第四章 湍流流动

一、关于湍流流动的基本概念

当流体在高速流动时，流体质点不仅在流动方向上运动，而且在垂直于流动方向的方向上存在着运动。这造成质点的流线和迹线十分复杂，难以用数学式简单的描述。该流动状态称为湍流。

1、临界雷诺准数

当$R_e<2000$时，流体呈层流，

当$R_e>4000$时，流体呈湍流。

$R_{ec}=4000$——定义为湍流流动的下限，即临界雷诺准数。

2、时均量与脉动量

在湍流中任一点的流动参数（速度、压力），其大小和方向（速度）随时间在无规则的变动。严格的讲，湍流中根本不存在稳定状态。通过取一定时间段中的平均值（时均值）作为其参数值。

X方向上的时均速度定义为：

$$\overline{u_x} = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} u_x d\theta$$

时均压力定义为：

$$\overline{p} = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} p dx$$

式中： $\overline{u_x}$， $\overline{p}$ 为时间θ内的时均值。

$\boldsymbol{u_x}$，$\boldsymbol{P}$为瞬时速度及压力，是时间的函数。

瞬时参数值等于时均值与脉动值之和。

如：
$$\begin{cases} u_x = \overline{u_x} + u_x' \\ u_y = \overline{u_y} + u_y' \\ u_z = \overline{u_z} + u_z' \\ p = \overline{p} + p' \end{cases}$$

u_x', u_y', u_z' ——脉动速度分量;

p' ——脉动压强.

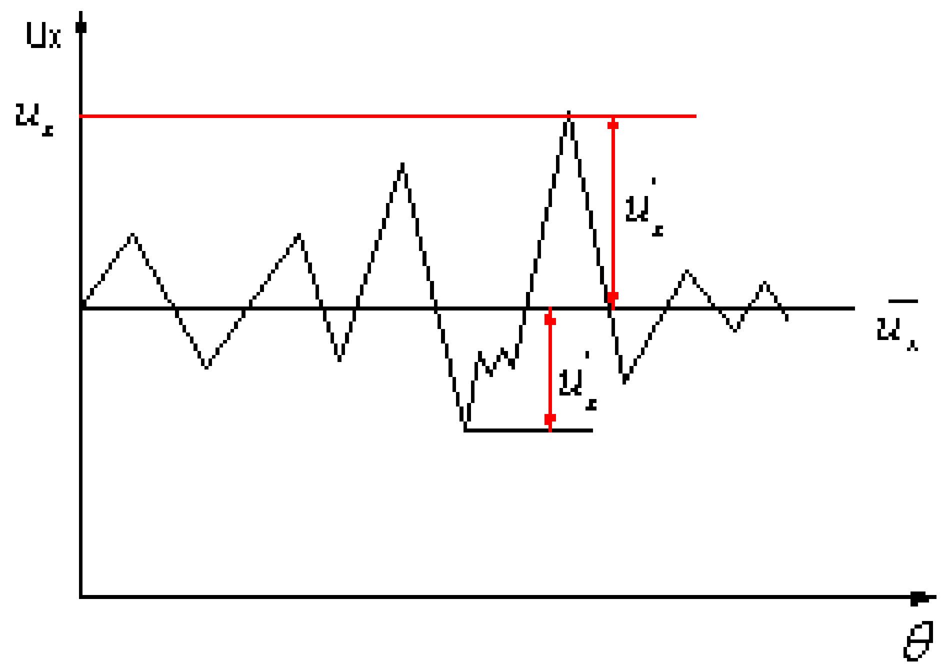
根据以上定义，在时间θ内脉动值的平均值应为零，即：

$$\overline{u_x'} = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} u_x' d\theta = 0$$

同理： $\overline{u_y'} = \overline{u_z'} = \overline{p'} = 0$

脉动值有正、负之分，其总和为零。

通常所指的稳态流动是指平均值不随时间变化。



3、湍流时的连续性方程

对于不可压缩性流体，其连续性方程为：

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

$$\because\ u_x=\overline{u_x}+u_x',\ u_y=\overline{u_y}+u_y',\ u_z=\overline{u_z}+u_z'$$

∴代入连续性方程中，有：

$$\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{u_y}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{u_z}}{\partial z}+\frac{\partial u_x'}{\partial x}+\frac{\partial u_y'}{\partial y}+\frac{\partial u_z'}{\partial z}=0$$

经过推导整理可得：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+\dfrac{\partial u_z}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial \overline{u}_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \overline{u}_y}{\partial y}+\dfrac{\partial \overline{u}_z}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial u_x'}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y'}{\partial y}+\dfrac{\partial u_z'}{\partial z}=0 \end{cases}$$

时均速度，瞬时速度，脉动速度分量均符合连续性方程。

4.湍流时的微分动量衡算方程

X方向的微分动量衡算方程

$$\rho\frac{Du_x}{D\theta}=\rho X+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial\theta}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)=\rho X+\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)\qquad\text{——（1）}$$

又∵ $$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

上式两边同乘 ρu_x，有：$$\rho u_x\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=0\qquad\text{——（2）}$$

(1)+(2)得：

$$\rho\frac{\partial u_x}{\partial\theta}+2\rho u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+\rho\left(u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)+\rho\left(u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$$

$$=\rho X+\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)$$

上式可改写为：

$$\rho\frac{\partial u_x}{\partial\theta}+\rho\frac{\partial u_x^2}{\partial x}+\rho\frac{\partial\left(u_y u_x\right)}{\partial y}+\rho\frac{\partial\left(u_z u_x\right)}{\partial z}=\rho X+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}$$

——（3）

或改写为：

$$\rho\frac{\partial u_x}{\partial\theta}=\rho X+\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xx}-\rho u_x^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{yx}-\rho u_y u_x\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau_{zx}-\rho u_z u_x\right)$$

——（4）

ρX -——质量力

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xx}-\rho u_x^2\right)$ ——法向应力

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{yx}-\rho u_y u_x\right)$ ——x方向切向应力（作用面垂直于y）

$\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau_{zx}-\rho u_z u_x\right)$ ——x方向切向应力（作用面垂直于z）

对上式各项取时均值：

① $$\frac{\overline{\partial u_x}}{\partial \theta}=\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial \theta}=0$$

稳定流动，时均速度 $\overline{u}_x$ 不随时间变化

② $$\frac{\overline{\partial \tau_{xx}}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\overline{\tau_{xx}}$$

③ $$\frac{\overline{\partial u_x^2}}{\partial x}=\frac{\partial \overline{u_x^2}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{u_x'^2}}{\partial x}$$

$$\frac{\overline{\partial \tau_{yx}}}{\partial y}=\frac{\partial \overline{\tau_{yx}}}{\partial y}$$

④同理：$$\frac{\partial \overline{\tau_{zx}}}{\partial z}=\frac{\partial \overline{\tau_{zx}}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \overline{u_z u_x}}{\partial z}=\frac{\partial\left(\overline{u_z}\,\overline{u_x}\right)}{\partial z}+\frac{\partial\left(\overline{u_z' u_x'}\right)}{\partial z}$$

以上各式代入（4）式有：

$$0=\rho X+\frac{\partial \overline{\tau_{xx}}}{\partial x}-\rho\frac{\partial \overline{u_x}^2}{\partial x}-\rho\frac{\partial \overline{u_x'^2}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{\tau_{yx}}}{\partial y}-\rho\frac{\partial\left(\overline{u_y}\,\overline{u_x}\right)}{\partial y}-\rho\frac{\partial \overline{u_y' u_x'}}{\partial y}$$

$$+\frac{\partial \overline{\tau_{zx}}}{\partial z}-\rho\frac{\partial\left(\overline{u_z}\,\overline{u_x}\right)}{\partial z}-\rho\frac{\partial \overline{u_z' u_x'}}{\partial z}$$

或：

$$\rho\frac{\partial\overline{u_x^2}}{\partial x}+\rho\frac{\partial\overline{u_y}\,\overline{u_x}}{\partial y}+\rho\frac{\partial\overline{u_z}\,\overline{u_x}}{\partial z}$$

$$=\rho X+\left(\frac{\partial\overline{\tau_{xx}}}{\partial x}-\rho\frac{\partial\overline{u_x'^2}}{\partial x}\right)$$ （——法向应力）

$$+\left(\frac{\partial\overline{\tau_{yx}}}{\partial y}-\rho\frac{\partial\overline{u_y'u_x'}}{\partial y}\right)$$ （——切向应力）

$$+\left(\frac{\partial\overline{\tau_{zx}}}{\partial z}-\rho\frac{\partial\overline{u_z'u_x'}}{\partial z}\right)$$ （——切向应力）

——湍流时的x方向动量衡算方程

令：
$$\begin{cases}\overline{\tau^t_{xx}} = \overline{\tau_{xx}} + \overline{\tau^r_{xx}} \\ \overline{\tau^t_{yx}} = \overline{\tau_{yx}} + \overline{\tau^r_{yx}} \\ \overline{\tau^t_{zx}} = \overline{\tau_{zx}} + \overline{\tau^r_{zx}}\end{cases}$$
及
$$\begin{cases}\overline{\tau^r_{xx}} = -\rho \overline{u'^2_x} \\ \overline{\tau^r_{yx}} = -\rho \overline{u'_y u'_x} \\ \overline{\tau^r_{zx}} = -\rho \overline{u'_z u'_x}\end{cases}$$
湍流应力的定义式

上述式中的“负”号表示 u'_x 与 u'_y 的方向相反，即脉动方向相反.

动量衡算方程为：

$$\rho \frac{\partial \overline{u_x}^2}{\partial x} + \rho \frac{\partial \overline{u_y}\,\overline{u_x}}{\partial y} + \rho \frac{\partial \overline{u_z}\,\overline{u_x}}{\partial z} = \rho X + \frac{\partial \overline{\tau^t_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau^t_{yx}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\tau^t_{zx}}}{\partial z}$$

—— （5）

$\overline{\tau_{xx}^{t}}$ ——湍流流动时x方向总法向应力。

$\overline{\tau_{xx}^{r}}$ ——涡流粘性产生的附加法向应力。

$\overline{\tau_{xx}^{t}}, \overline{\tau_{yx}^{t}}, \overline{\tau_{zx}^{t}}$ ——湍流时，总时均法向、切向应力的平均值。

$\overline{\tau_{xx}}, \overline{\tau_{yx}}, \overline{\tau_{zx}}$ ——湍流时，法向、切向应力的时均值。（相当于层流时的应力值）

$\overline{\tau_{xx}^{r}}, \overline{\tau_{yx}^{r}}, \overline{\tau_{zx}^{r}}$ ——脉动速度产生的法向、切向应力时均值。（或附加应力时均值）