4.2.2 等差数列的前n项和公式的性质（3）

复习引入 求等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n的最值的方法

1. 前n项和公式法

利用$S_n=An^2+Bn$ 进行配方，求二次函数的最值，

此时n应取最接近$-\frac{B}{2A}$的正整数值；

2. 通项公式法 利用等差数列的增减性及a_n的符号变化

(1) 当$a_1>0,d<0$ 时，数列前面有若干项为正，此时所有正项的和为S_n的最大值．此时由$a_n\geqslant0$且$a_{n+1}\leqslant0$求n的值；

(2) 当$a_1<0,d>0$ 时，数列前面有若干项为负，此时所有负项的和为S_n的最小值．此时由$a_n\leqslant0$且$a_{n+1}\geqslant0$ 求n的值；

注意：当数列的项中有数值为0时， n应有两解.

探究新知

探究一：如果数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=pn^2+qn+r$，其中p, q, r为常数，且$p\neq0$，那么这个数列一定是等差数列吗?若是，则它的首项与公差分别是什么?

证： 当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=pn^2+qn+r-p(n-1)^2-q(n-1)-r$

$=2pn-p+q$

当$n=1$时，$a_1=S_1=p+q+r$

当$r\neq0$时，a_1不满足$a_n=2pn-p+q$，此时数列不是等差数列.

当且仅当$r=0$时，a_1满足$a_n=2pn-p+q$，此时该数列是等差数列.

故只有当$r=0$时该数列才是等差数列，其中首项$a_1=p+q$，公差$d=2p(p\neq0)$，

性质1：数列$\{a_n\}$是等差数列$\Leftrightarrow S_n=An^2+Bn(A,B$ 为常数)

小试牛刀

1. 已知等差数列{a,}的n项和为S,, 且So=310,S_{20}=1220, 求S_{30}

解：设$S_n=An^2+Bn$ (A, B 为常数).

由题意，得$\begin{cases} 310=100A+10B, \\ 1\,220=400A+20B, \end{cases}$ 解得$\begin{cases} A=3, \\ B=1. \end{cases}$

∴$S=3n^2+n$.

∴$S_{30}=3\times900+30=2730$.

转化为关于n 的二次方程组求解

小试牛刀

2. 已知数列$\{a_n\}$的n项和为$S_n=\frac{1}{4}n^2+\frac{2}{3}n+3$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解：当n≥2时，

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{4}n^2+\frac{2}{3}n+3-[\frac{1}{4}(n-1)^2+\frac{2}{3}(n-1)+3]$$
$$=\frac{1}{2}n+\frac{5}{12}$$

当$n=1$时，$a_1=S_1=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+3=\frac{47}{12}$，不满足上式

故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases}\frac{47}{12}, n=1\\ \frac{1}{2}n+\frac{5}{12}, n\geq 2\end{cases}$

探究新知

探究二：

[illegible] $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ [illegible] [illegible] $\dfrac{d}{2}$.　　性质2

证明：$\because S_n = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d = \dfrac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \dfrac{d}{2}\right)n$

$$\therefore \frac{S_n}{n} = \frac{d}{2}n + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = \frac{d}{2}n + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) - \left[\frac{d}{2}(n-1) + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)\right] = \frac{d}{2}$$

致 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是公差为 $\dfrac{d}{2}$ 的等差数列.

小试牛刀

1. 已知等差数列{a,}的n项和为S,, 且S₁o=310,S₂o=1220, 求S₃o

解：由 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，得 $\frac{S_n}{n}=a_1+(n-1)\frac{d}{2}$；

∴ $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是 以a_1 为首项，$\frac{d}{2}$ 为公差的等差数列，

转化为 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 等差数列

∴ $\frac{S_{10}}{10},\frac{S_{20}}{20},\frac{S_{30}}{30}$ 成等差数列，

∴ $\frac{S_{10}}{10}+\frac{S_{30}}{30}=2\times\frac{S_{20}}{20}$，

∴ $S_{30}=30\left(\frac{S_{20}}{10}-\frac{S_{10}}{10}\right)=30\times(122-31)=2\ 730.$

探究新知

探究三[redacted]$\{a_n\}$[redacted]d，S_n[redacted]n[redacted]，[redacted]S_m，

S_2m-Sm, S_3m-S_n[redacted] m^2d. 性质3

证明：∵ Sm=a₁+a₂+…+a,

∴ $S_2m-Sm=Ql+Q+2+\dots+a_2m=(a_1+a_2+\dots+am)+m^2d$

$S_3m-S_2m=Q_2m+I+Q_2m+2+\dots+Q_3m=(aw+l+Qm+2+\dots+a_2m)+m^2d$

∴ $(S_2m-Sm)-S=(Ssm-S_2m)-(S_2m-S)=m^2d$

∴ $S,S_2m-S,Ss-S_2$" 构成等差数列，公差为 m^2d.

小试牛刀

1. 已知等差数列$\{a_n\}$的n项和为S_n，且$S_{10}=310$, $S_{20}=1220$, 求S_{30}

解： ∵数列{an}为等差数列，

∴S_{10},$S_{20}-S_{10}$,$S_{30}-S_{20}$ 也成等差数列，

∴$2(S_{20}-S_{10})=S_{10}+S_{30}-S_{20}$,

即$2\times(1220-310)=310+S_{30}-1220$,

∴$S_{30}=2730$.

转化为S_{10},$S_{20}-S_{10}$,$S_{30}-S_{20}$ 成等差数列

小试牛刀

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知第1项到第10项的和为310, 第11项 到第20项的和为910, 求第21项到第30项的和.

解：∵数列$S_{10}, S_{20}-S_{10}, S_{30}-S_{20}$构成等差数列.

$\therefore 2\times 910=310+(S_{30}-S_{20})$

$\therefore S_{30}-S_{20}=1510$

故第21项到第30项的和为1510.

探究新知

探究四：若数列a,},{b,}都为等差数列它们的前项和分别为s,,T,

则 $\dfrac{a_m}{b_n}=\dfrac{2n-1}{2m-1}\cdot\dfrac{S_{2m-1}}{T_{2n-1}}$ 性质4

证明：$\dfrac{a_m}{b_n}=\dfrac{2a_m}{2b_n}=\dfrac{a_1+a_{2m-1}}{b_1+b_{2n-1}}$

$$=\frac{\dfrac{(2m-1)(a_1+a_{2m-1})}{2}\cdot\dfrac{1}{2m-1}}{\dfrac{(2n-1)(b_1+b_{2n-1})}{2}\cdot\dfrac{1}{2n-1}}$$

$$=\frac{(2n-1)S_{2m-1}}{(2m-1)T_{2n-1}}$$

当m=n 时，公式变化?

a=S 2 -

b T_{2n-1}

小试牛刀

已知{an},{bn}均为等差数列，其前n 项和分别为Sn,T,

且 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n+2}{n+3}$，则 $\frac{a_5}{b_5}=$ $\underline{\quad\frac{5}{3}\quad}$.