四川省成都市双流中学2023年高三下学期第三次月考试数学试题

注意事项：

1． 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2．选择题必须使用2B铅笔填涂；非选择题必须使用0．5毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3．请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦点为$F_1$，$F_2$，且$C$上点$P$满足$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，$\left|\overrightarrow{PF_1}\right|=3$，$\left|\overrightarrow{PF_2}\right|=4$，则双曲线$C$的离心率为

A．$\frac{\sqrt{10}}{2}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\frac{5}{2}$　　D．5

2．过抛物线$x^2=2py$（$p>0$）的焦点且倾斜角为α的直线交抛物线于两点A，B．$|AF|=2|BF|$，且A在第一象限，则$\cos2\alpha=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$\frac{3}{5}$　　C．$\frac{7}{9}$　　D．$\frac{2\sqrt{3}}{5}$

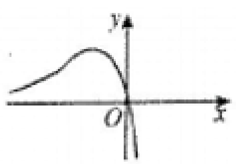
3．已知函数$f(x)=\begin{cases}2^x-x^3,x\le 0\\ \ln x,x>0\end{cases}$，则$f(f(\frac{1}{e}))=$（　　）

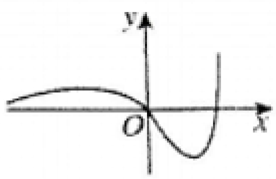
A．$\frac{3}{2}$　　B．1　　C．-1　　D．0

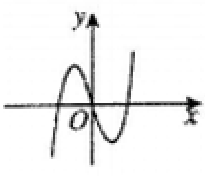
4．从抛物线$y^2=4x$上一点P（P点在x轴上方)引抛物线准线的垂线，垂足为M，且$|PM|=5$，设抛物线的焦点为F，则直线MF的斜率为（　　）

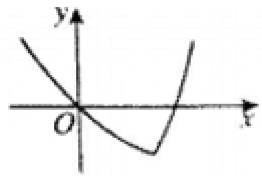
A．-2　　B．2　　C．$-\frac{4}{3}$　　D．$\frac{4}{3}$

5．当$a>0$时，函数$f\left(x\right)=\left(x^2-ax\right)e^x$的图象大致是（　　）

A．

B．

C．

D．

6．在“一带一路”知识测验后，甲、乙、丙三人对成绩进行预测．

甲：我的成绩比乙高．

乙：丙的成绩比我和甲的都高.
丙：我的成绩比乙高.
成绩公布后，三人成绩互不相同且只有一个人预测正确，那么三人按成绩由高到低的次序为

A．甲、乙、丙　　**B**．乙、甲、丙

C．丙、乙、甲　　**D**．甲、丙、乙

7．在平面直角坐标系 ***xOy*** 中，已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F\left(c,0\right)$，若 ***F*** 到直线 $2bx-ay=0$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}c$，则 ***E*** 的离心率为(　　)

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　**B**．$\dfrac{1}{2}$　　**C**．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　**D**．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

8．某个命题与自然数 n 有关，且已证得“假设 $n=k\left(k\in N^*\right)$ 时该命题成立，则 $n=k+1$ 时该命题也成立”．现已知当 $n=7$ 时，该命题不成立，那么（　　）

A．当 $n=8$ 时，该命题不成立　　**B**．当 $n=8$ 时，该命题成立

C．当 $n=6$ 时，该命题不成立　　**D**．当 $n=6$ 时，该命题成立

9．已知 AM，BN 分别为圆 $O_1:\left(x+1\right)^2+y^2=1$ 与 $O_2:\left(x-2\right)^2+y^2=4$ 的直径，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}$ 的取值范围为（　　）

A．$\left[0,8\right]$　　**B**．$\left[0,9\right]$　　**C**．$\left[1,8\right]$　　**D**．$\left[1,9\right]$

10．已知 $f(x)$ 是定义在 $\left[-2,2\right]$ 上的奇函数，当 $x\in\left(0,2\right]$ 时，$f(x)=2^x-1$，则 $f\left(-2\right)+f\left(0\right)=$（　　）

A．-3　　**B**．**2**　　**C**．**3**　　**D**．-2

11．在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，$c=1$．当 a,b 变化时，若 $z=b+\lambda a$ 存在最大值，则正数 λ 的取值范围为

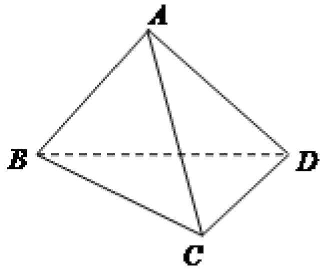
A．$(0,1)$　　**B**．$(0,2)$　　**C**．$(\dfrac{1}{2},2)$　　**D**．$(1,3)$

12．设集合 $M=\left\{x\middle|1<x\le 2\right\}$，$N=\left\{x\middle|x<a\right\}$，若 $M\cap N=M$，则 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,1\right)$　　**B**．$\left(-\infty,1\right]$　　**C**．$\left(2,+\infty\right)$　　**D**．$\left[2,+\infty\right)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．如图，四面体 $ABCD$ 的一条棱长为 x，其余棱长均为 **1**，记四面体 $ABCD$ 的体积为 $F(x)$，则函数 $F(x)$ 的单调增区间是____；最大值为____.



14．正项等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_3=\dfrac{5}{4}$，且$2a_2,\dfrac{1}{2}a_4,a_3$成等差数列，则$(a_1a_2)\cdot(a_2a_3)\cdot\cdots\cdot(a_na_{n+1})$取得最小值时$n$的值为_____

15．已知椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$的下顶点为$A$，若直线$x=ty+4$与椭圆交于不同的两点$M$、$N$，则当$t=$_____时，$\Delta AMN$外心的横坐标最大.

16．假如某人有壹元、贰元、伍元、拾元、贰拾元、伍拾元、壹佰元的纸币各两张，要支付贰佰壹拾玖（**219**）元的货款，则有________种不同的支付方式.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）某中学为研究学生的身体素质与体育锻炼时间的关系，对该校 200 名高三学生平均每天体育锻炼时间进行调查，如表：（平均每天锻炼的时间单位：分钟）

平均每天锻炼的时间/分钟	$[0,10)$	$[10,20)$	$[20,30)$	$[30,40)$	$[40,50)$	$[50,60)$
总人数	20	36	44	50	40	10

将学生日均体育锻炼时间在$[40,60)$的学生评价为“锻炼达标”.

（1）请根据上述表格中的统计数据填写下面2×2列联表：

	锻炼不达标	锻炼达标	合计
男			
女		20	110
合计			

并通过计算判断，是否能在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下认为“锻炼达标”与性别有关？

（2）在“锻炼达标”的学生中，按男女用分层抽样方法抽出 10 人，进行体育锻炼体会交流.

（i）求这 10 人中，男生、女生各有多少人？

（ii）从参加体会交流的 10 人中，随机选出 2 人发言，记这 2 人中女生的人数为X，求X的分布列和数学期望.

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

临界值表：

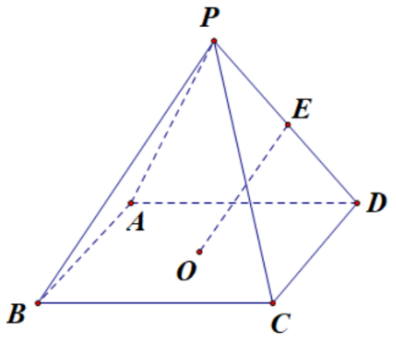
$P\left(K^2 \geq k_0\right)$	**0.10**	**0.05**	**0.025**	**0.010**
0 k_0	**2.706**	**3.841**	**5.024**	**6.635**

18.（12 分）已知动圆 M 恒过点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，且与直线 $y=-\dfrac{1}{2}$ 相切.

（1）求圆心 M 的轨迹 E 的方程；

（2）设 P 是轨迹 E 上横坐标为 2 的点，OP 的平行线 l 交轨迹 E 于 A，B 两点，交轨迹 E 在 P 处的切线于点 T，问：是否存在实常数 λ 使 $|PT|^2=\lambda|TA|\cdot|TB|$，若存在，求出 λ 的值；若不存在，说明理由.

19.（12 分）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，O 为其中心，$\triangle PAD$ 为锐角三角形，且平面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，E 为 PD 的中点，$CD\perp DP$.



（1）求证: OE P平面 PAB；

（2）求证: $CD\perp PA$.

20.（12 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2-(a+1)x+\ln x, a\in R$.

（1）当 $a=0$ 时，求曲线 $f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 的切线方程；

（2）讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

21.（12 分）已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右顶点分别为 A、B，焦距为 2，点 P 为椭圆上异于 A、B 的点，且直线 PA 和 PB 的斜率之积为 $-\dfrac{3}{4}$.

（1）求 C 的方程；

（2）设直线 AP 与 y 轴的交点为 Q，过坐标原点 O 作 $OM//AP$ 交椭圆于点 M，试探究 $\dfrac{|AP|\cdot|AQ|}{|OM|^2}$

是否为定值，若是，求出该定值；若不是，请说明理由.

22．（10 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，直线 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$ 过椭圆 C 的右焦点 F ,过 F 的直线 m 交椭圆 C 于 M,N 两点(均异于左、右顶点).

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）已知直线 $l:x=4$, A 为椭圆 C 的右顶点. 若直线 AM 交 l 于点 P ，直线 AN 交 l 于点 Q ，试判断 $(\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FQ})\cdot\overrightarrow{MN}$ 是否为定值，若是，求出定值；若不是，说明理由.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**D**

【解析】

根据双曲线定义可以直接求出 a ，利用勾股定理可以求出 c ，最后求出离心率.

【详解】

依题意得，$2a=|PF_2|-|PF_1|=1$ ，$|F_1F_2|=\sqrt{|PF_2|^2+|PF_1|^2}=5$ ，因此该双曲线的离心率

$$e=\frac{|F_1F_2|}{|PF_2|-|PF_1|}=5.$$

【点睛】

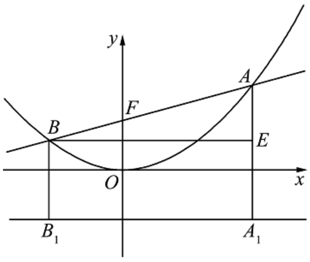
本题考查了双曲线定义及双曲线的离心率，考查了运算能力.

2、**C**

【解析】

作 $AA_1\perp l$ ，$BB_1\perp l$ ；$BE\perp AA_1$ ，由题意 $\sin\alpha=\dfrac{AE}{AB}$ ，由二倍角公式即得解.

【详解】



由题意，$F\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$，准线$l$：$y=-\dfrac{p}{2}$，

作$AA_1\perp l$，$BB_1\perp l$；$BE\perp AA_1$，

设$|BF|=|BB_1|=t$，

故$|AB|=|AA_1|=2t$，$|AE|=t$，

$\sin\alpha=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\dfrac{7}{9}$.

故选：**C**

【点睛】

本题考查了抛物线的性质综合，考查了学生综合分析，转化划归，数学运算的能力，属于中档题.

3、**A**

【解析】

由函数$f(x)=\begin{cases}2^x-x^3,x\le0\\ \ln x,x>0\end{cases}$，求得$f(\dfrac{1}{e})=\ln\dfrac{1}{e}=-1$，进而求得$f(f(\dfrac{1}{e}))$的值，得到答案.

【详解】

由题意函数$f(x)=\begin{cases}2^x-x^3,x\le0\\ \ln x,x>0\end{cases}$，

则$f(\dfrac{1}{e})=\ln\dfrac{1}{e}=-1$，所以$f(f(\dfrac{1}{e}))=f(-1)=2^{-1}-(-1)^3=\dfrac{3}{2}$，故选**A.**

【点睛】

本题主要考查了分段函数的求值问题，其中解答中根据分段函数的解析式，代入求解是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题.

4、**A**

【解析】

根据抛物线的性质求出点P坐标和焦点F坐标，进而求出点M的坐标，代入斜率公式即可求解.

【详解】

设点 P 的坐标为 $\left(x_0, y_0\right), y_0>0$，

由题意知，焦点 $F\left(1,0\right)$,准线方程 $l: x=-1$，

所以 $\left|PM\right|=x_0+1=5$，解得 $x_0=4$，

把点 $P\left(4, y_0\right)$ 代入抛物线方程可得，

$y_0=\pm 4$，因为 $y_0>0$，所以 $y_0=4$，

所以点 M 坐标为 $\left(-1,4\right)$，

代入斜率公式可得，$k_{MF}=\dfrac{4-0}{-1-1}=-2$.

故选：A

【点睛】

本题考查抛物线的性质，考查运算求解能力；属于基础题.

5、B

【解析】

由 $f\left(x\right)=0$，解得 $x^2-ax=0$，即 $x=0$ 或 $x=a$，$\because a>0, \therefore$ 函数 $f\left(x\right)$ 有两个零点，$\therefore A, C$，不正确，设 $a=1$，

则 $f\left(x\right)=\left(x^2-x\right)e^x, \therefore f'\left(x\right)=\left(x^2+x-1\right)e^x$，由 $f'\left(x\right)=\left(x^2+x-1\right)e^x>0$，解得 $x>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $x<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$，

由 $f'\left(x\right)=\left(x^2-1\right)e^x<0$，解得：$-\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，即 $x=-1$ 是函数的一个极大值点，$\therefore$ D 不成立，排除 D，故选 **B.**

【方法点睛】本题通过对多个图象的选择考察函数的解析式、定义域、值域、单调性，导数的应用以及数学化归思想，属于难题.这类题型也是近年高考常见的命题方向，该题型的特点是综合性较强较强、考查知识点较多，但是并不是无路可循.解答这类题型可以从多方面入手，根据函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、特殊点以及 $x\to 0^+, x\to 0^-, x\to +\infty, x\to -\infty$ 时函数图象的变化趋势，利用排除法，将不合题意选项一一排除.

6、A

【解析】

利用逐一验证的方法进行求解.

【详解】

若甲预测正确，则乙、丙预测错误，则甲比乙成绩高，丙比乙成绩低，故 **3** 人成绩由高到低依次为甲，乙，丙；若乙预测正确，则丙预测也正确，不符合题意；若丙预测正确，则甲必预测错误，丙比乙的成绩高，乙比甲成绩高，即丙比甲，乙成绩都高，即乙预测正确，不符合题意，故选 **A**.

【点睛】

本题将数学知识与时政结合，主要考查推理判断能力．题目有一定难度，注重了基础知识、逻辑推理能力的考查．

7、**A**

【解析】

由已知可得到直线 $2bx-ay=0$ 的倾斜角为 $45°$，有 $\dfrac{2b}{a}=1$，再利用 $a^2=b^2+c^2$ 即可解决.

【详解】

由 F 到直线 $2bx-ay=0$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}c$，得直线 $2bx-ay=0$ 的倾斜角为 $45°$，所以 $\dfrac{2b}{a}=1$，

即 $4\left(a^2-c^2\right)=a^2$，解得 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：**A.**

【点睛】

本题考查椭圆离心率的问题，一般求椭圆离心率的问题时，通常是构造关于 a,b,c 的方程或不等式，本题是一道容易题.

8、**C**

【解析】

写出命题“假设 $n=k\left(k\in N^*\right)$ 时该命题成立，则 $n=k+1$ 时该命题也成立”的逆否命题，结合原命题与逆否命题的真假性一致进行判断.

【详解】

由逆否命题可知，命题“假设 $n=k\left(k\in N^*\right)$ 时该命题成立，则 $n=k+1$ 时该命题也成立”的逆否命题为“假设当 $n=k+1\left(k\in N^*\right)$ 时该命题不成立，则当 $n=k$ 时该命题也不成立”，

由于当 $n=7$ 时，该命题不成立，则当 $n=6$ 时，该命题也不成立，故选：**C.**

【点睛】

本题考查逆否命题与原命题等价性的应用，解题时要写出原命题的逆否命题，结合逆否命题的等价性进行判断，考查逻辑推理能力，属于中等题.

9、**A**

【解析】

由题先画出基本图形，结合向量加法和点乘运算化简可得

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=\left[\overrightarrow{O_1O_2}+\left(\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}\right)\right]\cdot\left[\overrightarrow{O_1O_2}-\left(\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}\right)\right]=9-\left|\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}\right|^2$，结合$\left|\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}\right|$的范围即可求解

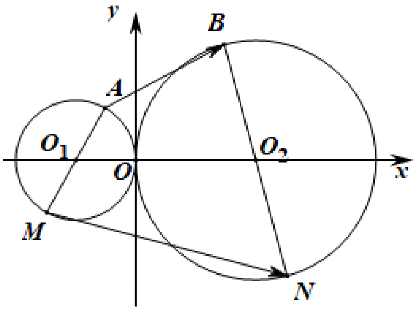
【详解】

如图，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2B}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2N}\right)=\left[\overrightarrow{O_1O_2}+\left(\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}\right)\right]\cdot\left[\overrightarrow{O_1O_2}-\left(\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}\right)\right]$

$=\left|\overrightarrow{O_1O_2}\right|^2-\left|\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}\right|^2=9-\left|\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}\right|^2$其中$\left|\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_2B}\right|\in\left[2-1,2+1\right]=\left[1,3\right]$，所以

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}\in\left[9-3^2,9-1^2\right]=\left[0,8\right]$.



故选：A

【点睛】

本题考查向量的线性运算在几何中的应用，数形结合思想，属于中档题

10、A

【解析】

由奇函数定义求出$f(0)$和$f(-2)$.

【详解】

因为$f(x)$是定义在$\left[-2,2\right]$上的奇函数，$\therefore f(0)=0$.又当$x\in\left(0,2\right]$时，

$f(x)=2^x-1,\therefore f\left(-2\right)=-f\left(2\right)=-\left(2^2-1\right)=-3$，$\therefore f\left(-2\right)+f\left(0\right)=-3$.

故选：A.

【点睛】

本题考查函数的奇偶性，掌握奇函数的定义是解题关键.

11、C

【解析】

因为$C=\dfrac{2\pi}{3}$，$c=1$，所以根据正弦定理可得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，所以$a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin A$，$b=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin B$，所以

$z=b+\lambda a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin B+\dfrac{2\lambda}{\sqrt{3}}\sin A=\dfrac{2}{\sqrt{3}}[\sin B+\lambda\sin(\dfrac{\pi}{3}-B)]=\dfrac{2}{\sqrt{3}}[(1-\dfrac{\lambda}{2})\sin B+$

$\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}\cos B]=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(1-\frac{\lambda}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}\lambda}{2})^2}\sin(B+\phi)$，其中 $\tan\phi=\frac{\sqrt{3}\lambda}{2-\lambda}$，$0<B<\frac{\pi}{3}$，

因为 $z=b+\lambda a$ 存在最大值，所以由 $B+\phi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，可得 $2k\pi+\frac{\pi}{6}<\phi<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

所以 $\tan\phi>\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\frac{\sqrt{3}\lambda}{2-\lambda}>\frac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $\frac{1}{2}<\lambda<2$，所以正数 λ 的取值范围为 $(\frac{1}{2},2)$，故选 **C**.

12、**C**

【解析】

由 $M\cap N=M$ 得出 $M\subseteq N$，利用集合的包含关系可得出实数 a 的取值范围.

【详解】

Q $M=\{x|1<x\le 2\}$，$N=\{x|x<a\}$ 且 $M\cap N=M$，$\therefore M\subseteq N$，$\therefore a>2$.

因此，实数 a 的取值范围是 $(2,+\infty)$.

故选：**C.**

【点睛】

本题考查利用集合的包含关系求参数，考查计算能力，属于基础题.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、$(0,\frac{\sqrt{6}}{2}]$(或写成 $(0,\frac{\sqrt{6}}{2})$) $\frac{1}{8}$

【解析】

试题分析：设 $AB=x$，取 AB 中点 M,则 $CM\perp AB,DM\perp AB$,因此 $AB\perp$ 面 CDM ,所以

$F(x)=\frac{1}{3}\cdot x\cdot S_{\Delta CDM}=\frac{1}{3}\cdot x\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{12}\sqrt{3x^2-x^4}$，$x\in(0,\sqrt{3})$，因为 $y=3t-t^2,t\in(0,3)$ 在 $(0,\frac{3}{2})$ 单调递增，

最大值为 $\frac{9}{4}$，所以 $F(x)$ 单调增区间是 $(0,\frac{\sqrt{6}}{2})$，最大值为 $\frac{1}{8}$

考点：函数最值，函数单调区间

14、**2**

【解析】

先由题意列出关于 a_1,q 的方程，求得 $\{a_n\}$ 的通项公式，再表示出 $(a_1a_2)\cdot(a_2a_3)\cdot$ L $\cdot(a_na_{n+1})$ 即可求解.

【详解】

解：设 $\{a_n\}$ 公比为 q，且 $q>0$，