

江苏省天星湖中学 2024 年高考数学必刷试卷

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 一个由两个圆柱组合而成的密闭容器内装有部分液体，小圆柱底面半径为 r_1 ，大圆柱底面半径为 r_2 ，如图 1 放置容

器时，液面以上空余部分的高为 h_1 ，如图 2 放置容器时，液面以上空余部分的高为 h_2 ，则 $\frac{h_1}{h_2} = (\quad)$

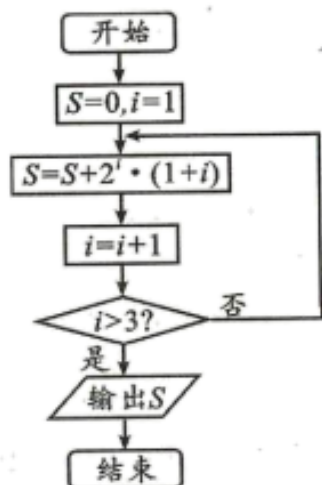


图 1



图 2

- A. $\frac{r_2}{r_1}$ B. $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$ C. $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$ D. $\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$
2. 已知数列 $\{a_n\}$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 有 $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)} + 1$ 成立，若 $a_1 = 1$ ，则 a_{10} 等于 ()
- A. $\frac{101}{10}$ B. $\frac{91}{10}$ C. $\frac{111}{11}$ D. $\frac{122}{11}$
3. 定义两种运算“ $\star$ ”与“ $\blacklozenge$ ”，对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ ，满足下列运算性质：① $2 \star 2018 = 1$ ， $2018 \blacklozenge 1 = 1$ ；② $(2n) \star 2018 = 2[(2n+2) \star 2018]$ ， $2018 \blacklozenge (n+1) = 2(2018 \blacklozenge n)$ ，则 $(2018 \blacklozenge 2020)(2020 \star 2018)$ 的值为()
- A. 2^{1011} B. 2^{1010} C. 2^{1009} D. 2^{1008}
4. 执行如图所示的程序框图，则输出 S 的值为 ()



- A. 16 B. 48 C. 96 D. 128

5. 设 x_1, x_2 为 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x - \cos\omega x (\omega > 0)$ 的两个零点, 且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 1, 则 $\omega =$ ()

- A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{4}$

6. 点 O 在 $\triangle ABC$ 所在的平面内, $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$, $|\vec{AB}| = 2$, $|\vec{AC}| = 1$, $\vec{AO} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC} (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$, 且 $4\lambda - \mu = 2 (\mu \neq 0)$, 则 $|\vec{BC}| =$ ()

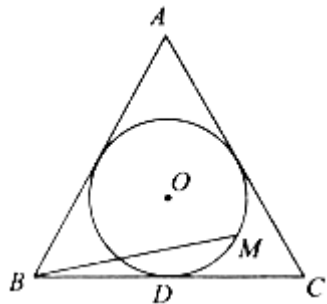
- A. $\frac{7}{3}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ C. 7 D. $\sqrt{7}$

7. 已知 $|2\vec{a} + \vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} \in [-4, 0]$, 则 $|\vec{a}|$ 的取值范围是 ()

- A. $[0, 1]$ B. $[\frac{1}{2}, 1]$ C. $[1, 2]$ D. $[0, 2]$

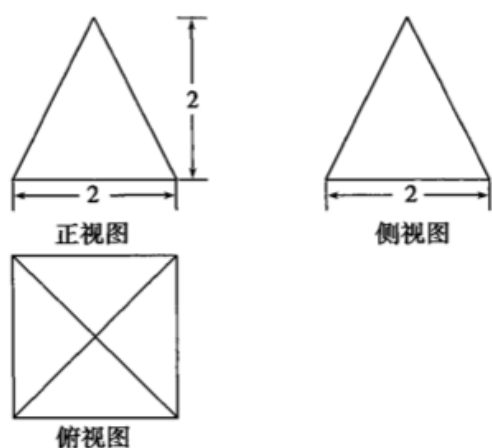
8. 如图, 圆 O 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形 ABC 的内切圆, 其与 BC 边相切于点 D , 点 M 为圆上任意一点,

$\vec{BM} = x\vec{BA} + y\vec{BD} (x, y \in \mathbb{R})$, 则 $2x + y$ 的最大值为 ()



- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

9. 某几何体的三视图如图所示（单位： cm ），则该几何体的表面积是()

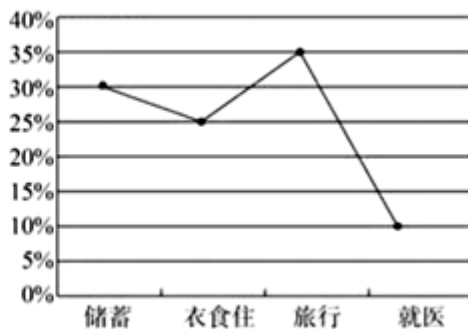
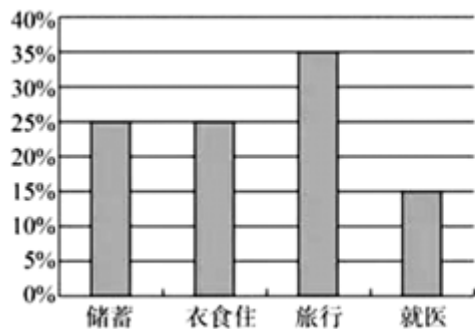


- A. $8cm^2$ B. $12cm^2$ C. $(4\sqrt{5}+2)cm^2$ D. $(4\sqrt{5}+4)cm^2$

10. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 相切，则双曲线的离心率为()

- A. 2 B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$

11. 若干年前，某教师刚退休的月退休金为 6000 元，月退休金各种用途占比统计图如下面的条形图.该教师退休后加强了体育锻炼，目前月退休金的各种用途占比统计图如下面的折线图.已知目前的月就医费比刚退休时少 100 元，则目前该教师的月退休金为()。



- A. 6500 元 B. 7000 元 C. 7500 元 D. 8000 元

12. 若 i 为虚数单位，则复数 $z = \frac{1+i}{1+2i}$ 在复平面上对应的点位于()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+1 \leq 0, \\ 3x-y-3 \leq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = 2x + y$ 的最大值为_____。

14. $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $2c \cos B = 2a + b$ ，则 $\angle C =$ _____。

15. 已知向量 $\vec{a} = (-4, 3)$, $\vec{b} = (6, m)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $m =$ _____.

16. 已知向量 $\vec{AB} = (1, 2)$, $\vec{AC} = (-3, 1)$, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} =$ _____.

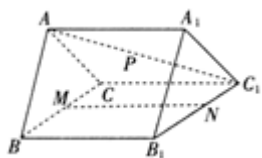
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知 $f(x) = |2x+3| - |2x-1|$.

(1) 求不等式 $f(x) < 2$ 的解集；

(2) 若存在 $x \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x) > |3a-2|$ 成立, 求实数 a 的取值范围

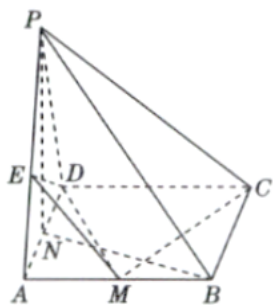
18. (12 分) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, $BC \perp BB_1$, $CC_1 = \sqrt{2}$, $AC_1 = \sqrt{6}$.



(1) 证明: 平面 $ABC \perp$ 平面 BB_1C_1C ;

(2) M , N 分别是 BC , B_1C_1 的中点, P 是线段 AC_1 上的动点, 若二面角 $P-MN-C$ 的平面角的大小为 30° , 试确定点 P 的位置.

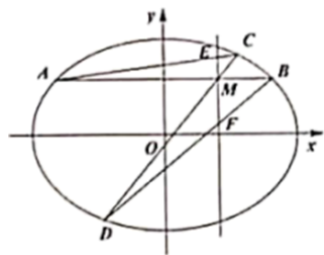
19. (12 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是正方形, $\triangle PAD$ 为等边三角形, M , N 分别是 AB , AD 的中点, 且平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.



(1) 证明: $CM \perp$ 平面 PNB ;

(2) 问棱 PA 上是否存在一点 E , 使 $PC \parallel$ 平面 DEM , 求 $\frac{PE}{EA}$ 的值

20. (12 分) 如图, 过点 $M(2, 2)$ 且平行与 x 轴的直线交椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = m (m > 0)$ 于 A , B 两点, 且 $\vec{AM} = 3\vec{MB}$.



(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 过点 M 且斜率为正的直线交椭圆于点 C, D , 直线 AC, BD 分别交直线 $x=2$ 于点 E, F , 求证: $\frac{1}{|ME|} - \frac{1}{|MF|}$

是定值.

21. (12 分) 在中国, 不仅是购物, 而且从共享单车到医院挂号再到公共缴费, 日常生活中几乎全部领域都支持手机支付. 出门不带现金的人数正在迅速增加. 中国人民大学和法国调查公司益普索合作, 调查了腾讯服务的 6000 名用户, 从中随机抽取了 60 名, 统计他们出门随身携带现金 (单位: 元) 如茎叶图所示, 规定: 随身携带的现金在 100 元以下 (不含 100 元) 的为“手机支付族”, 其他为“非手机支付族”.

男性		女性
0	3	5
7	4	0 8
8 8 5	5	3 5
2 0	6	0 5
8	7	0
3	8	5 5 8
0	9	5
8 5 0 0 0	10	0 0
9 8 2 2 0	11	5
5 0 0 0	12	0 8
5 5 4 2 0	13	0
6 6 1 0	14	5
5 4 3 2 0	15	6
5 0	16	

	男性	女性	合计
手机支付族			
非手机支付族			
合计			

(1) 根据上述样本数据, 将 2×2 列联表补充完整, 并判断有多大的把握认为“手机支付族”与“性别”有关?

(2) 用样本估计总体, 若从腾讯服务的用户中随机抽取 3 位女性用户, 这 3 位用户中“手机支付族”的人数为 ξ , 求随机变量 ξ 的期望和方差;

(3) 某商场为了推广手机支付, 特推出两种优惠方案, 方案一: 手机支付消费每满 1000 元可直减 100 元; 方案二: 手机支付消费每满 1000 元可抽奖 2 次, 每次中奖的概率同为 $\frac{1}{2}$, 且每次抽奖互不影响, 中奖一次打 9 折, 中奖两次打 8.5 折. 如果你打算用手机支付购买某样价值 1200 元的商品, 请从实际付款金额的数学期望的角度分析, 选择哪种优惠方案更划算?

附:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

22.（10 分）正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足： $S_n^2-(n^2+n-1)S_n-(n^2+n)=0$

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ；

(2)令 $b_n=\frac{n+1}{(n+2)^2a_n^2}$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，证明：对于任意的 $n\in N^*$ ，都有 $T_n<\frac{5}{64}$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、 B

【解析】

根据空余部分体积相等列出等式即可求解.

【详解】

在图 1 中，液面以上空余部分的体积为 $\pi r_1^2 h_1$ ；在图 2 中，液面以上空余部分的体积为 $\pi r_2^2 h_2$.因为 $\pi r_1^2 h_1 = \pi r_2^2 h_2$ ，所

$$\text{以}\frac{h_1}{h_2}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2.$$

故选：B

【点睛】

本题考查圆柱的体积，属于基础题.

2、 B

【解析】

观察已知条件，对 $a_{n+1}=a_n-\frac{1}{n(n+1)}+1$ 进行化简，运用累加法和裂项法求出结果.

【详解】

已知 $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)} + 1$ ，则 $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n(n+1)} + 1 = -(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) + 1 = 1 - (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ ，所以有 $a_2 - a_1 = 1 - (\frac{1}{1} - \frac{1}{2})$ ，

$$a_3 - a_2 = 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})，$$

$$a_4 - a_3 = 1 - (\frac{1}{3} - \frac{1}{4})，$$

┆

$$a_{10} - a_9 = 1 - (\frac{1}{9} - \frac{1}{10})，\text{两边同时相加得 } a_{10} - a_1 = 9 - (1 - \frac{1}{10})，\text{又因为 } a_1 = 1，\text{所以 } a_{10} = 1 + 9 - (1 - \frac{1}{10}) = \frac{91}{10}。$$

故选：B

【点睛】

本题考查了求数列某一项的值，运用了累加法和裂项法，遇到形如 $\frac{1}{n(n+1)}$ 时就可以采用裂项法进行求和，需要掌握数列中的方法，并能熟练运用对应方法求解。

3、B

【解析】

根据新运算的定义分别得出 $2018 \blacklozenge 2020$ 和 $2020 \star 2018$ 的值，可得选项。

【详解】

$$\text{由 } (2n) \star 2018 = 2[(2n+2) \star 2018]，\text{得 } (2n+2) \star 2018 = \frac{1}{2}(2n \star 2018)，$$

$$\text{又 } 2 \star 2018 = 1，\text{所以 } 4 \star 2018 = \frac{1}{2}，6 \star 2018 = \left(\frac{1}{2}\right)^2，8 \star 2018 = \left(\frac{1}{2}\right)^3，\text{┆}，\text{以此类推，}$$

$$2020 \star 2018 = (2 \times 1010) \star 2018 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1010-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1009}，$$

$$\text{又 } 2018 \blacklozenge (n+1) = 2(2018 \blacklozenge n)，2018 \blacklozenge 1 = 1，$$

$$\text{所以 } 2018 \blacklozenge 2 = 2，2018 \blacklozenge 3 = 2^2，2018 \blacklozenge 4 = 2^3，\text{┆}，\text{以此类推，} 2018 \blacklozenge 2020 = 2^{2019}，$$

$$\text{所以 } (2018 \blacklozenge 2020)(2020 \star 2018) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1009} \times 2^{2019} = 2^{1010}，$$

故选：B.

【点睛】

本题考查定义新运算，关键在于理解，运用新定义进行求值，属于中档题。

4、B

【解析】

列出每一次循环，直到计数变量*i*满足*i* > 3退出循环.

【详解】

第一次循环： $S = 2^1(1+1) = 4, i = 2$ ；第二次循环： $S = 4 + 2^2(1+2) = 16, i = 3$ ；

第三次循环： $S = 16 + 2^3(1+3) = 48, i = 4$ ，退出循环，输出的*S*为48.

故选：B.

【点睛】

本题考查由程序框图求输出的结果，要注意在哪一步退出循环，是一道容易题.

5、A

【解析】

先化简已知得 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$, 再根据题意得出 $f(x)$ 的最小值正周期 T 为 1×2 ，再求出 ω 的值.

【详解】

由题得 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$,

设 x_1, x_2 为 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 的两个零点，且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 1，

$$\therefore \frac{T}{2} = 1, \text{ 解得 } T = 2;$$

$$\therefore \frac{2\pi}{\omega} = 2,$$

解得 $\omega = \pi$.

故选 A.

【点睛】

本题考查了三角恒等变换和三角函数的图象与性质的应用问题，是基础题.

6、D

【解析】

确定点 O 为 $\triangle ABC$ 外心，代入化简得到 $\lambda = \frac{5}{6}$ ， $\mu = \frac{4}{3}$ ，再根据 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ 计算得到答案.

【详解】

由 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$ 可知，点 O 为 $\triangle ABC$ 外心，

$$\text{则 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 = 2, \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}^2 = \frac{1}{2}, \quad \text{又 } \overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC},$$

$$\text{所以} \begin{cases} \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AB}^2 + \mu \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 4\lambda + \mu \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 2, \\ \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \mu \overrightarrow{AC}^2 = \lambda \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \mu = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad ①$$

因为 $4\lambda - \mu = 2$, ②

联立方程①②可得 $\lambda = \frac{5}{6}$, $\mu = \frac{4}{3}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1$, 因为 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$,

所以 $\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 7$, 即 $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{7}$.

故选: D

【点睛】

本题考查了向量模长的计算, 意在考查学生的计算能力.

7、D

【解析】

设 $\vec{r} = 2\vec{a} + \vec{b}$, 可得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{r} - 2\vec{a}^2 \in [-4, 0]$, 构造 $(\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{r})^2 \leq 2 + \frac{1}{16}\vec{r}^2$, 结合 $|\vec{r}| = 2$, 可得

$|\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{r}| \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, 根据向量减法的模长不等式可得解.

【详解】

设 $\vec{r} = 2\vec{a} + \vec{b}$, 则 $|\vec{r}| = 2$,

$\vec{b} = \vec{r} - 2\vec{a}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{r} - 2\vec{a}^2 \in [-4, 0]$,

$\therefore (\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{r})^2 = \vec{a}^2 - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{r} + \frac{1}{16}\vec{r}^2 \leq 2 + \frac{1}{16}\vec{r}^2$

$|\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{r}|^2 = \vec{a}^2 - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{r} + \frac{1}{16}\vec{r}^2 \leq 2 + \frac{1}{16}\vec{r}^2$, 所以可得: $\frac{\vec{r}^2}{8} = \frac{1}{2}$,

配方可得 $\frac{1}{2} = \frac{1}{8}\vec{r}^2 \leq 2(\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{r})^2 \leq 4 + \frac{1}{8}\vec{r}^2 = \frac{9}{2}$,

所以 $|\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{r}| \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$,

又 $||\vec{a}| - |\frac{1}{4}\vec{r}|| \leq |\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{r}| \leq ||\vec{a}| + |\frac{1}{4}\vec{r}||$

则 $|\vec{a}| \in [0, 2]$.

故选: D.

【点睛】

本题考查了向量的运算综合，考查了学生综合分析，转化划归，数学运算的能力，属于中档题.

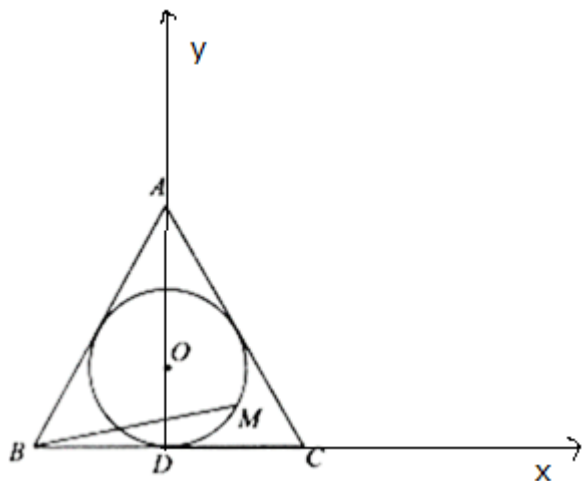
8、C

【解析】

建立坐标系，写出相应的点坐标，得到 $2x + y$ 的表达式，进而得到最大值.

【详解】

以 D 点为原点，BC 所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴，建立坐标系，



设内切圆的半径为 1，以 $(0, 1)$ 为圆心，1 为半径的圆；

根据三角形面积公式得到 $\frac{1}{2} \times l_{\text{周长}} \times r = S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 60^\circ$,

可得到内切圆的半径为 1；

可得到点的坐标为： $B(-\sqrt{3}, 0), C(\sqrt{3}, 0), A(0, 3), D(0, 0), M(\cos \theta, 1 + \sin \theta)$

$\overrightarrow{BM} = (\cos \theta + \sqrt{3}, 1 + \sin \theta), \overrightarrow{BA} = (\sqrt{3}, 3), \overrightarrow{BD} = (\sqrt{3}, 0)$

故得到 $\overrightarrow{BM} = (\cos \theta + \sqrt{3}, 1 + \sin \theta) = (\sqrt{3}x + \sqrt{3}y, 3x)$

故得到 $\cos \theta = \sqrt{3}x + \sqrt{3}y - \sqrt{3}, \sin \theta = 3x - 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sin \theta}{3} \\ y = \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} - \frac{\sin \theta}{3} + \frac{2}{3} \end{cases}, \quad 2x + y = \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} + \frac{\sin \theta}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \sin(\theta + \varphi) + \frac{4}{3} \leq 2.$$

故最大值为：2.

故答案为 C.

【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/877154101006006102>