

物理竞赛中的微积分

Calculus for Physics

第 1 讲. 极限和导数

Chapter 1. Limits and Derivatives

第一部分 数列极限

🕒 知识点睛

先思考这个问题 $0.9999\dots$ 和 1 哪个大？

纯洁而朴素的想法如下： $0.9 < 1$, $0.99 < 1$, $0.999 < 1$, 所以无限循环小数 $0.9999\dots$ 小于 1 。然而事实并非如此。令 $x = 0.9999\dots$, 则有：

$$10x = 9.9999\dots$$

$$x = 0.9999\dots$$

相减得到：

$$9x = 9$$

所以 $x = 1 = 0.9999\dots$

为了解释这样的事情，我们做如下分析，构造数列 a_n ：

$$a_n = 0.99\dots 9$$

n

显然数列里面的每一项都是小于 1 的。但是 $0.9999\dots$ 并不在这个数列中。因为数列里面每一项都是有限小数， $0.9999\dots$ 是无限小数。当项数 n 不断增大的时候 a_n 不断靠近 $0.9999\dots$ ，却一直不等于 $0.9999\dots$ 。

但是并不是所有的和无穷有关的东西我们都能这样随意的操作。例如我们思考下面这个问题：

求出： $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$

有个同学这样思考：

$$2S = 2 + 4 + 8 + \dots$$

于是有 $S - 2S = 1$

得到 $S = -1$

是不是泪奔的感觉……所以，要想准确的说清楚和无穷有关的问题，是很困难的。历史上实际的情况也是先给出了微积分大概的轮廓，才最终给出微积分的理论根基——极限的准确定义。

数学上这样定义数列的极限：

如果存在一个实数 p 使得：对于任意的实数 $\varepsilon > 0$ ，都存在一个整数 n ，使得对于任意 $m > n$ ， $|a_m - p| < \varepsilon$ ，那么就叫 p 是数列 a_n 的极限，记作 $p = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。否则叫数列 a_n 没有极限。

可以这样形象地理解这个定义：当 n 很大的时候， a_n 与 p 要多靠近就有多靠近； n 越大， a_n 与 p 就越靠近。但是并不要求 a_n 要等于 p 。

回到刚才的例子， $0.9999\dots$ 是数列 $a_n = 0.99\dots 9$ 的极限。证明如下：

对于任意一个实数 $\varepsilon > 0$ ，总有一个整数 n 使得 $\varepsilon > 10^{-n}$ ，则对于 $m > n$ ，
 $|a_m - 0.999\dots| = 0.00\dots 099\dots < 0.00\dots 01 < \varepsilon$ 。按照极限的定义 $0.9999\dots$ 是数列的极限，
 同理 1 也是数列的极限，二者是相等的。

不加证明的给出几个定理（高数都有很容易证明），有兴趣的同学可以自己证明：

[定理] 如果数列存在极限 p_1 和 p_2 ， $p_1 = p_2$

[定理] 如果数列的极限存在，则其无穷子数列极限存在，并于原数列相等。

[定理] 单调有界数列一定存在极限

[定理] [夹逼定理] 如果数列 $a_n \leq b_n \leq c_n$ ，并且 a_n, c_n 的极限都是 p ，则 b_n 的极限也是 p

[定理] 如果数列的极限存在，那么其子数列极限一定存在并且与原极限相等

注意：数列的极限反映的是数列的变化趋势，是一个数，这个数并不要求在这个数列中出现。

下面给出一些运算时常用的定理：

[定理] 如果两数列分别存在极限 p_1 、 p_2 ，则两数列和数列的极限为 $p_1 + p_2$

[定理] 如果两数列分别存在极限 p_1 、 $p_2 \neq 0$ ，则两数列商数列的极限为 p_1 / p_2

一般在实际计算极限的时候不会真的按照定义证明，而是使用一些现有的结论简化计算。
 通常计算极限的方法：如果一个数列的极限存在，并且满足一元初等运算的条件（例如根号下面数大于等于 0，对数的底数大于 0，不等于 1），则做一元运算后的极限（如果存在），等于先取数列的极限，然后对极限进行一元运算的结果，例如指数、对数、三角函数；如果两数列分别存在极限，则在满足二元初等运算一般条件的时候，两个数列二元运算后数列记得极限（如果存在）等于两数列取极限然后再做二元运算，例如加法、乘法、除法、乘方等。

如果发现表达式的某些部分不满足以上条件的时候，而整体的极限可能存在，例如形如 $0/0$ 、无穷/无穷、无穷-无穷，应当设法将发散的其他部分组和，以期望得到可以判定的结果。

④例题精讲

【例1】一尺之棰,日取其半,万世不竭。做出数列 a_n 等于第 n 天的捶的长度。使用极限的定义证明该数列的极限为0。

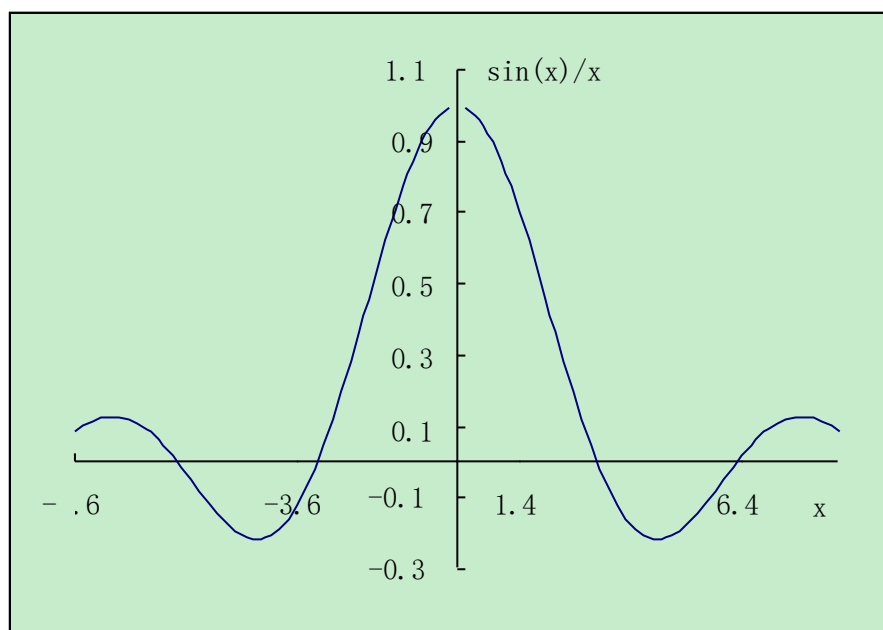
【例2】把一个篮球从离地面5米高的地方静止释放,假设其受的阻力大小恒定,为重力的二分之一,篮球落地后与地面碰撞过程中能量几乎不损失,计算篮球最后的总路程。

第二部分 函数极限

④知识点睛

有时候我们关心,当函数的自变量趋于某一个位置的时候,函数值的变化趋势。例如观察函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 的图像。这个函数在 $x=0$ 的位置没有定义,但是当 x 趋于0的时候,函数值平稳的趋近于1。见下表:

x	$\sin(x)/x$
1	0.84147098
0.1	0.99833417
0.01	0.99998333
0.001	0.99999983



我们用以下的方法描述函数在某一点的渐进性为:

对于函数 $f(x)$, 如果其在区间 $(x_0, x_0 + \alpha)$, $\alpha > 0$ 内有定义, 并且存在 p 使得, 对

于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $0 < \beta < \alpha$, 使得对于任意 $x \in (x_0, x_0 + \beta)$, $|f(x) - p| \leq \varepsilon$, 那么称

$f(x)$ 在 x_0 点处存在右极限 p , 记做 $p = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

类似的可以定义左极限, $p' = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, 如果左极限等于右极限, 则不区分二者, 直接称

为函数在 x_0 存在极限, 记做: $p = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 。对于连续函数, 定义域内极限总是存在的,

并且有左极限等于右极限, 并且就等于其自身在那一点的函数值。数列极限的各种运算法则和定理一般情况下都适用于函数极限的运算。

类似的, 可以定义函数在无穷远点的极限:

一个函数在区间 $x \in (A, \infty)$ 内有定义, A 为任意实数, 如果存在 p 使得, 对于任意 $\varepsilon > 0$,

存在 B , 使得对于任意 $x > B$, 有 $|f(x) - p| \leq \varepsilon$, 那么称 $f(x)$ 当 x 趋于正无穷时有极限 p ,

记为 $\lim_{x \rightarrow \infty^+} f(x) = p$ 。类似的可以定义 $f(x)$ 当 x 趋于负无穷时有极限 p , 记为

$\lim_{x \rightarrow \infty^-} f(x) = p$ 。

有时候当 x 趋近于某个数, 或者 x 趋向于无穷大时, 函数值“要多大有多大”(其实就是把极限定义中的 $|f(x) - p| \leq \varepsilon$ 换为 $|f(x) - p| \geq \varepsilon$), 这时候形象的记做: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 。

读作 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 趋向于无穷。例如 $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x-8} = \infty$ 。这代表 $f(x)$ 在这一点的极限不存在,

并且是以趋向于无穷的方式不存在。一个极限不存在并不意味着它趋于无穷, 例如

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$, 这个函数的极限并不存在, 而且它也不趋向于无穷, 而是在 -1 到 1 之间来回振荡。

和计算数列的极限一样, 实际计算函数极限的时候也不会每次都用极限的定义计算。实际操作的时候会先观察极限存在的情况。有一些基本的函数直接知道极限的情况。例如

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n$, $n \geq 1$ 时趋于无穷, $1 > n > 0$ 时等于 0。然后尽量把函数化成几部分的初等运算,

而每一个部分极限都是存在的, 并且使部分之间的运算不出现发散。这时候可以先求每一部分的极限, 然后再对各部分的极限进行初等运算, 得到最后的极限。

极限在物理学中的应用是广泛的。回忆秋季第一讲, 瞬时速度、瞬时加速度都是利用极限定义的:

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}; \quad a_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}$$

例如对于匀加速直线运动:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/878050114027006034>