

本科毕业论文（设计）

论文题目：多质点耦合振动的数值研究

摘 要

本文主要用数值方法研究多质点耦合振动的规律。为了系统地研究多质点耦合振动的规律，先从两个质点和三个质点的一维振动出发，通过解析求解牛顿方程得到少质点耦合振动的规律。再结合计算机数值计算得到少质点耦合振动规律，并与解析解的结果比较。在研究多质点耦合振动的规律时，无法解析求解牛顿方程，只能采用数值方法求解牛顿方程。并且，采用傅里叶变换对结果进行分析得到了多质点耦合振动规律。在进行傅里叶变换时，发现程序运行时间过长并且存在旁瓣结构。最后，引入快速傅里叶变换对数值结果进行分析，发现快速傅里叶变换可以有效地缩短计算时间以及减小旁瓣对分析功率谱的影响。

关键词：耦合振动；数值研究；牛顿方程；傅里叶变换

论文类型：D 理论研究

Abstract

In this paper, the laws of multi-mass point coupled vibration are mainly studied numerically. In order to systematically study the laws of multi-mass point coupled vibration, the laws of few-mass point coupled vibration are firstly obtained by solving Newton's equation analytically from the one-dimensional vibration of two and three masses. Then, we combine with the computer numerical calculation to obtain the law of coupled vibration of few masses and compare it with the result of analytical solution. In the study of the law of multi-mass point coupled vibration, it is impossible to solve Newton's equation analytically, and only numerical method can be used to solve Newton's equation. Moreover, the Fourier transform is used to analyze the results and obtain the multi-mass point coupled vibration law. When the Fourier transform was performed, it was found that the program took too long to run and there was a side valve structure. Finally, the fast Fourier transform was introduced to analyze the numerical results, and it was found that the fast Fourier transform can effectively shorten the computation time and reduce the influence of the side flaps on the analyzed power spectrum.

Key Words: coupled vibration; numerical study; Newton's equation; Fourier transform

目 录

摘 要	1
Abstract	2
目 录	3
引言	1
1 Mathematica 介绍	2
2 少质点的耦合振动	3
2.1 两个质点的一维振动	3
2.2 三个质点的一维振动。	4
3 傅里叶变换	8
3.1 傅里叶变换的含义	8
3.2 三个质点的傅里叶变换	10
4 多质点耦合振动	12
4.1 大型微分方程组的书写	12
4.2 多质点耦合振动的傅里叶变换	12
4.3 多质点耦合振动的快速傅里叶变换	15
结论与展望	19
参考文献	20
致谢	21
附录	22

引言

质点耦合振动是指由两个或多个质量相连的物体在相对静止状态下，当其中一个物体受到外力扰动时，会引起另一个物体发生振动，并通过它们的耦合作用相互影响。在19世纪末20世纪初，当时的科学家已经开始了对振动现象的深入研究。经过多年的研究发现，很多振动系统不仅仅是单个质点的简谐振动，而是由多个质点组成的复杂耦合振动系统。随着科技的发展和进步，人们发现振动问题的研究变得越来越重要。目前，质点耦合振动的研究已经进入了一个较为成熟的阶段。在机械工程领域，人们已经对于质点耦合振动的机理、特性、控制等方面做出了一系列的探索和研究。此外，还涌现出了许多优秀的解决方案和理论模型，如有限元分析^[1]、模态分析^[2]等。在土木工程领域，质点耦合振动同样具有广泛的应用。人们通过研究地震波传播和结构响应等问题，进一步深化了对于质点耦合振动的认识^[3]。同时，基于该领域研究成果，针对地震发生时的安全性、建筑结构的设计及改善已经形成了一系列有效的措施与方法^[4]。在电子工程领域，质点耦合振动讨论的主要是微纳米尺度下的振动问题^[5]，在无线网络中的应用和传感器网络中的节点定位等方面也得到了深入研究和应用。在一维耦合振动中，有流体流动的管道的振动，是典型的一维流固耦合振动^[6]。综上所述，质点耦合振动这种振动模式在很多领域都有重要的应用，这些应用不仅改善了现有耦合振动系统的性能和稳定性，同时也促进了相关领域的技术和理论发展^[7-12]。

质点耦合振动也是物理学中的一个基础问题，研究质点耦合振动可以帮助人们更深入地理解振动现象。在本文中研究的就是质点耦合振动在物理学中的基础问题。利用 **Mathematica** 软件，运用相关的 **Mathematica** 函数命令，先研究两个质点和三个质点组成的一维振动链的运动情况，得出两个质点和三个质点耦合振动时的圆频率。在研究三个质点的一维振动时，发现在多体耦合振动时系统存在合作运动的基本模式。通过傅里叶变换得到功率谱，将这种合作运动的基本模式用功率谱更加形象地表现出来。在研究多质点耦合振动时，通过对第一个质点和最后一个质点的振动位移进行傅里叶变换，从而得到多质点耦合振动的规律。实际上，傅里叶变换的运行时间过长并且存在旁瓣结构。最后，引入快速傅里叶变换对数值结果进行分析，发现快速傅里叶变换可以有效地缩短计算时间以及减小旁瓣对分析功率谱的影响。

1 Mathematica 介绍

Mathematica 是一款科学计算软件，很好地结合了数值和符号计算引擎、图形系统、编程语言、文本系统、和与其他应用程序的高级连接。很多功能在相应领域内处于世界领先地位，它也是使用最广泛的数学软件之一^[13]。Mathematica 的发布标志着现代科技计算的开始。Mathematica 是世界上通用计算系统中最强大的系统。自从 1988 发布以来，它已经对如何在科技和其它领域运用计算机产生了深刻的影响。Mathematica 和 MATLAB、Maple 并称为三大数学软件。Mathematica 是世界级的队伍组成开发的软件，从刚开始主要用于数学和科技计算的系统到发展成许多计算领域的主要力量，Mathematica 已经成为世界上最强大的通用计算系统^[14]。

人们常说，Mathematica 的发布标志着现代科技计算的开始。自从上世纪六十年代以来，在数值、代数、图形、和其它方面一直有个别的软件包存在。但是，Mathematica 的基本概念是用一个连贯的和统一的方法创造一个能适用于科技计算各个方面的软件系统。实现这一点的关键之处是发明了一种新的计算机符号语言。满足科技计算的广泛性，这在人类历史上还是第一次。

最初，Mathematica 的影响主要限于物理学、工程学、和数学领域。但是，随着时间的推移，Mathematica 在许多重要领域得到了广泛的应用。现在，它已经被应用于科学的各个领域——物理、生物、社会学、和其它。它在许多重要的发现中扮演着关键的角色，并是许多科技文章的基础。在工程中，Mathematica 已经成为开发和制造的标准。世界上许多重要的新产品在它们的设计某一阶段或其它阶段都依靠了 Mathematica 的帮助。在商业上，Mathematica 在复杂的金融模型中扮演了重要的角色，广泛地应用于规划和分析。同时，Mathematica 也被广泛应用于计算机科学和软件发展：它的语言元件被广泛地用于研究、原型、和界面环境。Mathematica 的用户群中最主要的是科技工作者和其它专业人士，Mathematica 还被广泛地用于教学中。数学中的许多计算是非常繁琐的，特别是函数的作图费时又费力，而且所画的图形很不规范，所以现在流行用 Mathematica 符号计算系统进行学习，从高中到研究生院的数以百计的课程都使用它，很多问题便迎刃而解^[15]。此外，伴随着学生版的出现，Mathematica 已经在全世界的学生中流行了起来，成为了一个著名的工具。

本文主要运用 Mathematica 软件和 Mathematica 函数命令研究质点耦合振动规律。

2 少质点的耦合振动

耦合振动是两个或多个系统受到力的作用而相互影响时的振动^[16]。在本节中要得出两个质点和三个质点的振动规律。假设相邻的质点之间存在弹性力，而不相邻的质点间没有受到力的作用。令质点的质量都为 1，倔强系数 k 为 5，质点的平衡距离 x_0 为 1。

2.1 两个质点的一维振动

由两个质点组成的一维振动系统如图 2.1 所示，两个振动质点都位于 x 轴上。设两个质点的平衡距离为 x_0 ，弹性力大小用胡克定律表示：

$$f = k\Delta x \quad (2.1)$$

式中， k 是倔强系数； Δx 是相对位置的变化。图 2.1 振动系统结合牛顿方程，可以写出两个质点的运动方程(2.2)：



图 2.1 两个质点的一维振动系统

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1 - x_0) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1 - x_0) \end{aligned} \quad (2.2)$$

m_1 和 m_2 是两个质点的质量^[17]。系统初始条件的选取要避免系统漂移，因为根据动量守恒定律，如果初始动量不为 0，系统整体就会漂移。由于两个质点的振动方程比较简单，可以解析求解，下面写一个程序，求解析解。（程序详情可见附录 1）。程序运行的图像(2.1)如下所示：

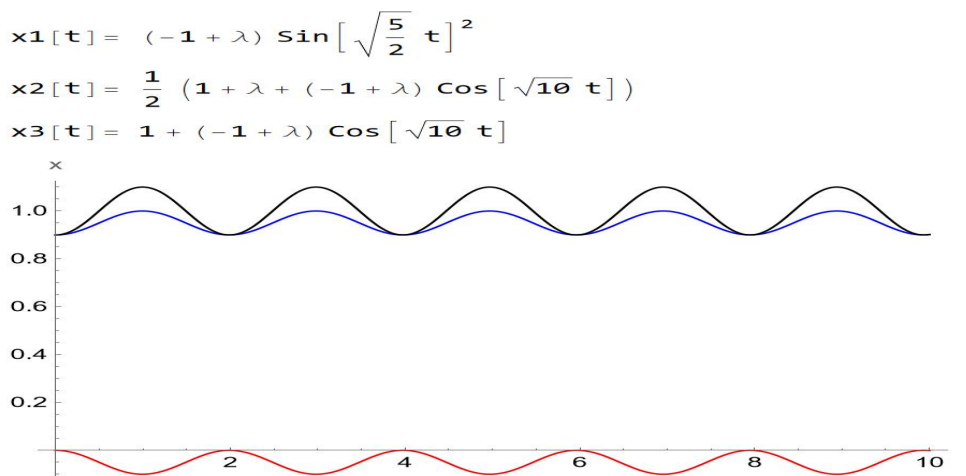


图 2.2 两个质点一维振动结果图

在方程的初始条件部分，质点都是静止的，因而总动量为 0，系统没有整体漂移。起初，质点 1 处于原点，而质点 2 处在 λx_0 ， λ 的具体值是在后面才赋予的，为了使系统振动起来， λ 不能为 1。解析求解的结果显示了三项，分别是 x_1, x_2 和 $x_2 - x_1$ ，后者是两质点的相对运动，用 x_3 表示。从显示的表达式可以看出，这三项都是单一频率的余弦函数，且频率相等，圆频率都是 $\sqrt{10}$ 。其中第一项可以用三角化简函数 `TriReduce[]` 来展开。

程序在最后对 λ 赋值，画出了这三项的时间变化图 `Out[9]`，红线、蓝线和黑线分别对应 x_1, x_2, x_3 它们以同样的频率振动，但是 x_1 和 x_2 的相位相反，而 x_2 和 x_3 相位相同。

2.2 三个质点的一维振动。

由三个质点组成的一维振动链如图 2.3 所示结合牛顿方程，可以写出三个质点的运动方程 (2.3)：



图 2.3 三个质点的一维振动系统

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1 - x_0) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1 - x_0) + k(x_3 - x_2 - x_0) \\ m_3 \ddot{x}_3 &= -k(x_3 - x_2 - x_0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

对该系统，先进行数值计算，因为结果容易得出，也比较直观。（程序详情可见附录 2）程序结果如图(2.2)所示：

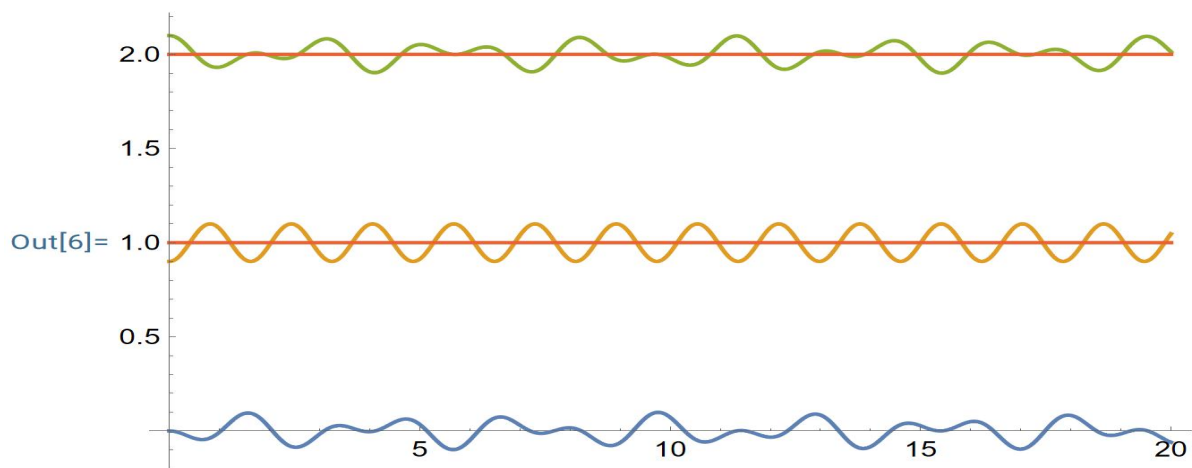


图 2.4 三个质点一维振动的数值解结果图

程序指定了三个质点的初始位置，再求出它们的位移函数之后，将三个位移函数在一张图上画出，并附上由 `Range[2]` 指定的两条水平线作为运动的参考位置。由 `Out[6]` 可以清楚的看见质点 2 的作有规则的余弦振动，而质点 1 和质点 3 都作不规则的振动。发现数值计算是容易得出也比较直观，但对系统中所表现出来的各种特征没有进行直观解释，所以来看一下三个质点振动系统的解析解。看看解析解能否将系统中所表现出来的特征直观解释。（程序详情可见附录 3）解析解如图 2.5 所示：

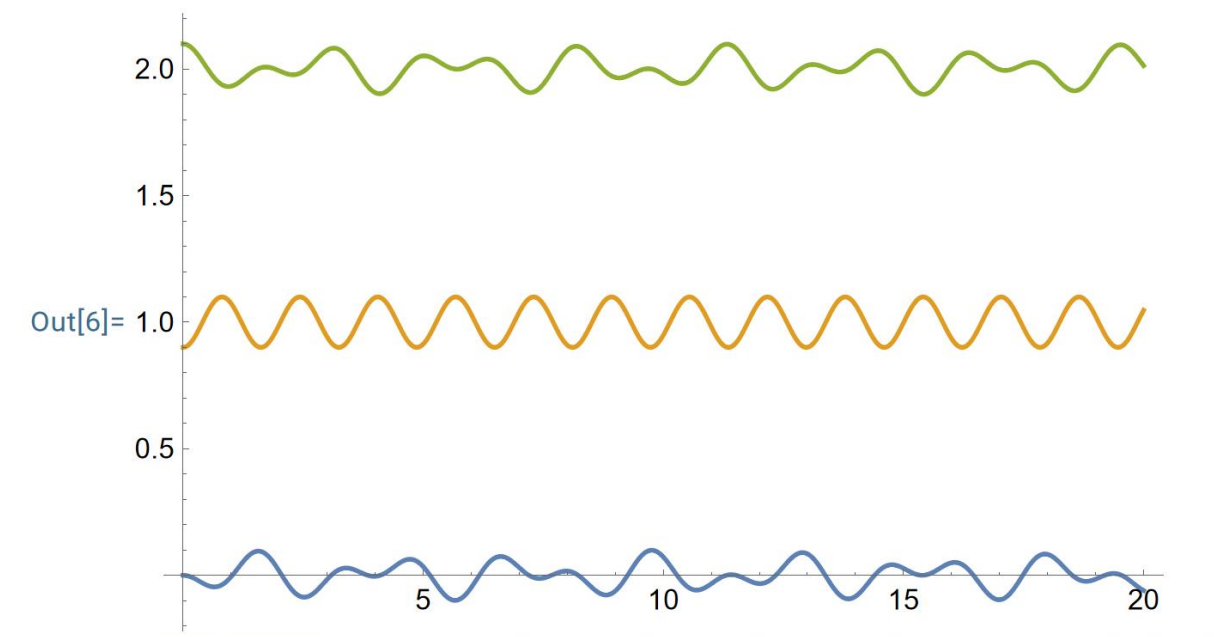


图 2.5 三个质点一维振动的解析解结果图

图 2.5 和图 2.4 基本相同，解析解并没有将振动系统中特征直观解释出来。为了达到直观解释的目的，下面进一步写出三质点振动系统包含初始位置的通解。（程序详情可见附录 4）程序所得结果如图 2.6 所示：

$$\begin{aligned}
 x_1[t] &= \frac{1}{6} \left(2(-3 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + 3(2 + \lambda_1 - \lambda_3) \cos[\sqrt{5} t] + (\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3) \cos[\sqrt{15} t] \right) \\
 x_2[t] &= \frac{1}{3} \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - (\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3) \cos[\sqrt{15} t] \right) \\
 x_3[t] &= \frac{1}{6} \left(2(3 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - 3(2 + \lambda_1 - \lambda_3) \cos[\sqrt{5} t] + (\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3) \cos[\sqrt{15} t] \right)
 \end{aligned}$$

图 2.6 三个质点一维振动的通解结果图

通过通解可以清楚的看见， x_2 是单一频率的 \cos 函数，而 x_1 和 x_3 都是两个频率的 \cos 函数，并且 x_1 和 x_3 两个频率不是有理数的关系，所合成的函数不具有周期性，看起来是

很紊乱的振动。

图 2.6 可以看到三个的质点初始位置由 λ_1 , λ_2 , λ_3 三个参数来决定, 三个位移函数的通解与它们有关, 通过程序结果可以看到:

当 $\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ 时, 三个位移函数中都不包含圆频率 $\sqrt{15}$ 。

当 $2 + \lambda_1 - \lambda_3 = 0$ 时, 第一和第三个位移函数都不包含圆频率 $\sqrt{5}$ 。

由此可见初始条件会影响系统的振动状态, 一些频率成分的出现或者不出现与质点的初始状态有关, 至于各个频率成分当然与系统的力学性质有关, 比如质量倔强系数等等。各个质点的位移函数所包括的频率成分不是由单个质点本身决定的, 而是所有函数合作运动的结果; 合作运动有多个模式, 每个模式对应一个频率成分。根据上面求解的结果, 探讨三质点振动系统的合作模式。当 $\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ 时, 质点 2 是不振动的, 质点 1 和质点 3 都与圆频率 $\sqrt{5}$ 振动, 但方向相反。这是一种基本的合作模式, 在这种模式下, 实际上相当于两个独立的谐振子在振动, 它们有共同的圆频率, 即

$$\omega_1 = \sqrt{k/m} = \sqrt{5/1} = \sqrt{5} \quad (2.4)$$

该模式的激发仅需要初始条件合适, 即起初释放是质点 1 和质点 3 对称地位于质点 2 的两边, 但二者不能刚好相距 $2x_0$ 。系统的另一种模式发生在 $2 + \lambda_1 - \lambda_3 = 0$ 时, 这时三个质点都以圆频率 $\sqrt{15}$ 振动, 只是质点 1 和质点 3 同向运动, 而质点 2 与它们反向运动, 这种模式的激发需要起初释放时质点 1 和质点 3 相距 $2x_0$, 而质点 2 不能在它们的中间。在后面的同步振动中质点 1 和质点 3 之间始终保持相距 $2x_0$ 。三个质点的振动的圆频率都是 $\sqrt{15}$, 不能如上面那样可以直观的求的, 下面用能量守恒的方式来间接证明这个频率。

因为动量守恒, 三个质点的质心不能移动, 质心位置可以设为 0。

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad (2.5)$$

因此这种模式又要求

$$x_3 - x_1 = 2x_0 \quad (2.6)$$

联立以上两式, 可得

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2 - x_0 \quad (2.7)$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}x_2 + x_0 \quad (2.8)$$

由此得出以下两个结论。

(1) 质点 1 与质点 3 运动同向，并都与质点 2 反相。

(2) 质点 1 和质点 3 的振幅只是质点 2 振幅的一半，同时运动速率也是后者的一半。

根据系统的能量是守恒的，能量表达式如下，替换成 x_2 表示。

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3m}{2}\right)\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{9k}{2}\right)x_2^2 + kx_0^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

这是一个谐振子的能量表达式，相当于振子的质量为 $3m/2$ ，倔强系数为 $9k/2$ 因此该振子的圆频率为

$$\omega_2 = \sqrt{(9k/2)/(3m/2)} = \sqrt{3k/m} = \sqrt{15} \quad (2.10)$$

这就是频率 $\sqrt{15}$ 的由来。

频率是合作运动的结果，合作运动有多个模式，每个模式对应一个频率成分。两个质点的一维振动系统有一个圆频率，三个质点的一维振动系统有两个圆频率，得出两个质点的一维振动模式数是 1 个，三个质点的一维振动模式数是 2 个。

3 傅里叶变换

从前面研究两个质点和三个质点的一维振动可以看出，在多体耦合振动的情况下，系统存在存在合作运动的基本模式，这些模式的数量将随着质点数目的增加而增加，单个振动体的运动就是这些基本模式的叠加。在质点的数目增加时，要逐个寻找耦合系统的基本模式是很困难的。基本合作模式是耦合系统的基本运动方式。为了更加直观的了解这些基本模式就要用到一种数学工具——傅里叶变换（Fourier）以及它的快速算法——快速傅里叶变换（FFT）。

3.1 傅里叶变换的含义

傅里叶变换的含义是：一个随时间变化的信号 $s(t)$ 可以用一系列频率不同的正弦信号的叠加来表示^[18]。其中频率为 ν 的成分的幅度可表示为

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \quad (3.1)$$

式中， i 是虚数因子； $S(\nu)$ 叫做信号 $s(t)$ 的频谱，它一般是个复函数。

在求得了频谱之后，可以计算另一个有用的量——能谱（功率谱），它的定义是

$$P(\nu) = |S(\nu)|^2 \quad (3.2)$$

其含义是频率为 ν 的成分的“能量”。这个“能量”不是物理上真正的能量，而是表示频率分量振幅的平方，是衡量不同成分贡献的一个方便的表示，有时它正比于某种真实的能量。

举一个例子：让三个不同频率，不同振幅，不同相位的正弦信号叠加起来。

$$s_1 = 2 \sin(2.3t - 0.4), s_2 = \sin(10t), s_3 = 1.5 \sin(11.5t)$$

他们都是有规则的正弦波只是振幅周期等不同把他们加起来形成叠加信号：

$$signal = s_1 + s_2 + s_3$$

对这个叠加信号做图。程序详情可见附录 5，结果如图 3.1 所示：

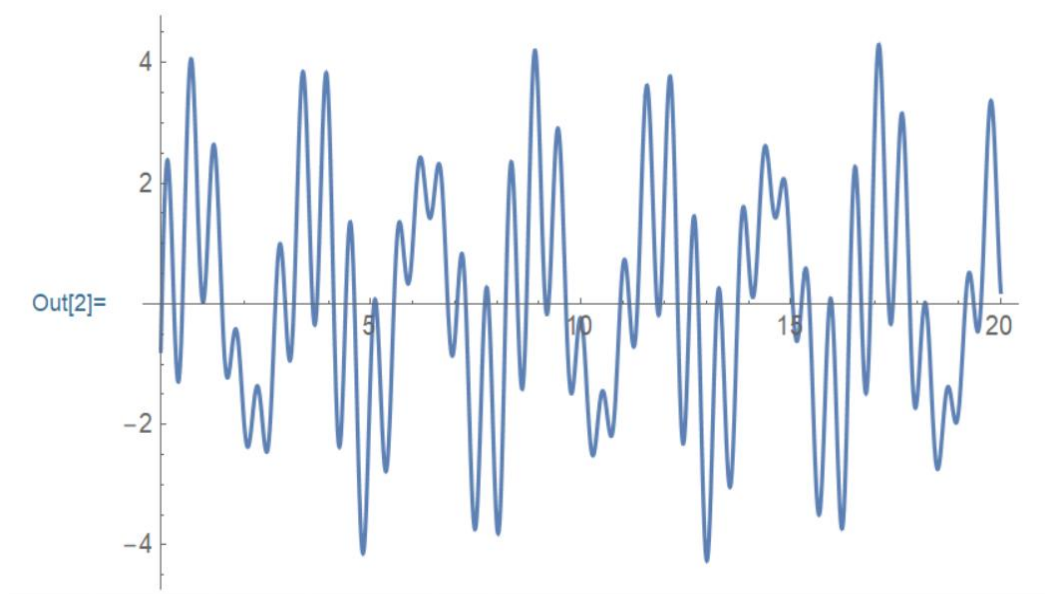


图 3.1 叠加信号一维振动图像

图 3.1 中的图形显然已经不是规则的正弦波了，甚至看不出它是周期性的波，这样的信号属于复杂信号。这个图形很好的表现了傅里叶变换的正结论。在研究多质点耦合振动时，要用到它的反结论：复杂信号能分解成不同频率的正弦信号的叠加。

进行傅里叶变换可以用公式（3.1），一般步骤是：

- (1) 给出要考察的频率 ν_1 。
- (2) 代入公式(3.1)进行无穷积分，得到分量振幅 $s(\nu_1)$ ；
- (3) 再给出要考察的频率 ν_2 。
- (4) 再带入公式(3.1)进行无穷积分，得另一个分量振幅 $s(\nu_2)$ ；

如此继续下去，直到不想考察了为止。在后面所给的信号其实是在有限的时间内计算出的信号，在此时间范围之外，没有给出信号，令这些没有给出的信号为 0。因此，无穷时间的积分其实就变成了有限时间的积分。

把公式（3.1）拆成实部和虚部分别计算，都是进行的实部计算。计算出两个部分之后，就能得到频谱和能谱。

在程序里，使用变量 `real` 和 `imaginary` 表示实部和虚部，计算公式如（3.3）所示：

$$\left[\begin{array}{l} real = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(2\pi vt) dt \\ imaginary = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(2\pi vt) dt \\ S(\nu) = real - imaginary \cdot i \\ P(\nu) = real + imaginary^2 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

以上进行傅里叶变换的方法属于直接算法，也简称为“硬算”。

3.2 三个质点的傅里叶变换

前面研究了由三个质点组成的一维振动链的运动问题，发现单个质点的振动是由若干合作模式的叠加形成的，合作模式是单一频率的正弦振动，单个质点的振动包含所有基本的合作模式，如果对于单个质点的振动进行傅里叶变换，应该能解析出这些基本模式。因为三个质点的一维振动模式在前面已经得到了准确的结果，那么就用三个质点一维振动来进行傅里叶变换。

三个质点的运动方程已经给出，下面就写程序用直接算法求质点1位移的功率谱。功率谱用来显示各个频率成分及其相对大小。(程序详情可见附录6)

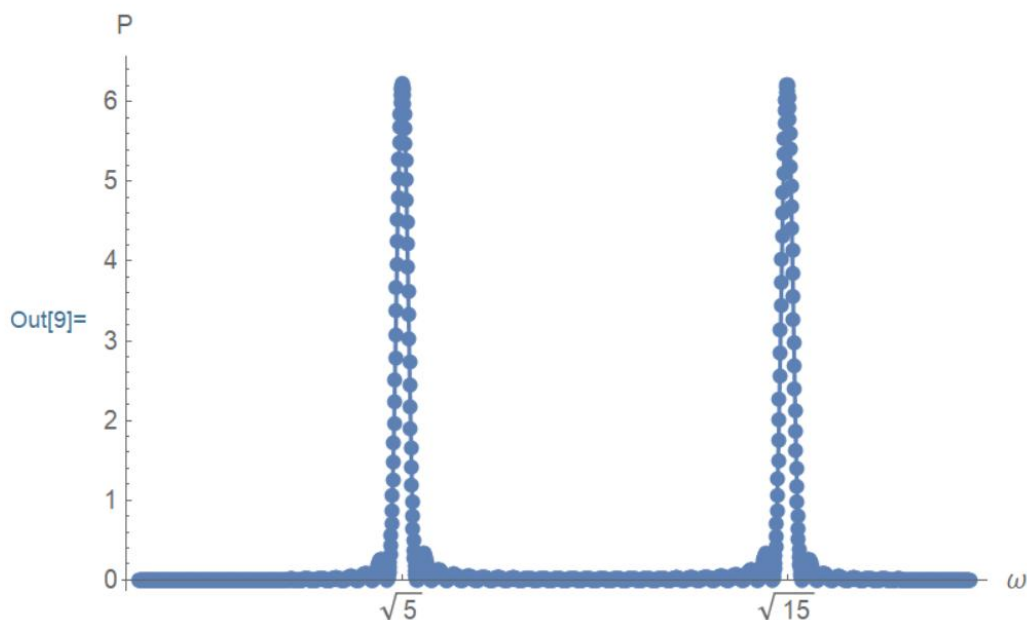


图 3.2 质点 1 位移的功率谱图

程序在选择的一段圆频率 $\omega_1 \sim \omega_3$ 范围内均匀选取了 $n=2000$ 个点，逐个计算对应的傅里叶变换，Out[9]就是计算出的功率谱 3.2。可以看出，两个标注的频率上出现了很

尖锐的峰，表明这里存在着对应的频率成分，两个峰值一样高，说明两个成分的频率一样大。在前面研究三个质点的一维振动时已经得到三个质点的一维振动有两种振动模式，而傅里叶变换很好的将这种基本模式解析了出来。

通过图像可以看到在频谱值的根部存在小的波动，或者叫谱峰的“旁瓣”。这些旁瓣结构的产生是因为程序在计算时采取了截断的措施造成的。又因为旁瓣结构主要分布在谱峰的附近，如果在这个范围内还有其他频率成分，就可能被旁瓣结构所干扰，影响研究功率谱，带来误判。

压缩“旁瓣”可以用公式（3.4）

$$(\nu_{n+1} - \nu_n)\tau \approx 1 \quad (3.4)$$

即求解时间 `time`。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/877131112046006051>