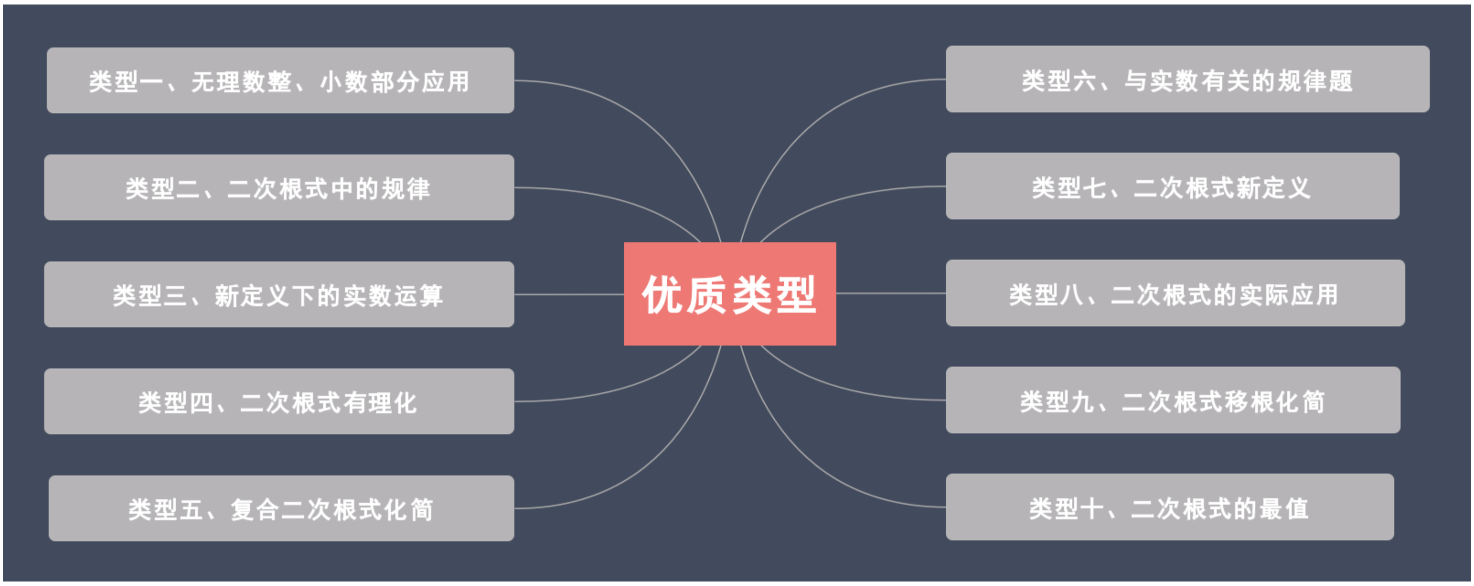
专题02 其次章 实数

思维导图



【专题过关】

类型一、无理数整、小数部分应用

【解惑】数学张老师在课堂上提出一个问题：“通过探究知道：$\sqrt{2}\approx 1.414L$ ，它是无限不循环小数，也叫无理数，它的整数部分是1，那么有谁能说出它的小数部分是多少”，小明举手回答：它的小数部分我们无法全部写出来，但可以用$\sqrt{2}-1$来表示它的小数部分，张老师夸奖小明真聪慧，确定了他的说法．现请你依据小明的说法解答：

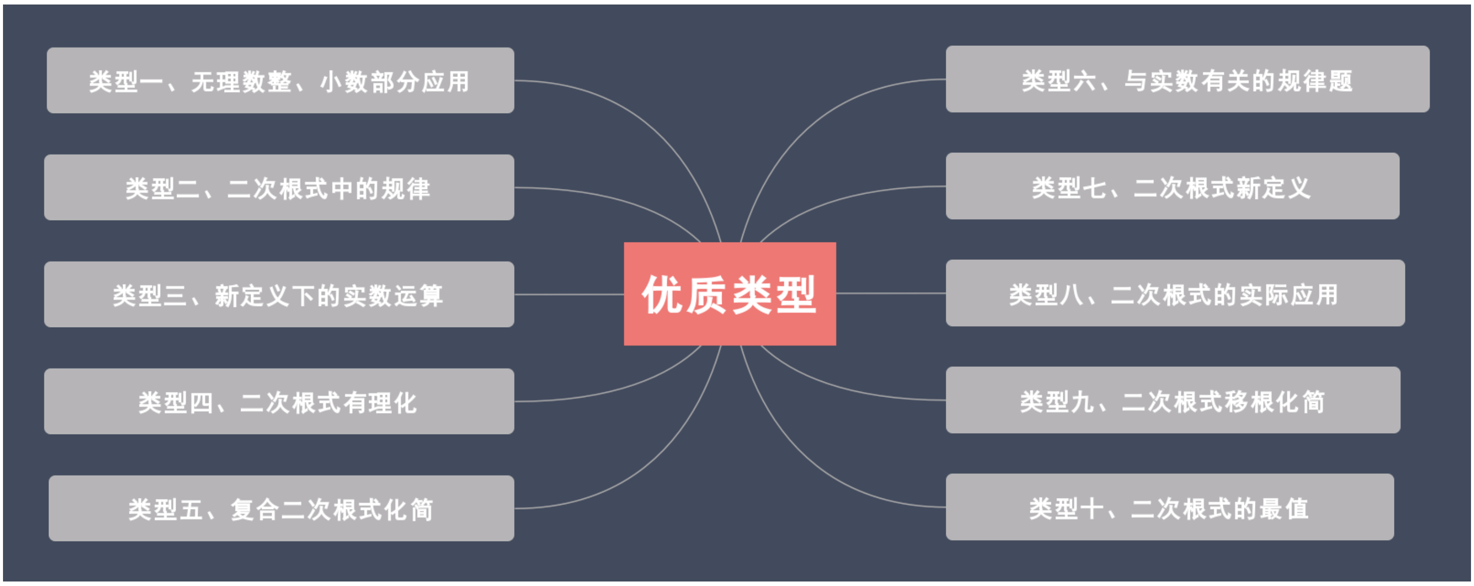
(1) $\sqrt{5}$的小数部分是多少，请表示出来．

(2) a为$\sqrt{5}$的小数部分，b为$\sqrt{10}$的整数部分，求$a+b-\sqrt{10}$的值．

(3)已知$8+\sqrt{5}=x+y$，其中x是一个正整数，$0<y<1$，求$2x+(y-\sqrt{5}+1)^{2022}$的值．

专题02 其次章 实数

思维导图



【专题过关】

类型一、无理数整、小数部分应用

【解惑】数学张老师在课堂上提出一个问题：“通过探究知道：$\sqrt{2}\approx 1.414L$ ，它是无限不循环小数，也叫无理数，它的整数部分是1，那么有谁能说出它的小数部分是多少”，小明举手回答：它的小数部分我们无法全部写出来，但可以用$\sqrt{2}-1$来表示它的小数部分，张老师夸奖小明真聪慧，确定了他的说法．现请你依据小明的说法解答：

(1) $\sqrt{5}$的小数部分是多少，请表示出来．

(2) a为$\sqrt{5}$的小数部分，b为$\sqrt{10}$的整数部分，求$a+b-\sqrt{10}$的值．

(3)已知$8+\sqrt{5}=x+y$，其中x是一个正整数，$0<y<1$，求$2x+(y-\sqrt{5}+1)^{2022}$的值．

【融会贯穿】

1．（2025春·贵州黔东南·七班级校考阶段练习）先阅读，再解答以下问题：大家知道$\sqrt{3}$是无理数，而无理数是无限不循环小数，因此$\sqrt{3}$的小数部分我们不行能全部地写出来，于是小明用$\sqrt{3}-1$来表示$\sqrt{3}$的小数部分，事实上，小明的表示方法是有道理的，由于$1<\sqrt{3}<\sqrt{4}$，所以$\sqrt{3}$的整数部分是1，将这个数减去其整数部分，差就是小数部分．请据此解答：

(1)$\sqrt{11}$的整数部分是______，小数部分是______；

(2)假如$\sqrt{7}$的小数部分为a，$\sqrt{41}$的整数部分为b，求$a+b-\sqrt{7}$的值；

(3)若设$2+\sqrt{3}$的整数部分为x，小数部分为y，求$y-x$的值．

2．（2025春·山东德州·七班级校考阶段练习）阅读下面文字，然后回答问题．

给出定义：一个实数的整数部分是不大于这个数的最大整数，这个实数的小数部分为这个数与它的整数部分的差的确定值．例如：2.4的整数部分为2，小数部分为$2.4-2=0.4$；$\sqrt{2}$的整数部分为1，小数部分可用$\sqrt{2}-1$表示；再如，-2.6的整数部分为-3，小数部分为$\left|-2.6-(-3)\right|=0.4$．

由此我们得到一个真命题．假如$\sqrt{2}=x+y$，其中x是整数，且$0<y<1$，那么$x=1$，$y=\sqrt{2}-1$．

(1)假如$\sqrt{7}=a+b$，其中a是整数，且$0<b<1$，那么$a=$______，$b=$_______；

(2)假如$-\sqrt{7}=c+d$，其中c是整数，且$0<d<1$，那么$c=$______，$d=$______；

(3)已知$3+\sqrt{7}=m+n$，其中m是整数，且$0<n<1$，求$|m-n|$的值；

(4)在上述条件下，求$m^{a}+a(b+d)$的立方根．

3．（2025春·吉林松原·七班级校考阶段练习）先阅读下面的文字，然后解答问题．

大家知道$\sqrt{2}$是无理数，而无理数是无限不循环小数，因此$\sqrt{2}$的小数部分我们不行能全部写出来，于是小明用$\sqrt{2}-1$表示$\sqrt{2}$的小数部分，你同意小明的表示方法吗？事实上，小明的表示方法是有道理的，由于$\sqrt{2}$的整数部分是1，将这个数减去其整数部分，差就是小数部分．

由此我们还可以得到一个真命题：假如$\sqrt{2}=x+y$，其中x是整数，且$0<y<1$，那么$x=1$，$y=\sqrt{2}-1$．请解答下列问题：

(1)假如$\sqrt{5}=a+b$，其中a是整数，且$0<b<1$，那么$a=$________，$b=$_______；

(2)已知$2+\sqrt{5}=m+n$，其中m是整数，且$0<n<1$，求$|m-n|$的值；

(3)$11-\sqrt{19}$的整数部分是________，小数部分是________．

4．（2025春·安徽合肥·七班级统考期中）同学们知道$\sqrt{2}$是无理数，而无理数是无限不循环小数，因此$\sqrt{2}$的小数部分我们不行能全部写出来，但是由于$1<\sqrt{2}<2$，所以$\sqrt{2}$的整数部分为1，将$\sqrt{2}$减去其整数部分1，差就是小数部分，即$\sqrt{2}$的小数部分为$\left(\sqrt{2}-1\right)$．

(1)假如$\sqrt{6}$的整数部分为$a, \sqrt{13}$的整数部分为b，求$a+b$的值；

(2)已知$12+\sqrt{3}=x+y$，其中x是整数，且$0<y<1$，求$-1-y$的确定值．

5．（2025春·贵州黔西·七班级校考期中）阅读下列材料：

$\because \sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$，即$1<\sqrt{3}<2$，

$\therefore \sqrt{3}$的整数部分为1，小数部分为$\sqrt{3}-1$.

请依据材料提示，进行解答：

(1)$\sqrt{14}$的整数部分是______，小数部分是______.

(2)假如$\sqrt{6}$的小数部分为m，$\sqrt{21}$的整数部分为n，求$2m+n$的值.

(3)已知：$10+\sqrt{32}=a+b$，其中a是整数，且$0<b<1$，请直接写出a，b的值.

类型二、二次根式中的规律

【解惑】依据学习"数与式"积累的阅历，探究下面二次根式的运算规律.

①$\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{4}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}}$；②$\sqrt{2+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}}$；③$\sqrt{3+\frac{1}{5}}=$________；④$\sqrt{4+\frac{1}{6}}=$________．…

(1)将题目中的横线处补充完整；

(2)若n为正整数，用含n的代数式表示上述运算规律，并加以证明；

(3)计算：$\sqrt{2021+\frac{1}{2023}}\times\sqrt{4046}$

【融会贯穿】

1．（2025春·安徽池州·七班级统考期末）观看下列算式：

第1个式子：$1\times3+1=2^2$

第2个式子：$7\times9+1=8^2$

第3个式子：$25\times27+1=26^2$

第4个式子：$79\times81+1=80^2$

(1)猜想第5个等式为___________；

(2)探究规律：若字母n表示自然数，请写出第n个等式；

(3)试证明你写出的等式的正确性.

2．（2025 春·八班级统考期末）阅读下列解题过程：

第 1 个等式：$\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$.

第 2 个等式：$\sqrt{1-\frac{5}{9}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$.

第 3 个等式：$\sqrt{1-\frac{7}{16}}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{3}{4}$.

……

(1)依据你所发觉的规律，请你写出第 4 个等式：______；

(2)依据你所发觉的规律，请你写出第 n （n 为正整数）个等式：______；

(3)利用这一规律计算，$\sqrt{\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{5}{9}\right)\times\left(1-\frac{7}{16}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{21}{121}\right)}$.

3．（2025 春·安徽合肥·八班级统考期末）观看下列等式，解答后面的问题．

第1个等式：$\sqrt{8+1}=3$；

第2个等式：$\sqrt{12+\frac{1}{2}}=5\sqrt{\frac{1}{2}}$；

第3个等式：$\sqrt{16+\frac{1}{3}}=7\sqrt{\frac{1}{3}}$；

第4个等式：$\sqrt{20+\frac{1}{4}}=9\sqrt{\frac{1}{4}}$.

…

(1)依据此规律，第5个等式是：______；

(2)写出你猜想的第 n 个等式（用含 n 的式子表示），并证明．

4．（2025 春·云南昆明·七班级校考阶段练习）观看下列一组等式的特征及运算结果，探究规律:

等式一：$\sqrt{1\times5+4}=\sqrt{9}=3$；

等式二：$\sqrt{2\times6+4}=\sqrt{16}=4$；

等式三：$\sqrt{3\times7+4}=\sqrt{25}=5$；

(1)用含正整数n的式子表示上述等式的规律：

(2)计算：$\sqrt{1\times5+4}-\sqrt{2\times6+4}+\sqrt{3\times7+4}-\sqrt{4\times8+4}+\cdots+\sqrt{2023\times2027+4}$．

5.（2025 春·安徽芜湖·八班级统考期中）先观看下列等式，再回答下列问题：

①$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}=1\frac{1}{2}$；

②$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2+1}=1\frac{1}{6}$；

③$\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3+1}=1\frac{1}{12}$．

(1)请你依据上面三个等式供应的信息，猜想$\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}}$的结果，并验证；

(2)请你依据上面各等式反映的规律，试写出一个用 n（n 为正整数）表示的等式；

(3)请利用上述规律来计算$\sqrt{\frac{101}{100}+\frac{1}{121}}$（仿照上式写出过程）.

类型三、新定义下的实数运算

【解惑】假如$10^b=n$，那么 b 为 n 的劳格数，记为$b=d\left(n\right)$，由定义可知：$10^b=n$与$b=d\left(n\right)$所表示的 b、n 两个量之间的同一关系．如：$10^2=100$，则$d\left(100\right)=2$．

(1)依据劳格数的定义，可知：$d\left(10\right)=1$，$d\left(10^2\right)=2$，那么：$d\left(10^3\right)=$______，$d\left(10^{-2}\right)=$______．

(2)劳格数有如下运算性质：

若 m、n 为正数，则$d(mn)=d(m)+d(n)$，$d\left(\frac{m}{n}\right)=d(m)-d(n)$．

依据运算性质，填空：

$\frac{d\left(a^3\right)}{d(a)}=$______（$a$ 为正数），

若$d\left(3\right)=0.4771$，则$d\left(9\right)=$______，$d\left(\frac{3}{10}\right)=$______．

(3)如表中与数x对应的劳格数$d\left(x\right)$有且只有两个是错误的，请找出错误的劳格数，说明理由并改正．

x	0.8	2	3.2	4	5	8
$d\left(x\right)$	$6a-3b+1$	$2a-b$	$10a-5b$	$4a-2b$	$1-2a+b$	$6a-3b$

【融会贯穿】

1．（2025 春·山东济宁·七班级统考期中）【阅读理解】

对于正整数 n，定义$\left[\sqrt{n}\right]$为不大于$\sqrt{n}$的最大整数，例如：$\left[\sqrt{3}\right]=1$，$\left[\sqrt{4}\right]=2$，$\left[\sqrt{5}\right]=2$．

【问题解答】

(1)直接写出$\left[\sqrt{7}\right]$的值为______；

(2)对 72 进行如下操作：

$72\xrightarrow{\text{第一次}}\left[\sqrt{72}\right]=8\xrightarrow{\text{第二次}}\left[\sqrt{8}\right]=2\xrightarrow{\text{第三次}}\left[\sqrt{2}\right]=1$，即对 72 进行 3 次操作后可变为 1．类似地：对 25 进行______次操作后可变为 1；

(3)先化简，再求值：$-x+\left(2x-2\right)-\left(3x+5\right)$，其中$x=\left[\sqrt{10}\right]$．

2．（2025春·浙江宁波·七班级统考期中）有名数学家笛卡尔创立了虚数的概念：假如一个数的平方等于-1，记为$i^2=-1$，这个数i叫做虚数单位，数学上把形如$a+bi$（a，b为实数，且$b\neq 0$）的数叫作虚数，其中a叫作这个数的实部，b叫作这个数的虚部，它的运算与实数的运算类似．例如：

$(2-i)(5+3i)=10+6i-5i-3i^2=10+(6-5)i-3\times(-1)=13+i$．

依据上述信息，完成下列问题：

(1)填空：i^3 =_________；$i^4=$________；

(2)计算：$(1+i)(3-4i)$；

(3)计算：$i+i^2+i^3+\ldots+i^{2023}$．

3．（2025春·福建三明·七班级统考阶段练习）阅读下列材料，解决相应问题：

“友好数对”

已知两个两位数，将它们各自的十位数字和个位数字交换位置后，得到两个与原两个两位数均不同的新数，若这两个两位数的乘积与交换位置后两个新两位数的乘积相等，则称这样的两个两位数为“友好数对”·例如$43\times 68=34\times 86=2924$，所以43和68与34和86都是“友好数对”．

(1)36和84______“友好数对”．（填“是”或“不是”）

(2)为探究“友好数对”的本质，可设“友好数对”中一个数的十位数字为a，个位数字为b，且a^{1} b；另一个数的十位数字为c，个位数字为d，且$c\neq d$，则a，b，c，d之间存在一个等量关系，其探究和说理过程如下，请你将其补充完整．

解：依据题意，“友好数对”中的两个数分别表示为$10a+b$和$10c+d$，将它们各自的十位数字和个位数字交换位置后两个数依次表示为__________和____________．

由于它们是友好数对，所以$(10a+b)(10c+d)=$______________________．

并试求a，b，c，d的等量关系．

(3)若有一个两位数，十位数字为$x+2$，个位数字为x，另一个两位数，十位数字为$x+2$，个位数字为$x+8$．且这两个数为“友好数对”，直接写出这两个两位数．

4．（2025春·浙江金华·七班级校考期中）材料一：假如一个正整数能表示为两个连续偶数的平方差，那么我们称这个正整数为“连续合数”，如$4=2^2-0^2, 12=4^2-2^2, 20=6^2-4^2$，因此4，12，20这三个数都是“连续合数”．

材料二：对于一个三位自然数，假如十位上的数字恰好等于百位上数字与个位上的数字之和，则称这个三位数为“行知数”例如：在自然数231和132中．$3=2+1$，则231和132都是“行知数”；在自然数396和693中，$9=3+6$，则称396和693是“行知数”．

(1)请推断：36______“连续合数”；（填“是”或“不是”）；

(2)证明：任何一个“连续合数”肯定是4的奇数倍；

(3)已知三位数$\overline{abc}$（其中a、b、c为整数，且$1\le a<3, 0\le c<5$）满足既是“连续合数”，又是“行知数”，求全部符合条件的三位数的值．

5．（2025春·黑龙江绥化·七班级校考期末）阅读理解：我们把$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$称为二阶行列式，规定它的运算法则为$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，例如：$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=2\times5-3\times4=-2$．

(1)填空：若$\begin{vmatrix} -1 & 2x-1 \\ 0.5 & x \end{vmatrix}=0$，则$x=$_____，$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3-x & x \end{vmatrix}>0$，则$x$的取值范围______；

(2)若对于正整数m，n满足，$1<\begin{vmatrix} 1 & n \\ m & 4 \end{vmatrix}<3$，求$m+n$的值；

(3)若对于两个非负数x，y，$\begin{vmatrix} x-1 & y \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & -y \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=k-1$求实数$k$的取值范围．

类型四、二次根式有理化

【解惑】二次根式除法可以这样做：如$\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=7+4\sqrt{3}$．像这样通过分子、分母同乘一个式子把分母中的根号化去或者把根号中的分母化去，叫做分母有理化．有下列结论：

①将式子$\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$进行分母有理化，可以对其分子、分母同时乘以$\sqrt{2}+\sqrt{5}$；

②若a是$\sqrt{2}$的小数部分，则$\dfrac{3}{a}$的值为$\sqrt{2}+1$；

③比较两个二次根式的大小：$\dfrac{1}{\sqrt{6}-2}>\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$；

④计算$\dfrac{2}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{2}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}+\dfrac{2}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}+\cdots+\dfrac{2}{99\sqrt{97}+97\sqrt{99}}=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；

⑤若$x=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，$y=\dfrac{1}{x}$，且$19x^2+123xy+19y^2=1985$，则整数$n=2$．

以上结论正确的是（　）

A．①③④　　B．①④⑤　　C．①②③⑤　　D．①③⑤

【融会贯穿】

1．（2025秋·湖南常德·八班级统考期末）观看下列分母有理

$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}=\dfrac{1\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}=\sqrt{2}-1$ $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ $\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}$，……

从计算结果中找出规律

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2023}+\sqrt{2022}}\right)\left(\sqrt{2023}+1\right)=$______.

2．（2018秋·辽宁本溪·八班级统考期末）观看下列一组式子的变形过程，然后回答问题：

例1：$\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1}=\sqrt{2}-1$

例2：$\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}$，…

（1）$\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$=_；

（2）请你用含n (n为正整数)的关系式表示上述各式子的变形规律；

（3）利用上面的规律，求下面式子的值：$\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2016}}$