2012 年度弹性力学与有限元分析复习题及其答案

(绝密试题)

一、填空题

1、弹性力学研究弹性体由于受外力作用、边界约束或温度改变等原因而发生的应力、形变和位移。

2、在弹性力学中规定，线应变以伸长时为正，缩短时为负，与正应力的正负号规定相适应。

3、在弹性力学中规定，切应变以直角变小时为正，变大时为负，与切应力的正负号规定相适应。

4、物体受外力以后，其内部将发生内力，它的集度称为应力。与物体的形变和材料强度直接有关的，是应力在其作用截面的法线方向和切线方向的分量，也就是正应力和切应力。应力及其分量的量纲是 $L^{-1}MT^{-2}$。

5、弹性力学的基本假定为连续性、完全弹性、均匀性、各向同性。

6、平面问题分为平面应力问题和平面应变问题。

7、已知一点处的应力分量 $\sigma_x=100$ MPa，$\sigma_y=50$ MPa，$\tau_{xy}=10\sqrt{50}$ MPa，则主应力 $\sigma_1=150$MPa，$\sigma_2=0$MPa，$\alpha_1=35^\circ16'$。

8、已知一点处的应力分量，$\sigma_x=200$ MPa，$\sigma_y=0$ MPa，$\tau_{xy}=-400$ MPa，则主应力 $\sigma_1=512$ MPa，$\sigma_2=-312$ MPa，$\alpha_1=-37^\circ57'$。

9、已知一点处的应力分量，$\sigma_x=-2000$ MPa，$\sigma_y=1000$ MPa，$\tau_{xy}=-400$ MPa，则主应力 $\sigma_1=1052$ MPa，$\sigma_2=-2052$ MPa，$\alpha_1=-82^\circ32'$。

10、在弹性力学里分析问题，要考虑静力学、几何学和物理学三方面条件，分别建立三套方程。

11、表示应力分量与体力分量之间关系的方程为平衡微分方程。

12、边界条件表示边界上位移与约束，或应力与面力之间的关系式。分为位移边界条件、应力边界条件和混合边界条件。

13、按应力求解平面问题时常采用逆解法和半逆解法。

14、有限单元法首先将连续体变换成为离散化结构，然后再用结构力学位移法进行求解。其具体步骤分为单元分析和整体分析两部分。

15、每个单元的位移一般总是包含着两部分：一部分是由本单元的形变引起的，另一部分是

由于其他单元发生了形变而连带引起的。

16、每个单元的应变一般总是包含着两部分：一部分是与该单元中各点的位置坐标有关的，是各点不相同的，即所谓变量应变；另一部分是与位置坐标无关的，是各点相同的，即所谓常量应变。

17、为了能从有限单元法得出正确的解答，位移模式必须能反映单元的刚体位移和常量应变，还应当尽可能反映相邻单元的位移连续性。

18、为了使得单元内部的位移保持连续，必须把位移模式取为坐标的单值连续函数，为了使得相邻单元的位移保持连续，就不仅要使它们在公共结点处具有相同的位移时，也能在

整个公共边界上具有相同的位移。

19、在有限单元法中，单元的形函数 N_i 在 i 结点 N_i=1；在其他结点 N_i=0 及 $\sum N_i$=1。

20、为了提高有限单元法分析的精度，一般可以采用两种方法：一是将单元的尺寸减小，以便较好地反映位移和应力变化情况；二是采用包含更高次项的位移模式，使位移和应力的精度提高。

二、判断题（请在正确命题后的括号内打“ √ ”, 在错误命题后的括号内打“×”）

1、连续性假定是指整个物体的体积都被组成这个物体的介质所填满，不留下任何空隙。（ √ ）

2、均匀性假定是指整个物体的体积都被组成这个物体的介质所填满，不留下任何空隙。（×）

3、连续性假定是指整个物体是由同一材料组成的。（×）

4、平面应力问题与平面应变问题的物理方程是完全相同的。（×）

5、如果某一问题中，$\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$，只存在平面应力分量 σ_x，σ_y，τ_{xy}，且它们不沿 z 方向变化，仅为 x，y 的函数，此问题是平面应力问题。（ √ ）

6、如果某一问题中，$\varepsilon_z=\gamma_{zx}=\gamma_{zy}=0$，只存在平面应变分量 ε_x，ε_y，γ_{xy}，且它们不沿 z 方向变化，仅为 x，y 的函数，此问题是平面应变问题。（ √ ）

7、表示应力分量与面力分量之间关系的方程为平衡微分方程。（×）

8、表示位移分量与应力分量之间关系的方程为物理方程。（×）

9、当物体的形变分量完全确定时，位移分量却不能完全确定。（ √ ）

10、当物体的位移分量完全确定时，形变分量即完全确定。（ √ ）

11、按应力求解平面问题时常采用位移法和应力法。 （×）

12、按应力求解平面问题，最后可以归纳为求解一个应力函数。 （×）

13、在有限单元法中，结点力是指单元对结点的作用力。 （×）

14、在有限单元法中，结点力是指结点对单元的作用力。 （ √ ）

15、在平面三结点三角形单元的公共边界上应变和应力均有突变。（ √ ）

三、简答题

1、简述材料力学和弹性力学在研究对象、研究方法方面的异同点。

在研究对象方面，材料力学基本上只研究杆状构件，也就是长度远大于高度和宽度的构件；而弹性力学除了对杆状构件作进一步的、较精确的分析外，还对非杆状结构，例如板和壳，以及挡土墙、堤坝、地基等实体结构加以研究。

在研究方法方面，材料力学研究杆状构件，除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析以外，大都引用了一些关于构件的形变状态或应力分布的假定，这就大简化了数学推演，但是，得出的解答往往是近似的。弹性力学研究杆状构件，一般都不必引用那些假定，因而得出的结果就比较精确，并且可以用来校核材料力学里得出的近似解答。

2、简述弹性力学的研究方法。

答：在弹性体区域内部，考虑静力学、几何学和物理学三方面条件，分别建立三套方程。即根据微分体的平衡条件，建立平衡微分方程；根据微分线段上形变与位移之间的几何关系，建立几何方程；根据应力与形变之间的物理关系，建立物理方程。此外，在弹性体的边界上还要建立边界条件。在给定面力的边界上，根据边界上微分体的平衡条件，建立应力边界条件；在给定约束的边界上，根据边界上的约束条件建立位移边界条件。求解弹性力学问题，即在边界条件下根据平衡微分方程、几何方程、物理方程求解应力分量、形变分量和位移分量。

3、弹性力学中应力如何表示？正负如何规定？

答：弹性力学中正应力用 σ 表示，并加上一个下标字母，表明这个正应力的作用面与作用方向；切应力用τ 表示，并加上两个下标字母，前一个字母表明作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个字母表明作用方向沿着哪一个坐标轴。并规定作用在正面上的应力以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。相反，作用在负面上的应力以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。

4、简述平面应力问题与平面应变问题的区别。

答：平面应力问题是指很薄的等厚度薄板，只在板边上受有平行于板面并且不沿厚度变化的面力，同时，体力也平行于板面并且不沿厚度变化。对应的应力分量只有σ_x，σ_y，τ_{xy}。而平面应变问题是指很长的柱形体，在柱面上受有平行于横截面并且不沿长度变化的面力，同时体力也平行于横截面并且不沿长度变化，对应的位移分量只u有和 v

5、简述圣维南原理。

如果把物体的一小部分边界上的面力，变换为分布不同但静力等效的面力（主矢量相同，对于同一点的主矩也相同,）那么，近处的应力分布将有显著的改变，但是远处所受的影响可以不计。

6、简述按应力求解平面问题时的逆解法。

答：所谓逆解法，就是先设定各种形式的、满足相容方程的应力函数；并由应力分量与应力函数之间的关系求得应力分量；然后再根据应力边界条件和弹性体的边界形状，看这些应力分量对应于边界上什么样的面力，从而可以得知所选取的应力函数可以解决的问题。

7、以三节点三角形单元为例，简述有限单元法求解离散化结构的具体步骤。

（1）取三角形单元的结点位移为基本未知量。
（2）应用插值公式，由单元的结点位移求出单元的位移函数。
（3）应用几何方程， 由单元的位移函数求出单元的应变。
（4）应用物理方程， 由单元的应变求出单元的应力。
（5）应用虚功方程， 由单元的应力出单元的结点力。
（6）应用虚功方程，将单元中的各种外力荷载向结点移置，求出单元的结点荷载。
（7）列出各结点的平衡方程， 组成整个结构的平衡方程组。

8、为了保证有限单元法解答的收敛性，位移模式应满足哪些条件？

答：为了保证有限单元法解答的收敛性，位移模式应满足下列条件：⑴）位移模式必须能

反映单元的刚体位移；⑵）位移模式必须能反映单元的常量应变；⑶）位移模式应尽可能反映位移的连续性。

9、在有限单元法中，为什么要求位移模式必须能反映单元的刚体位移？

每个单元的位移一般总是包含着两部分：一部分是由本单元的形变引起的，另一部分是本单元的形变无关的，即刚体位移，它是由于其他单元发生了形变而连带引起的。甚至在弹性体的某些部位，例如在靠近悬臂梁的自由端处，单元的形变很小，单元的位移主要是由于其他单元发生形变而引起的刚体位移。因此，为了正确反映单元的位移形态，位移模式必须能反映该单元的刚体位移。

10、在有限单元法中，为什么要求位移模式必须能反映单元的常量应变？

答：每个单元的应变一般总是包含着两部分：一部分是与该单元中各点的位置坐标有关的，是各点不相同的，即所谓变量应变；另一部分是与位置坐标无关的，是各点相同的，即所谓常量应变。而且，当单元的尺寸较小时，单元中各点的应变趋于相等，也就是单元的应变趋于均匀，因而常量应变就成为应变的主要部分。因此，为了正确反映单元的形变状态，位移模式必须能反映该单元的常量应变。

11、在平面三结点三角形单元中，能否选取如下的位移模式并说明理由：

（1）$u(x,y)=\alpha_1+\alpha_2 x^2+\alpha_3 y$，$v(x,y)=\alpha_4+\alpha_5 x+\alpha_6 y^2$

（2）$u(x,y)=\alpha_1 x^2+\alpha_2 xy+\alpha_3 y^2$，$v(x,y)=\alpha_4 x^2+\alpha_5 xy+\alpha_6 y^2$

答：⑴）不能采用。因为位移模式没有反映全部的刚体位移和常量应变项；对坐标 x，y 不对等；在单元边界上的连续性条件也未能完全满足。

（2）不能采用。因为，位移模式没有反映刚体位移和常量应变项；在单元边界上的连续性条件也不满足。

四、分析计算题

1、试写出无体力情况下平面问题的应力分量存在的必要条件，并考虑下列平面问题的应力分量是否可能在弹性体中存在。

（1）$\sigma_x=Ax+By$，$\sigma_y=Cx+Dy$，$\tau_{xy}=Ex+Fy$；

（2）$\sigma_x=A(x^2+y^2)$，$\sigma_y=B(x^2+y^2)$，$\tau_{xy}=Cxy$；

其中，A，B，C，D，E，F 为常数。

解：应力分量存在的必要条件是必须满足下列条件：（1）在区域内的平衡微分方程 $\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=0\end{cases}$；（2）在区域内的相容方程 $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=0$；（3）在边界上的应力边界

条件$\begin{cases}(l\sigma_x+m\tau_{yx})_s=\overline{f}_x(s)\\(m\sigma_y+l\tau_{xy})_s=\overline{f}_y(s)\end{cases}$；（4）对于多连体的位移单值条件。

（1）此组应力分量满足相容方程。为了满足平衡微分方程，必须 A=-F，D=-E。此外还应满足应力边界条件。

（2）为了满足相容方程，其系数必须满足 A+B=0；为了满足平衡微分方程，其系数必须满足 A=B=-C/2。上两式是矛盾的，因此，此组应力分量不可能存在。

2、已知应力分量$\sigma_x=-Qxy^2+C_1x^3$，$\sigma_y=-\frac{3}{2}C_2xy^2$，$\tau_{xy}=-C_2y^3-C_3x^2y$，体力不计，Q 为常数。试利用平衡微分方程求系数$C_1$，$C_2$，$C_3$。

解：将所给应力分量代入平衡微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=0\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}-Qy^2+3C_1x^2-3C_2y^2-C_3x^2=0\\ -3C_2xy-2C_3xy=0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(3C_1-C_3)x^2-(Q+3C_2)y^2=0\\ (3C_2+2C_3)xy=0\end{cases}$$

由 x，y 的任意性，得

$$\begin{cases}3C_1-C_3=0\\ Q+3C_2=0\\ 3C_2+2C_3=0\end{cases}$$

由此解得，$C_1=\frac{Q}{6}$，$C_2=-\frac{Q}{3}$，$C_3=\frac{Q}{2}$

3、已知应力分量$\sigma_x=-q$，$\sigma_y=-q$，$\tau_{xy}=0$，判断该应力分量是否满足平衡微分方程和相容方程。

解：将已知应力分量$\sigma_x=-q$，$\sigma_y=-q$，$\tau_{xy}=0$，代入平衡微分方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0\\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+Y=0\end{aligned}\right\}$$

可知，已知应力分量$\sigma_x=-q$，$\sigma_y=-q$，$\tau_{xy}=0$一般不满足平衡微分方程，只有体力忽略不计时才满足。

按应力求解平面应力问题的相容方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x-\nu\sigma_y)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y-\nu\sigma_x)=2(1+\nu)\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}$$

将已知应力分量$\sigma_x=-q$，$\sigma_y=-q$，$\tau_{xy}=0$代入上式，可知满足相容方程。

按应力求解平面应变问题的相容方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x-\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y-\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x)=\frac{2}{1-\nu}\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}$$

将已知应力分量$\sigma_x=-q$，$\sigma_y=-q$，$\tau_{xy}=0$代入上式，可知满足相容方程。

4、试写出平面问题的应变分量存在的必要条件，并考虑下列平面问题的应变分量是否可能存在。

（1）$\varepsilon_x=Axy$，$\varepsilon_y=By^3$，$\gamma_{xy}=C-Dy^2$；

（2）$\varepsilon_x=Ay^2$，$\varepsilon_y=Bx^2y$，$\gamma_{xy}=Cxy$；

（3）$\varepsilon_x=0$，$\varepsilon_y=0$，$\gamma_{xy}=Cxy$；

其中，A，B，C，D为常数。

解：应变分量存在的必要条件是满足形变协调条件，即

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$$

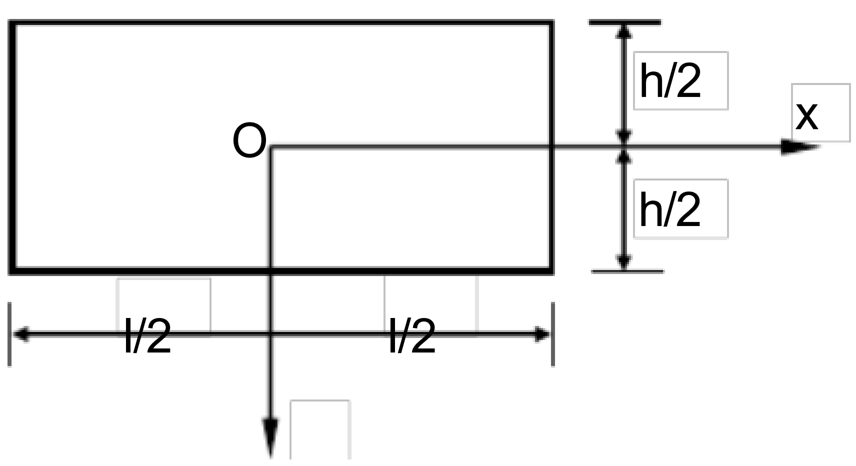
将以上应变分量代入上面的形变协调方程，可知：

（1）相容。

（2）$2A+2By=C$（1分）；这组应力分量若存在，则须满足：$B=0$，$2A=C$。

（3）$0=C$；这组应力分量若存在，则须满足：$C=0$，则$\varepsilon_x=0$，$\varepsilon_y=0$，$\gamma_{xy}=0$（1分）。

5、证明应力函数$\varphi=by^2$能满足相容方程，并考察在如图所示的矩形板和坐标系中能解决什么问题（体力不计，$b\neq0$）。



解：将应力函数$\varphi = by^2$代入相容方程

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0$$

可知，所给应力函数$\varphi=by^2$能满足相容方程。

由于不计体力，对应的应力分量为

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=2b，\ \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0，\ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=0$$

对于图示的矩形板和坐标系，当板内发生上述应力时，根据边界条件，上下左右四个边上的面力分别为：

上边，$y=-\frac{h}{2}$，$l=0$，$m=-1$，$f_x=-(\tau_{xy})_{y=-\frac{h}{2}}=0$，$f_y=-(\sigma_y)_{y=-\frac{h}{2}}=0$；

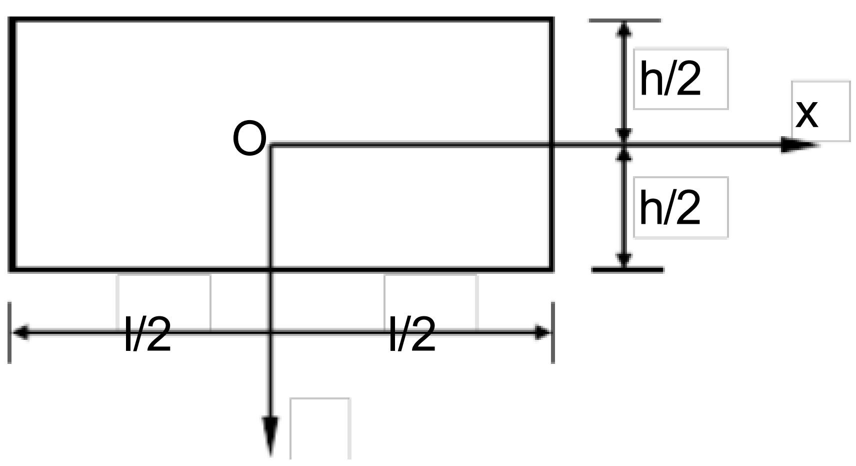
下边，$y=\frac{h}{2}$，$l=0$，$m=1$，$f_x=(\tau_{xy})_{y=\frac{h}{2}}=0$，$f_y=(\sigma_y)_{y=\frac{h}{2}}=0$；

左边，$x=-\frac{l}{2}$，$l=-1$，$m=0$，$f_x=-(\sigma_x)_{x=-\frac{l}{2}}=-2b$，$f_y=-(\tau_{xy})_{x=-\frac{l}{2}}=0$；

右边，$x=\frac{l}{2}$，$l=1$，$m=0$，$f_x=(\sigma_x)_{x=\frac{l}{2}}=2b$，$f_y=(\tau_{xy})_{x=\frac{l}{2}}=0$。

可见，上下两边没有面力，而左右两边分别受有向左和向右的均布面力2b。因此，应力函数$\varphi=by^2$能解决矩形板在x 方向受均布拉力（b>0）和均布压力（b<0）的问题。

6、证明应力函数$\varphi=axy$ 能满足相容方程，并考察在如图所示的矩形板和坐标系中能解决什么问题（体力不计，$a\neq0$ ）。



解：将应力函数$\varphi=axy$ 代入相容方程

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0$$