

2024-2025 学年四川省巴中市高二上学期入学考试数学检测试题

(一)

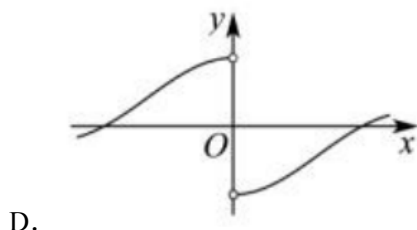
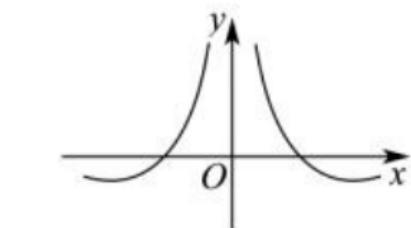
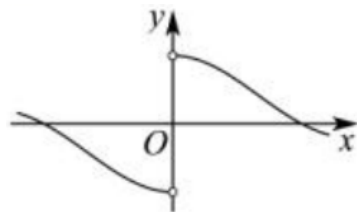
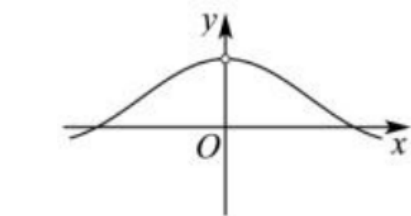
注意事项:

1. 答题前在答题卡上填写好自己的姓名、班级、考号等信息.
2. 答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 写在本试卷上无效.
3. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.

一、单选题: 本题共 8 个小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每个小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求.

1. 设集合 $A = \{x | |x-1| \leq 1\}$, $B = \{x | x^2 - x - 2 \geq 0\}$ 则 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$ ()
A. $(-1, 2)$ B. $[0, 2]$ C. $(0, 2]$ D. $[0, 2)$
2. 复数 $z_1 = a + 2i$, $z_2 = -4 + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, 若 $z_1 + z_2$ 为实数, $z_1 - z_2$ 为纯虚数, 则 $a + b =$ ()
A. 6 B. -6 C. 2 D. -2
3. 命题“ $\exists x \in \mathbb{R}, e^x > \ln x + 1$ ”的否定是 ()
A. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \leq \ln x + 1$ B. $\exists x \in \mathbb{R}, e^x \leq \ln x + 1$
C. $\forall x \notin \mathbb{R}, e^x > \ln x + 1$ D. $\exists x \notin \mathbb{R}, e^x > \ln x + 1$
4. 已知平面 α, β , 直线 $l \subset \alpha$, 直线 m 不在平面 α 内, 下列说法正确的是 ()
A. 若 $\alpha // \beta, m // l$, 则 $m // \beta$ B. 若 $l \perp \beta, m \perp \alpha$, 则 $m // \beta$
C. 若 $l \perp m, \alpha \perp \beta$, 则 $m \perp \alpha$. D. 若 $\alpha // \beta, m \perp \beta$, 则 $m \perp l$
5. 已知一个样本容量为 7 的样本的平均数为 6, 方差为 2, 现在样本中插入三个新的数据 5, 6, 7, 若新样本的平均数为 $\bar{x}$, 方差为 s^2 , 则 ()
A. $\bar{x} = 6, s^2 < 2$ B. $\bar{x} = 6, s^2 = 2$ C. $\bar{x} < 6, s^2 = 2$
D. $\bar{x} > 6, s^2 > 2$

6. 函数 $f(x) = \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{|x|}$ 的部分图像大致是 ()



7. 已知 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $a \cdot \sin A + (c - a) \cdot \sin C = b \cdot \sin B$, 点 D 为 AC 的中点, $DE \perp AC$ 交 AB 于 E , 且 $BC = 4, DE = \sqrt{6}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- A. $4 + 2\sqrt{3}$ B. $3 + \sqrt{3}$ C. $6 + 2\sqrt{3}$
D. $12 + 4\sqrt{3}$

8. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 AB, BC 的中点, 则下列说法中不正确的是 ()

- A. 当三棱锥 $B_1 - BEF$ 的所有顶点都在球 O 的表面上时, 球 O 的表面积为 $\frac{3\pi}{2}$
B. 异面直线 DD_1 与 B_1F 所成的角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
C. 点 P 为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 内一点, 当 $DP \parallel$ 平面 B_1EF 时, DP 的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$
D. 过点 D_1, E, F 的平面截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 所截得的截面周长为 $3\sqrt{2} + \sqrt{5}$

二、多选题: 本题共 3 个小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每个小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的是 ()

A. “射击运动员射击一次，命中靶心”是必然事件

B. 事件发生的可能性越大，它的概率越接近 1

C. 某种中奖的概率是 1%，因此买 100 张该种一定会中奖

D. 任意投掷两枚质地均匀的骰子，则点数和是 3 的倍数的概率是 $\frac{1}{3}$

10. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边为 a, b, c 则下列说法正确的是 ()

A. $\vec{AC} \cdot \vec{CB} > 0$ ，则 $\triangle ABC$ 是锐角三角形

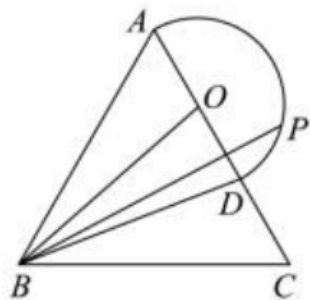
B. 若 $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1$ ，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形

C. 若 $A + B < \frac{\pi}{2}$ ，则 $\sin A + \sin B < \sqrt{2}$

D. 若 $\tan A \tan B > 1$ ，则 $\tan A \tan B \tan C > 1$

11. 如图所示，在边长为 3 的等边三角形 ABC 中， $\vec{AD} = \frac{2}{3} \vec{AC}$ ，且点 P 在以 AD 中点 O 为

圆心， OA 为半径的圆上，，则下列说法正确的是 ()



A. $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$

B. $\vec{BD} = \frac{1}{3} \vec{BA} + \frac{2}{3} \vec{BC}$

C. $\frac{9}{2} \leq \vec{BP} \cdot \vec{BC} \leq 9$

D. $x + y$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{9} + 1$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。把答案填在答题卡上。

12. 已知 $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$, $\vec{b} = (0, 1)$, $\vec{c} = (k, \sqrt{3})$, $2\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 平行，则实数 $k =$ _____.

13. 函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x > 1 \\ \left(4 - \frac{a}{2}\right)x + 2, & x \leq 1 \end{cases}$ 满足对任意实数 $x_1 \neq x_2$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立,

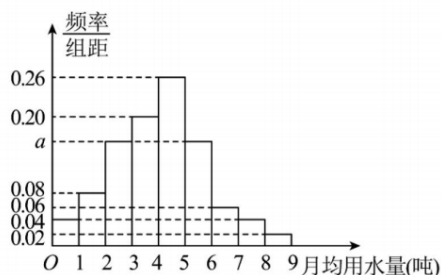
则实数 a 的取值范围为_____.

14. 已知 x_1, x_2 为方程 $x^2 - [\tan\beta - \tan(\alpha + \beta)]x + \frac{2}{3} = 0$ 的两个实数根, 且 $x_1 = 3x_2$, 则

$\tan\alpha$ 的最大值为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤。

15. (13 分) 为了落实习总书记提出的“绿水青山就是金山银山”的环境治理要求，平昌县政府积极鼓励居民节约用水。计划调整居民生活用水收费方案，拟确定一个合理的月用水量标准 x (吨)，一位居民的月用水量不超过 x 的部分按平价收费，超出 x 的部分按议价收费。为了了解居民用水情况，通过抽样，获得某年 200 位居民每人的月均用水量 (单位：吨)，将数据按照 $[0,1), [1,2), \dots, [8,9]$ 分成 9 组，制成如图所示的频率分布直方图。

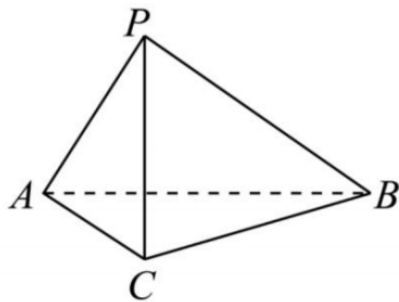


(1) 直方图中 a 的值；

(2) 由频率分布直方图估计平昌县居民月用水量的平均数是多少；

(3) 若平昌县政府希望使 85% 的居民每月的用水量不超过标准 x (吨)，求 x 的估计值。

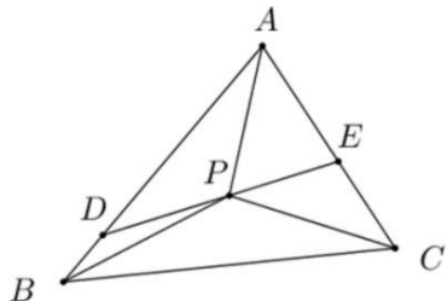
16. (15 分) 如图所示，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $AC = BC, \angle ACB = 90^\circ, AP = BP = AB$.



(1) 求证： $PC \perp AB$ ；

(2) 若点 D 为 AP 的中点, 且 $PC \perp AC$, 求二面角 $P-BC-D$ 的大小.

17. (15 分) 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=5, AC=3, \angle BAC=60^\circ$, 点 D, E 分别在 AB, AC 上且满足 $\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EC}$, P 为线段 DE 上一动点.



(1) 若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$, 求 $5x+6y$ 的值;

(2) 求 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的最小值.

18. (17 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\vec{m}=(\sin A, \sin B - \sin C), \vec{n}=(a-b, b+c)$, 且 $\vec{m} \perp \vec{n}$.

(1) 求角 C 的值;

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且 $c=1$, 求 $\frac{1+\sqrt{3}}{2}a-b$ 的取值范围.

19. (17 分) 已知函数 $f(x)=\log_a \frac{x-2}{x+2}$;

(1) 判断函数奇偶性, 并说明理由;

(2) 求函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$;

(3) 若函数的定义域为 $[\alpha, \beta]$, 值域为 $[\log_a a(\beta-1), \log_a a(\alpha-1)]$, 并且 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上为减函数. 求 a 的取值范围;

数学答案

一、单选题

1. 【正确答案】 D

由题意得: $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $\complement_{\mathbb{R}} B = \{x | -1 < x < 2\}$, 所以 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = \{x | 0 \leq x < 2\}$

2. 【正确答案】 B

因为 $z_1 + z_2 = a - 4 + (2 + b)i$ 为实数, 所以 $b = -2$;

又因为 $z_1 - z_2 = a + 4 + (2 - b)i$ 为虚数, 所以 $a = -4$, 所以 $a + b = -6$, 故选 B.

3. 【正确答案】 A

根据存在量词命题的否定为全称量词命题,

则命题“ $\exists x \in \mathbb{R}, e^x > \ln x + 1$ ”的否定为“ $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \leq \ln x + 1$ ”, 故选 A.

4. 【正确答案】 D

因为 $l \subset \alpha$,

对于 A, 若 $\alpha // \beta, m // l$, 则 m 有可能在 β 内, 故 A 错误;

对于 B, 若 $l \perp \beta, m \perp \alpha$, 则 m 有可能在 β 内, 故 B 错误.

对于 C, 若 $l \perp m, \alpha \perp \beta$, 则 m 的情形比较多, 不一定垂直 α , 故 C 错误;

对于 D, 若 $\alpha // \beta, m \perp \beta$, 则 $m \perp \alpha$, 又 $l \subset \alpha$, 则 $l \perp m$, 故 D 正确;

5. 【正确答案】 A

设原样本的 7 个数据分别为 $x_1, x_2, \dots, x_7$,

插入的三个新数据分别为 $x_8 = 5, x_9 = 6, x_{10} = 7$.

由题意得, $\sum_{i=1}^7 x_i = 42, \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 (x_i - 6)^2 = 2$,

所以 $\bar{x} = \frac{1}{10} (x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) = \frac{1}{10} (42 + 5 + 6 + 7) = 6$,

$s^2 = \frac{1}{10} [(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 6)^2 + \dots + (x_{10} - 6)^2]$

$$= \frac{1}{10} [14 + (5-6)^2 + (6-6)^2 + (7-6)^2] = 1.6 < 2$$

6. 【正确答案】D

$$\text{因为 } f(x) = \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{|x|} = -\frac{\sin x}{|x|} (x \neq 0),$$

$$f(-x) = \frac{\sin x}{|x|} = -f(x), \text{ 所以 } f(x) \text{ 是奇函数, 图象关于原点对称, 由此排除 AC 选项.}$$

$$\text{当 } 0 < x < \pi \text{ 时, } f(x) = -\frac{\sin x}{|x|} < 0, \text{ 排除 B 选项, 所以 D 选项正确.}$$

7. 【正确答案】C

$$\text{因为 } a \cdot \sin A + (c-a) \cdot \sin C = b \cdot \sin B,$$

$$\text{所以由正弦定理得: } a^2 + (c-a)c = b^2, \text{ 所以 } a^2 + c^2 - b^2 = ac,$$

$$\text{由余弦定理得: } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}, \text{ 又因为 } B \in (0, \pi), \text{ 所以 } B = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{又因为点 } D \text{ 为 } AC \text{ 的中点且 } DE \perp AC, \text{ 所以 } AE = CE, \angle ECD = \angle A,$$

$$\text{在 } \triangle DCE \text{ 中, 由正弦定理得: } \frac{CE}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{DE}{\sin A}, \text{ 得 } CE = \frac{\sqrt{6}}{\sin A},$$

$$\text{在 } \triangle BCE \text{ 中, 由正弦定理得: } \frac{CE}{\sin 60^\circ} = \frac{BC}{\sin 2A} = \frac{BC}{2\sin A \cos A}, \text{ 化简得: } \cos A = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{所以 } A = 45^\circ, \text{ 所以 } \angle BEC = 2A = 90^\circ, \text{ 所以 } CE = AE = 2\sqrt{3}, BE = 2, \text{ 所以}$$

$$S_{\triangle ABC} = 6 + 2\sqrt{3}$$

8. 【正确答案】D

对于 A: 三棱锥 $B_1 - BEF$ 的外接球为以 BB_1 、 BE 、 BF 为邻边的长方体的外接球.

$$\text{因为 } BB_1 = 1, BE = BF = \frac{1}{2},$$

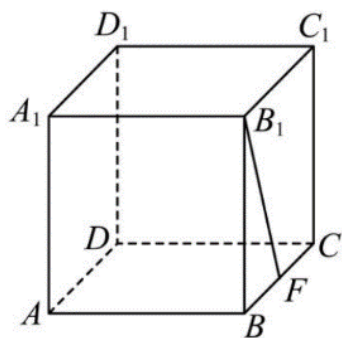
$$\text{可得外接球的半径 } R = \frac{1}{2} \sqrt{B_1B^2 + BE^2 + BF^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \times 2} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

所以外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = \frac{3\pi}{2}$ ，故 A 正确；

对于 B：因为 $DD_1 \parallel BB_1$ ，则异面直线 DD_1 与 B_1F 所成角为 $\angle BB_1F$ ，且 $BB_1 = 1, BF = \frac{1}{2}$ ，

可得 $B_1F = \sqrt{BB_1^2 + BF^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ，所以 $\cos \angle BB_1F = \frac{BB_1}{B_1F} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，

所以异面直线 DD_1 与 B_1F 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，故 B 正确；



对于 C：取 A_1B_1 、 A_1D_1 、 C_1D_1 的中点 M 、 Q 、 N ，连接 AM 、 MN 、 QN 、 DN ，

由题意可得： $AE \parallel B_1M, AE = B_1M$ ，则四边形 AEB_1M 为平行四边形，所以 $B_1E \parallel AM$ 。

因为四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 为正方形， M 、 N 分别为 A_1B_1 、 C_1D_1 的中点，则

$A_1M \parallel D_1N, A_1M = D_1N$ ，

所以四边形 A_1D_1NM 为平行四边形，所以 $MN \parallel A_1D_1, MN = A_1D_1$ 。

又因为 $AD \parallel A_1D_1, AD = A_1D_1$ ，可得 $MN \parallel AD, MN = AD$ ，

则四边形 $AMND$ 为平行四边形，所以 $AM \parallel DN$ ，可得 $B_1E \parallel DN$ 。

因为 $B_1E \subset$ 平面 $B_1EF, DN \not\subset$ 平面 B_1EF ，则 $DN \parallel$ 平面 B_1EF 。

因为 $AA_1 \parallel CC_1, AA_1 = CC_1$ ，则四边形 AA_1C_1C 为平行四边形，则 $AC \parallel A_1C_1$ 。

因为 E 、 F 分别为 AB 、 BC 的中点，则 $EF \parallel AC$ ，

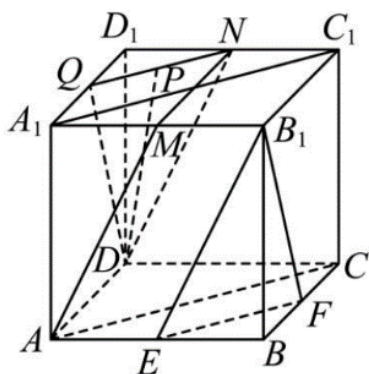
同理可得 $QN \parallel A_1C_1$ ，则 $EF \parallel A_1C_1$ ，可得 $QN \parallel EF$ 。

因为 $EF \subset$ 平面 $B_1EF, QN \not\subset$ 平面 B_1EF ，则 $QN \parallel$ 平面 B_1EF 。

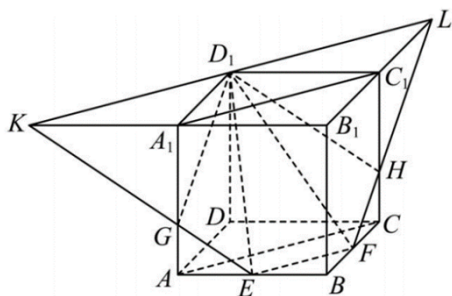
则点 P 在线段 QN 上, 可得

$$QN = \frac{1}{2} A_1 C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, DQ = DN = \sqrt{DD_1^2 + D_1 N^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

此时最小值为 $\sqrt{DQ^2 - \left(\frac{1}{2}QN\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ ，故 C 正确；


$$\text{可得 } D_1G = D_1H = \frac{\sqrt{13}}{3}, GE = HF = \frac{\sqrt{13}}{6}, EF = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以截面周长为 $2 \times \frac{\sqrt{13}}{3} + 2 \times \frac{\sqrt{13}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{13} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，故 D 错误；



二、多选题

9. 【正确答案】BD

【分析】根据事件发生的随机性可以判断 A，C 选项，根据频率与概率的关系可以判断 B 选项，应用古典概型判断 D 选项.

【详解】随机事件的不确定性可以确定 A，C 选项错误，

事件发生的可能性越大，它的概率越接近 1，B 选项正确；

任意投掷两枚质地均匀的骰子基本事件有 36 种情况，

点数和是 3 的倍数的情况有

$(1,2), (1,5), (2,1), (2,4), (3,3), (3,6), (4,2), (4,5), (5,1), (5,4), (6,3), (6,6)$, 12 个基本事件，

概率是 $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ ，故 D 选项正确.

10. 【正确答案】BCD

选项 A: 因为 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} > 0$ ，所以 C 为钝角，故 A 错误；

选项 B: 因为 $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1$ ，所以 $1 - \sin^2 A + 1 - \sin^2 B - 1 + \sin^2 C = 1$ ，化简得

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C,$$

由正弦定理得: $a^2 + b^2 = c^2$ ，所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形，故 B 正确；

选项 C: 因为 $A + B < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $0 < B < \frac{\pi}{2} - A < \frac{\pi}{2}$ ，可得: $0 < A < \frac{\pi}{2}$ ，

又因为 $y = \sin x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单增，所以 $\sin B < \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cos A$ ，

所以 $\sin A + \sin B < \sin A + \cos A = \sqrt{2} \sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$ ，故 C 正确；

选项 D：因为 $\tan A \tan B > 1$ ，所以 A, B 为锐角，

又因为 $\tan C = -\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B - 1} > 0$ ，所以 C 为锐角，

所以 $A+B > \frac{\pi}{2}$ ，可得 $A > \frac{\pi}{2} - B$ ，所以 $\sin A > \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \cos B > 0$

同理可得： $\sin B > \cos C > 0, \sin C > \cos A > 0$ 。

所以 $\sin A \sin B \sin C > \cos A \cos B \cos C > 0$ ，所以 $\tan A \tan B \tan C > 1$ ，故 D 正确。

11. 【正确答案】B C D

对 A：过 P 作直线 BC 的平行线交 BA 于点 E ，则 $\overline{BE} = x \overline{BA}$ ，

所以当 P 与 D 重合时， x 取得最小值，最小值为 $\frac{1}{3}$ ；

当 PE 与半圆相切时， x 取得最大值，此时 $x > 1$ ，所以 A 错误；

对 B：因为 $\overline{AD} = \frac{2}{3} \overline{AC}$ ，且点 P 在以 AD 的中点 O 为圆心， OA 为半径的半圆上，

所以 $OA = OD = DC = \frac{1}{3} AC$ ，

则 $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{BC} + \frac{1}{3} \overline{CA} = \overline{BC} + \frac{1}{3} (\overline{BA} - \overline{BC}) = \frac{1}{3} \overline{BA} + \frac{2}{3} \overline{BC}$ ，故 B 正确；

对 C：过 P 作 $PF \perp BC$ 交于 F ，则 $\overline{BP} \cdot \overline{BC} = \overline{BF} \cdot \overline{BC} = 3 \overline{BF}$ ，

则当 P 与 A 重合时， BF 取得最小值，最小值为 $\frac{3}{2}$ ；

当 PF 与半圆相切时， BF 取得最大值，最大值为 3，

所以 $\frac{9}{2} \leq \overline{BP} \cdot \overline{BC} \leq 9$ ，C 正确；

对 D：用等和线知识可得，当 P 位于与 AC 平行且与半圆相切的直线上时， $x+y$ 最大。

设此线与 BC 交于点 G ，则 $CG = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ，

所以 $x+y$ 的最大值为 $\frac{BG}{BC} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}+3}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}+1$, 即 D 正确.

或者建系: 对 C, D: 如图, 以点 O 为原点建立平面直角坐标系,

则 $A(-1,0), B\left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), C(2,0)$.

因为点 P 在以 AD 的中点 O 为圆心, OA 为半径的半圆上,

所以由三角函数的定义, 可设 $P(\cos\alpha, \sin\alpha), \alpha \in [\pi, 2\pi]$,

则 $\overrightarrow{BP} = \left(\cos\alpha - \frac{1}{2}, \sin\alpha - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{BC} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{BA} = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,

所以 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\cos\alpha - \frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{27}{4} = 3\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + 6$.

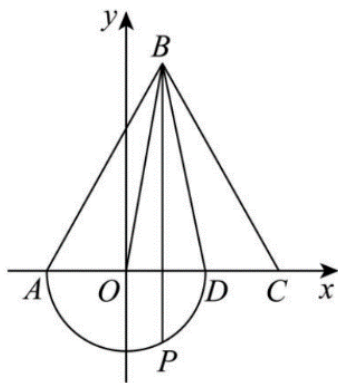
因为 $\alpha \in [\pi, 2\pi]$, 所以 $\alpha + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right]$, 所以 $\frac{9}{2} \leq \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC} \leq 9$, 故 C 正确;

因为 $\overrightarrow{BP} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$, 所以 $\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}, \sin\alpha - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = x\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + y\left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,

即 $\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}, \sin\alpha - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}(x-y), -\frac{3\sqrt{3}}{2}(x+y)\right)$,

所以 $\sin\alpha - \frac{3\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}(x+y)$, 所以 $x+y = -\frac{2\sqrt{3}}{9}\sin\alpha + 1$.

因为 $\alpha \in [\pi, 2\pi]$, 所以当 $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ 时, $x+y$ 取得最大值 $\frac{2\sqrt{3}}{9}+1$, 故 D 正确.



三、填空题

12. 【正确答案】 6

因为 $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1), \vec{b} = (0, 1)$, 则 $2\vec{a} - \vec{b} = 2(\sqrt{3}, 1) - (0, 1) = (2\sqrt{3}, 1)$,

又因 $\vec{c} = (k, \sqrt{3}), 2\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 平行, 于是得 $2\sqrt{3} \times \sqrt{3} - k = 0$, 解得 $k = 6$.

13. 【正确答案】 $[4, 8)$

由题意, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 和 $(1, +\infty)$ 上分别单调递增, 且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上的最高点不高

$$\text{于其在 } (1, +\infty) \text{ 上的最低点, 即 } \begin{cases} a > 1, \\ 4 - \frac{a}{2} > 0, \\ a \geq 4 - \frac{a}{2} + 2, \end{cases} \quad \text{解得 } 4 \leq a < 8$$

14. 【正确答案】 $12\sqrt{2}$

因为 x_1, x_2 为方程 $x^2 - [\tan\beta - \tan(\alpha + \beta)]x + \frac{2}{3} = 0$ 的两个实数根, 且 $x_1 = 3x_2$,

$$\text{所以 } \begin{cases} x_1 x_2 = \frac{2}{3}, \\ x_1 = 3x_2 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \\ x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}.$$

记 $\tan\beta - \tan(\alpha + \beta) = m = x_1 + x_2$, 所以 $\tan\beta - \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = m$,

即 $\tan\alpha \cdot \tan^2\beta - m \tan\alpha \cdot \tan\beta + m + \tan\alpha = 0$,

而此方程有解需满足 $\Delta = m^2 \tan^2\alpha - 4 \tan\alpha (m + \tan\alpha) = (m^2 - 4) \tan^2\alpha - 4m \tan\alpha \geq 0$.

因为 $m^2 - 4 = -\frac{4}{9}$, 所以 $\tan\alpha \leq 12\sqrt{2}$, 当 $\begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \\ x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$ 时取到等号. 故答案为 $12\sqrt{2}$.

四、解答题

15. (1) 由 $0.04 + 0.08 + a + 0.20 + 0.26 + a + 0.06 + 0.04 + 0.02 = 1$, 解得: $a = 0.15$.

(2) 长寿区居民月用水量的平均数

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (0.5 + 7.5) \times 0.04 + 1.5 \times 0.08 + (2.5 + 5.5) \times 0.15 + 3.5 \times 0.20 + 4.5 \times 0.26 + 6.5 \times 0.06 + 8.5 \times 0.02 \\ &= 4.07 \text{ (吨)}. \end{aligned}$$

(3) 因 $[0, 5)$ 的频率为 $0.04 + 0.08 + 0.15 + 0.20 + 0.26 = 0.73 < 0.85$, $[0, 6)$ 的频率

$$0.73 + 0.15 = 0.88 > 0.85,$$

由题意得 $0.15(x - 5) + (0.04 + 0.08 + 0.15 + 0.20 + 0.26) \times 1 = 0.85$, 得 $x = 5.8$ 吨. 所以有

85% 的居民每月的用水量不超过标准 5.8 (吨).

16. (1) 取 AB 的中点 E , 连接 PE, CE .

因为 $AP = BP, E$ 为 AB 中点, 所以 $PE \perp AB$.

又因为 $AC = BC, E$ 为 AB 中点, 所以 $CE \perp AB$.

又因为 $PE \cap CE = E$, 所以 $AB \perp$ 面 PCE .

又因为 $PC \subset$ 面 PCE , 所以 $PC \perp AB$.

(2) 由 (1) 知: $PC \perp AB$,

又因为 $PC \perp AC$ 且 $AB \cap AC = A$, 所以 $PC \perp$ 面 ABC .

又因为 $PC \subset$ 面 PCB , 所以面 $PCB \perp$ 面 ABC .

又因为 $BC \perp AC, BC \perp PC$ 且 $AC \cap PC = C$, 所以 $BC \perp$ 面 ACP , 所以 $BC \perp CD$.

所以二面角 $D-BC-P$ 的平面角为 $\angle DCP$.

又因为 $AP = BP = AB$ 且 $AC = BC$, 所以 $PC = AC$, 所以 $\triangle PCA$ 为等腰直角三角形.

又因为点 D 为 AP 的中点, 所以 $\angle DCP = 45^\circ$,

所以二面角 $P-BC-D$ 的大小为 45° .

17. (1) 因为 $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EC}$, 且 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AP} = \frac{5x}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{3y}{2}\overrightarrow{AE}.$$

又因为 D, P, E 三点共线, 所以 $\frac{5x}{4} + \frac{3y}{2} = 1$, 所以 $5x + 6y = 4$.

(2) 由 (1) 知: $5x + 6y = 4$, 得到 $y = \frac{4-5x}{6}$,

$$\text{因为 } \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} = -x\overrightarrow{AB} - y\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = (1-x)\overrightarrow{AB} - y\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} = -x\overrightarrow{AB} - y\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = -x\overrightarrow{AB} + (1-y)\overrightarrow{AC},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = [(1-x)\overrightarrow{AB} - y\overrightarrow{AC}] \cdot [-x\overrightarrow{AB} + (1-y)\overrightarrow{AC}]$$

$$= (x^2 - x) \|\overrightarrow{AB}\|^2 + (y^2 - y) \|\overrightarrow{AC}\|^2 + (1-x-y+2xy) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

又因为 $AB=5, AC=3, \angle BAC=60^\circ$, 所以 $|\overrightarrow{AB}|^2=25, |\overrightarrow{AC}|^2=9, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{15}{2}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = 25(x^2 - x) + 9(y^2 - y) + \frac{15}{2}(1 - x - y + 2xy).$$

$$\text{又因为 } y = \frac{4-5x}{6}, \text{ 所以 } \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \frac{75}{4}x^2 - \frac{75}{4}x + \frac{1}{2},$$

$$\text{又因为 } 0 \leq x \leq \frac{4}{5}, \text{ 所以当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时, } (\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC})_{\min} = -\frac{67}{16}.$$

$$18. (1) \text{ 因为 } \vec{m} = (\sin A, \sin B - \sin C), \vec{n} = (a - b, b + c), \text{ 且 } \vec{m} \perp \vec{n},$$

$$\text{所以 } (a - b)\sin A + (b + c)(\sin B - \sin C) = 0$$

$$\text{利用正弦定理化简得: } a(a - b) + (b - c)(b + c) = 0 \text{ 即 } a^2 + b^2 - c^2 = ab,$$

$$\text{由余弦定理可得 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2},$$

$$\text{又因为 } C \in (0, \pi), \text{ 所以 } C = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } A + B = \frac{2\pi}{3}, \text{ 即 } B = \frac{2\pi}{3} - A,$$

$$\text{又因为 } \triangle ABC \text{ 为锐角三角形, 所以 } \begin{cases} 0 < \frac{2\pi}{3} - A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < A < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \text{ 解得: } \frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{因为 } c=1, \text{ 由正弦定理得: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ 所以 } a = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin A,$$

$$b = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin B$$

$$\text{所以 } \frac{1+\sqrt{3}}{2}a - b = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \sin A - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin B$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \sin A - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} + A \right) = \sin A - \cos A = \sqrt{2} \sin \left(A - \frac{\pi}{4} \right),$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/878010141011007046>