'_{2n-1}，那么$\frac{a_n}{b_n}=\frac{S_{2n-1}}{S'_{2n-1}}$。

（三）、**等比数列**：（**1**）、**定义**：如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，那么这个数列就叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的**公比**，公比通常用字母q表示（$q\neq 0$）。

（**2**）、**通项公式**：$a_n=a_1q^{n-1}$（其中：首项是a_1，公比是q）

（**3**）、**前n项和**] $S_n=\begin{cases} na_1,(q=1) \\ \frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q},(q\neq 1)\end{cases}$（推导方法：乘公比，错位相减）

说明：①$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq 1)$ ②$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq 1)$

③当$q=1$时为常数列，$S_n=na_1$，非0的常数列既是等差数列，也是等比数列

（**4**）、**等比中项**：

如果在a与b之间插入一个数G，使a，G，b成等比数列，那么G叫做a与b的**等比中项**。

也就是，如果是的等比中项，那么$\frac{G}{a}=\frac{b}{G}$，即$G^2=ab$（或$G=\pm\sqrt{ab}$，等比中项有两个）

（**5**）、**等比数列的判定方法**：

①、定义法：对于数列$\{a_n\}$，假设$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(q\neq 0)$，那么数列$\{a_n\}$是等比数列。

②、等比中项：对于数列$\{a_n\}$，假设$a_na_{n+2}=a_{n+1}^2$，那么数列$\{a_n\}$是等比数列。

（**6**）、**等比数列的性质**：

①、<u>等比数列任意两项间的关系</u>：如果a_n是等比数列的第n项，a_m是等比数列的第m项，且$m\leq n$，

公比为q，那么有 $a_n = a_m q^{n-m}$

②、对于等比数列 $\{a_n\}$，假设 $n+m=u+v$，那么 $a_n.a_m = a_u.a_v$

也就是：$a_1.a_n = a_2.a_{n-1} = a_3.a_{n-2} = ...$。如下图：$\overbrace{a_1,\underbrace{a_2,a_3,\dots,a_{n-2},a_{n-1}}_{a_2.a_{n-1}},a_n}^{a_1.a_n}$

③、假设数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，S_n 是其前 n 项的和，$k\in N^*$，那么 S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$ 成等比数列。

如下列图所示：$\overbrace{\underbrace{a_1+a_2+a_3+\dots+a_k}_{S_k}+\underbrace{a_{k+1}+\dots+a_{2k}}_{S_{2k}-S_k}+\underbrace{a_{2k+1}+\dots+a_{3k}}_{S_{3k}-S_{2k}}}^{S_{3k}}$

〔7〕、求数列的前 n 项和的常用方法：分析通项，寻求解法

$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$，$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

①公式法："差比之和"的数列：$(2-3\times5^{-1})+(2-3\times5^{-2})+\dots+(2-3\times5^{-n})=$

②、并项法：$1-2+3-4+\dots+(-1)^{n-1}n=$

③、裂项相消法：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=$

$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=$

④、到序相加法：

⑤、错位相减法："差比之积"的数列：$1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}=$

第四章 三角函数

1、角：〔1〕、正角、负角、零角：逆时针方向旋转正角，顺时针方向旋转负角，不做任何旋转零角；

〔2〕、与 α 终边相同的角，连同角 α 在内，都可以表示为集合 $\{\beta\mid\beta=\alpha+k.360^\circ,k\in Z\}$

〔3〕、象限的角：在直角坐标系内，顶点与原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，角的终边落在第几象限，就是第几象限的角；角的终边落在坐标轴上，这个角不属于任何象限。

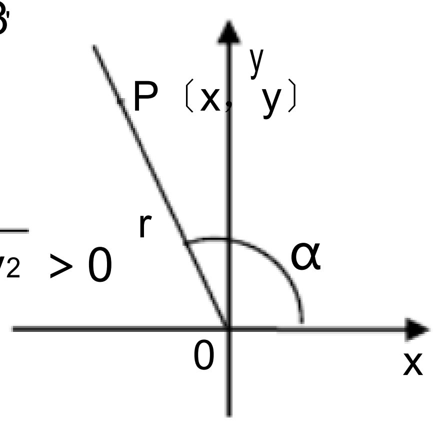
2、弧度制：〔1〕、定义：等于半径的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，用弧度做单位叫弧度制。

〔2〕、度数与弧度数的换算：$180^\circ=\pi$ 弧度，1 弧度$=(\frac{180}{\pi})^\circ\approx57^\circ18'$

〔3〕、弧长公式：$l=|\alpha|r$ 〔α 是角的弧度数〕

扇形面积：$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$

$r=\sqrt{x^2+y^2}>0$

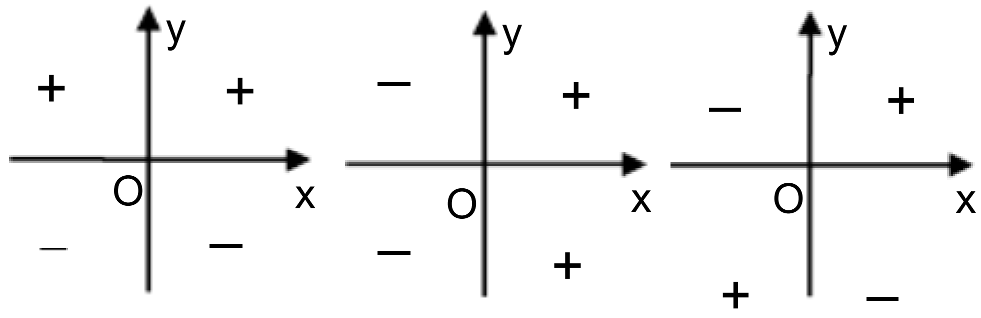


3、**三角函数** （1）、定义：（如图）

$\sin\alpha=\frac{y}{r}$　　$\tan\alpha=\frac{y}{x}$　　$\sec\alpha=\frac{r}{x}$

$\cos\alpha=\frac{x}{r}$　　$\cot\alpha=\frac{x}{y}$　　$\csc\alpha=\frac{r}{y}$

（2）、各象限的符号：



sinα　　cosα　　tan α

（3）、 特殊角的三角函数值

α 的角度	0o	30o	45o	60o	90o	120o	135o	150o	180o	270o	360o
α 的弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tanα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

4、**同角三角函数基本关系式**

（1）平方关系：

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$

$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

（2）商数关系：

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

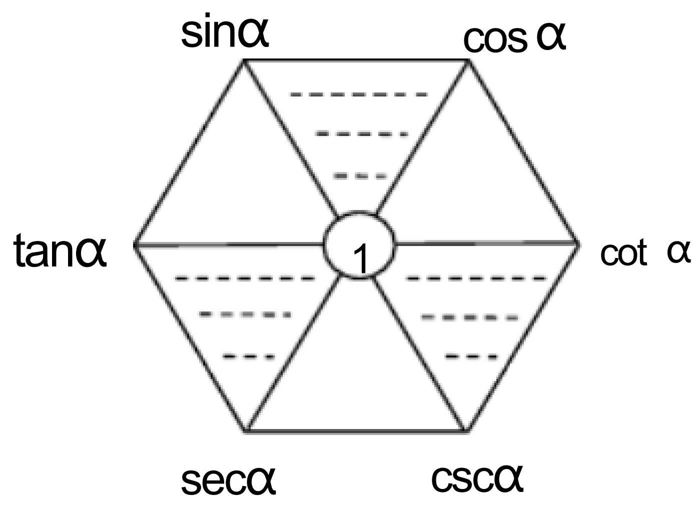
$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

（3）倒数关系：

$\tan\alpha\cot\alpha=1$

$\sin\alpha\csc\alpha=1$

$\cos\alpha\sec\alpha=1$



（4）同角三角函数的常见变形：（活用“1″）

①、$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$，　$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$；　$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$，　$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$；

② $\tan\theta+\cot\theta=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{2}{\sin2\theta}$，　$\cot\theta-\tan\theta=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=2\cot2\alpha$

③ $(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm2\sin\alpha\cos\alpha=1\pm\sin2\alpha$，　$\sqrt{1\pm\sin2\alpha}=|\sin\alpha\pm\cos\alpha|$

5、**诱导公式**：（奇变偶不变，符号看象限）

公式一：　$\sin(\alpha+k.360o)=\sin\alpha$　$\cos(\alpha+k.360o)=\cos\alpha$　$\tan(\alpha+k.360o)=\tan\alpha$

公式二：	公式三：	公式四：	公式五：

$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ $\quad\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$ $\quad\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\quad\sin(360^\circ-\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$ $\quad\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$ $\quad\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\quad\cos(360^\circ-\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$ $\quad\tan(180^\circ+\alpha)=\tan\alpha$ $\quad\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ $\quad\tan(360^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$

补充：$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$ $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$ $\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$ $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$ $\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha$ $\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin\alpha$ $\tan(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$

6、两角和与差的正弦、余弦、正切

$S_{(\alpha+\beta)}$：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ $\qquad S_{(\alpha-\beta)}$：$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$C_{(\alpha+\beta)}$：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\qquad C_{(\alpha-\beta)}$：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$T_{(\alpha+\beta)}$：$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ $\qquad T_{(\alpha-\beta)}$：$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$T_{(\alpha+\beta)}$ 的整式形式为：$\tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)\cdot(1-\tan\alpha\tan\beta)$

例：假设$A+B=45^\circ$，那么$(1+\tan A)(1+\tan B)=2$．〔反之不一定成立〕

7、辅助角公式：$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$

$$=\sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cdot\cos\varphi+\cos x\cdot\sin\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi)$$

〔其中φ 称为辅助角，φ 的终边过点(a,b)，$\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$〕〔多用于研究性质〕

8、二倍角公式：〔1〕、$S_{2\alpha}$：$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$C_{2\alpha}$：$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$T_{2\alpha}$：$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

〔2〕、降次公式：〔多用于研究性质〕

$\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$

$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}=-\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha+\dfrac{1}{2}$

$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha+\dfrac{1}{2}$

〔3〕、二倍角公式的常用变形：①、$\sqrt{1-\cos 2\alpha}=\sqrt{2}|\sin\alpha|$，$\quad\sqrt{1+\cos 2\alpha}=\sqrt{2}|\cos\alpha|$；

②、$\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha}=|\sin\alpha|$，$\quad\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha}=|\cos\alpha|$

③、$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-\dfrac{\sin^2 2\alpha}{2}$； $\quad\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$；

④半角：$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ ，$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ ，$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

9、三角函数的图象性质

〔1〕、函数的周期性：①、定义：对于函数f〔x〕，假设存在一个非零常数T，当 x 取定义域内的每一个值时，都有：f〔x+T〕=f〔x〕，那么函数f〔x〕叫周期函数，非零常数 T 叫这个函数的周期；

②、如果函数f〔x〕的所有周期中存在一个最小的正数，这个最小的正数叫f〔x〕的最小正周期。

〔2〕、函数的奇偶性：①、定义：对于函数f〔x〕的定义域内的任意一个x，

都有：f〔-x〕= -f〔x〕，那么称f〔x〕是奇函数，f〔-x〕= f〔x〕，那么称f〔x〕是偶函数

②、奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于y 轴对称；

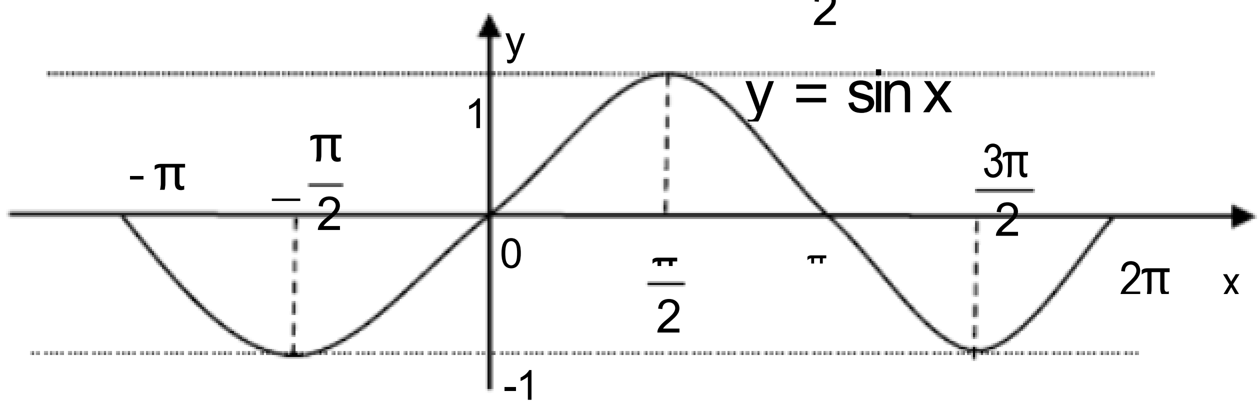
③、奇函数，偶函数的定义域关于原点对称；

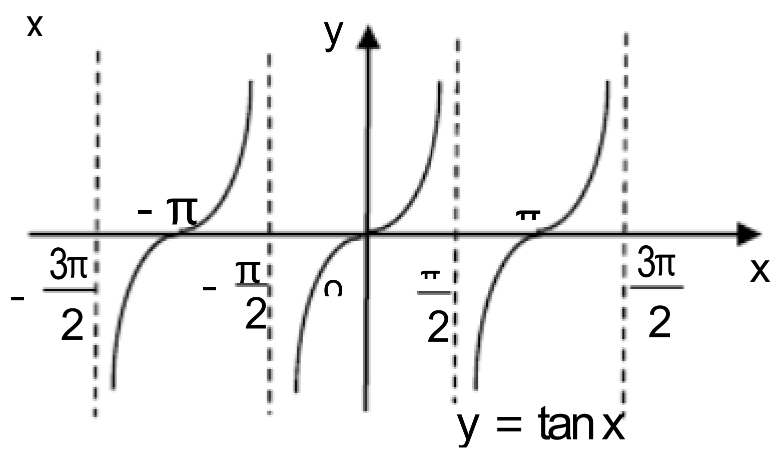
〔3〕、正弦、余弦、正切函数的性质〔$k\in Z$〕

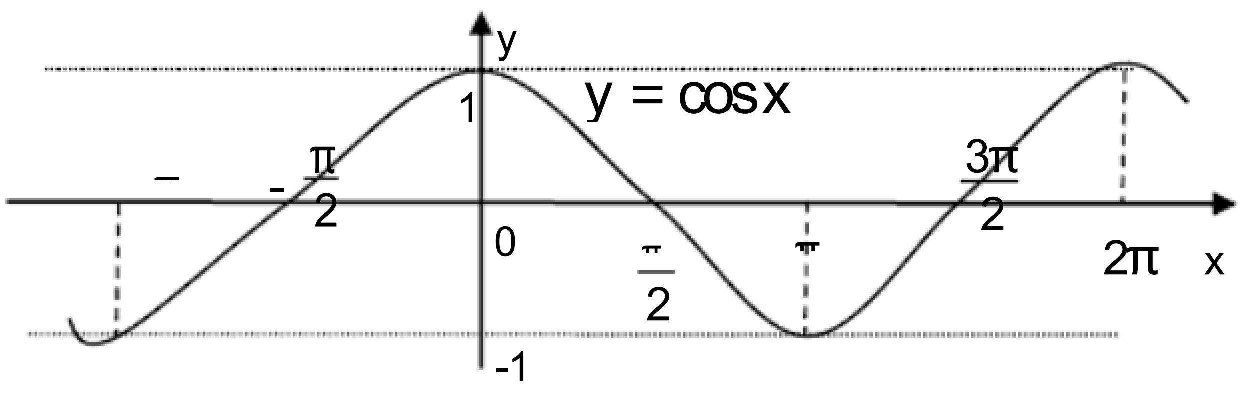
函数	定义域	值域	周期性	奇偶性	递增区间	递减区间
$y=\sin x$	$x\in R$	[-1，1]	$T=2\pi$	奇函数	$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$	$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$
$y=\cos x$	$x\in R$	[-1，1]	$T=2\pi$	偶函数	$[(2k-1)\pi,2k\pi]$	$[2k\pi,(2k+1)\pi]$
$y=\tan x$	$\{x\mid x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\}$	〔-∞,+∞〕	$T=\pi$	奇函数	$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$	

$y=\sin x$ 图象的五个关键点：〔0，0〕，〔$\frac{\pi}{2}$，1〕，〔π，0〕，〔$\frac{3\pi}{2}$，-1〕，〔2π，0〕；

$y=\cos x$ 图象的五个关键点：〔0，1〕，〔$\frac{\pi}{2}$，0〕，〔π，-1〕，〔$\frac{3\pi}{2}$，0〕，〔2π，1〕；







$y=\sin x$ 的对称中心为〔$k\pi,0$〕；对称轴是直线$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$；　　$y=A\sin(wx+\varphi)$ 的周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$；

$y=\cos x$ 的对称中心为〔$k\pi+\frac{\pi}{2},0$〕；对称轴是直线 $x=k\pi$；　　$y=A\cos(wx+\varphi)$ 的周期$T=\frac{2\pi}{w}$；

.

$y = \tan x$ 的对称中心为点（$k\pi$,0）和点（$k\pi + \frac{\pi}{2}$,0）；　　$y = A\tan(①x + \varphi)$ 的周期$T = \frac{\pi}{①}$；

(4)、函数 $y = A\sin(①x + \varphi)(A > 0, ① > 0)$ 的相关概念：

函数	定义域	值域	振幅	周期	频率	相位	初相	图象
$y = A\sin(①x + \varphi)$	$x \in R$	[-A，A]	A	$T = \frac{2\pi}{①}$	$f = \frac{1}{T} = \frac{①}{2\pi}$	$①x+\varphi$	φ	五点法

$y = A\sin(①x + \varphi)$ 的图象与 $y = \sin x$ 的关系：

①振幅变换：$y = \sin x$ 　当 A> 1 时，图象上各点的纵坐标伸长到原来的 A 倍；当0 < A< 1 时，图象上各点的纵坐标缩短到原来的 A 倍　$y = A\sin x$

②周期变换：$y = \sin x$ 　当① > 1时，图象上各点的纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{①}$ 倍；当0 < ① < 1时，图象上各点的纵坐标伸长到原来的 $\frac{1}{①}$ 倍　$y = \sin ①x$

③相位变换：$y = \sin x$ 　当$\varphi > 0$ 时，图象上的各点向左平移φ 个单位倍；当$\varphi < 0$ 时，图象上的各点向右平移$|\varphi|$ 个单位倍　$y = \sin(x + \varphi)$

④平移变换：$y = A\sin ①x$ 　当$\varphi > 0$ 时，图象上的各点向左平移$\frac{\varphi}{①}$个单位倍；当$\varphi < 0$ 时，图象上的各点向右平移$|\frac{\varphi}{①}|$个单位倍　$y = A\sin(①x + \varphi)$

常表达成：①把 $y = \sin x$ 上的所有点向左（$\varphi > 0$ 时）或向右（$\varphi < 0$ 时）平移 $|\varphi|$个单位得 到

$y = \sin(x + \varphi)$；

②再把 $y = \sin(x + \varphi)$ 的所有点的横坐标缩短（$① > 1$）或伸长（$0 < ① < 1$）到原来的$\frac{1}{①}$倍（纵坐标不变）

得到 $y = \sin(①x + \varphi)$；

③再把 $y = \sin(①x + \varphi)$ 的所有点的纵坐标伸长（$A > 1$）或缩短（$0 < A < 1$）到原来的A 倍（横坐标不

变）得到 $y = A\sin(①x + \varphi)$ 的图象。

先平移后伸缩的表达方向：$y = A\sin(①x + \varphi)$

先平移后伸缩的表达方向：$y = A\sin(①x + \varphi) = A\sin[①(x + \frac{\varphi}{①})]$

10、反三角：

求角条件	x 的值	x 的范围	当 x 为钝角时