2025 届天津市河西区新华中学高三下第一次月考数学试题理试题

请考生注意：
1．请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0．5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2．答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．双曲线 $C: x^2-2y^2=1$ 的渐近线方程为(　　)

A．$x\pm\sqrt{2}y=0$　　B．$x\pm 2y=0$

C．$\sqrt{2}x\pm y=0$　　D．$2x\pm y=0$

2．已知平面 $ABCD\perp$ 平面 $ADEF, AB\perp AD, CD\perp AD$，且 $AB=3, AD=CD=6, ADEF$ 是正方形，在正方形 $ADEF$ 内部有一点 M，满足 MB, MC 与平面 $ADEF$ 所成的角相等，则点 M 的轨迹长度为（　　）

A．$\dfrac{4}{3}$　　B．16　　C．$\dfrac{4}{3}\pi$　　D．8π

3．数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，例如：四叶草曲线就是其中一种，其方程为 $\left(x^2+y^2\right)^3=x^2y^2$.给出下列四个结论：

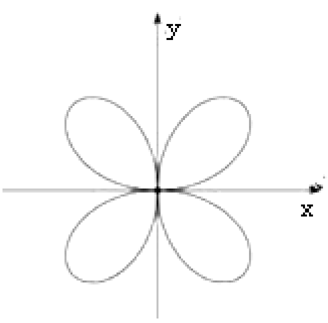
①曲线 C 有四条对称轴；

②曲线 C 上的点到原点的最大距离为 $\dfrac{1}{4}$；

③曲线 C 第一象限上任意一点作两坐标轴的垂线与两坐标轴围成的矩形面积最大值为 $\dfrac{1}{8}$；

④四叶草面积小于 $\dfrac{\pi}{4}$.

其中，所有正确结论的序号是（　）



A．①②　　B．①③　　C．①③④　　D．①②④

4．已知点 P 在椭圆 τ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上，点 P 在第一象限，点 P 关于原点 O 的对称点为 A，点 P 关于 x 轴的对称点为 Q，设 $\overrightarrow{PD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{PQ}$，直线 AD 与椭圆 τ 的另一个交点为 B，若 $PA\perp PB$，则椭圆 τ 的离心率 $e=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

5．已知非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$|\vec{a}|=3$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{a}+\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，则 $|\vec{b}|=$（　　）

A．6　　B．$3\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．3

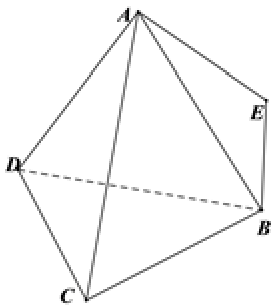
6．等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且 $a_3a_8+a_4a_7=18$，则 $\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_{10}=$（　　）

A．12　　B．10　　C．8　　D．$2+\log_3 5$

7．一个陶瓷圆盘的半径为 $10cm$，中间有一个边长为 $4cm$ 的正方形花纹，向盘中投入 1000 粒米后，发现落在正方形花纹上的米共有 51 粒，据此估计圆周率 π 的值为（精确到 0.001）（　　）

A．3.132　　B．3.137　　C．3.142　　D．3.147

8．等腰直角三角形 ABE 的斜边 AB 为正四面体 $ABCD$ 侧棱，直角边 AE 绕斜边 AB 旋转，则在旋转的过程中，有下列说法：



（1）四面体 $E-BCD$ 的体积有最大值和最小值；

（2）存在某个位置，使得 $AE\perp BD$；

（3）设二面角 $D-AB-E$ 的平面角为 θ，则 $\theta\geq\angle DAE$；

（4）AE 的中点 M 与 AB 的中点 N 连线交平面 BCD 于点 P，则点 P 的轨迹为椭圆.

其中，正确说法的个数是（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

9．$\tan570^\circ=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

10．我国古代数学著作《九章算术》有如下问题:“今有蒲生一日，长三尺莞生一日，长一尺蒲生日自半，莞生日自倍.问几何日而长倍？”意思是：“今有蒲草第1天长高3尺，芜草第1天长高1尺以后，蒲草每天长高前一天的一半，芜草每天长高前一天的2倍.问第几天莞草是蒲草的二倍？”你认为莞草是蒲草的二倍长所需要的天数是（　　）

（结果采取“只入不舍”的原则取整数，相关数据：$\lg 3\approx 0.4771$，$\lg 2\approx 0.3010$）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

11．已知向量$\vec{m}=\left(2\cos^2 x,\sqrt{3}\right)$，$\vec{n}=\left(1,\sin 2x\right)$，设函数$f\left(x\right)=\vec{m}\cdot\vec{n}$，则下列关于函数$y=f\left(x\right)$的性质的描述正确的是(　　)

A．关于直线$x=\dfrac{\pi}{12}$对称　　B．关于点$\left(\dfrac{5\pi}{12},0\right)$对称

C．周期为2π　　D．$y=f\left(x\right)$在$\left(-\dfrac{\pi}{3},0\right)$上是增函数

12．已知数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为$a_n=2n+2$，将这个数列中的项摆放成如图所示的数阵.记b_n为数阵从左至右的n列，从上到下的n行共n^2个数的和，则数列$\left\{\dfrac{n}{b_n}\right\}$的前**2020**项和为（　　）

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n+1} \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n-1} \end{array}$$

A．$\dfrac{1011}{2020}$　　B．$\dfrac{2019}{2020}$　　C．$\dfrac{2020}{2021}$　　D．$\dfrac{1010}{2021}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．已知向量$\vec{a}=(1,1)$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=2$，则$|\vec{a}-\vec{b}|=$__________.

14．李明自主创业，在网上经营一家水果店，销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃，价格依次为**60**元/盒、**65**元/盒、**80**元/盒、**90**元/盒．为增加销量，李明对这四种水果进行促销：一次购买水果的总价达到**120**元，顾客就少付x元．每笔订单顾客网上支付成功后，李明会得到支付款的**80%**．

①当x=**10**时，顾客一次购买草莓和西瓜各**1**盒，需要支付__________元；

②在促销活动中，为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折，则x的最大值为__________.

15．已知函数$f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1, & x\le 0\\ f(x-2), & x>0\end{cases}$，若关于$x$的方程$f(x)=\dfrac{3}{2}x+a$有且只有两个不相等的实数根，则实数$a$的取值范围是______________.

16．函数 $f(x)=\cos^2 x$ 的最小正周期是________________，单调递增区间是__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知 $f(x)=|x+3|-|x-2|$

（1）求函数 $f(x)$ 的最大值 m；

（2）正数 a，b，c 满足 $a+2b+3c=m$，求证：$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\geq\frac{36}{5}$.

18．（12 分）超级病菌是一种耐药性细菌，产生超级细菌的主要原因是用于抵抗细菌侵蚀的药物越来越多，但是由于滥用抗生素的现象不断的发生，很多致病菌也对相应的抗生素产生了耐药性，更可怕的是，抗生素药物对它起不到什么作用，病人会因为感染而引起可怕的炎症，高烧、痉挛、昏迷直到最后死亡.某药物研究所为筛查某种超级细菌，需要检验血液是否为阳性，现有 n（$n\in\mathbf{N}^*$）份血液样本，每个样本取到的可能性均等，有以下两种检验方式：

（1）逐份检验，则需要检验 n 次；

（2）混合检验，将其中 k（$k\in\mathbf{N}^*$ 且 $k\geq 2$）份血液样本分别取样混合在一起检验，若检验结果为阴性，这 k 份的血液全为阴性，因而这 k 份血液样本只要检验一次就够了，如果检验结果为阳性，为了明确这 k 份血液究竟哪几份为阳性，就要对这 k 份再逐份检验，此时这 k 份血液的检验次数总共为 $k+1$ 次，假设在接受检验的血液样本中，每份样本的检验结果是阳性还是阴性都是独立的，且每份样本是阳性结果的概率为 p（$0<p<1$）.

（1）假设有 5 份血液样本，其中只有 2 份样本为阳性，若采用逐份检验方式，求恰好经过 2 次检验就能把阳性样本全部检验出来的概率；

（2）现取其中 k（$k\in\mathbf{N}^*$ 且 $k\geq 2$）份血液样本，记采用逐份检验方式，样本需要检验的总次数为 ξ_1，采用混合检验方式，样本需要检验的总次数为 ξ_2.

（i）试运用概率统计的知识，若 $E\xi_1=E\xi_2$，试求 p 关于 k 的函数关系式 $p=f\left(k\right)$；

（ii）若 $p=1-\frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}$，采用混合检验方式可以使得样本需要检验的总次数的期望值比逐份检验的总次数期望值更少，求 k 的最大值.

参考数据：$\ln 2\approx 0.6931$，$\ln 3\approx 1.0986$，$\ln 4\approx 1.3863$，$\ln 5\approx 1.6094$，$\ln 6\approx 1.7918$

19．（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta+2a\cos\theta\left(a>0\right)$；直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），直线 l 与曲线 C 分别交于 M,N 两点.