

圆的方程 习题（含答案）

一、单选题

1. 以点 $P(2, -3)$ 为圆心, 并且与 y 轴相切的圆的方程是()

A. $(x+2)^2+(y-3)^2=4$

B. $(x+2)^2+(y-3)^2=9$

C. $(x-2)^2+(y+3)^2=4$

D. $(x-2)^2+(y+3)^2=9$

2. 当点 P 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上运动时, 连接它与定点 $Q(3,0)$, 线段 PQ 的中点 M 的轨迹方程是 ()

A. $(x+3)^2 + y^2 = 1$ B. $(x-3)^2 + y^2 = 1$

C. $(2x-3)^2 + 4y^2 = 1$ D. $(2x+3)^2 + 4y^2 = 1$

3. 圆 $x^2+y^2-(4m+2)x-2my+4m^2+4m+1=0$ 的圆心在直线 $x+y-4=0$ 上, 那么圆的面积为()

A. 9π B. π C. 2π D. 由 m 的值而定

4. 圆 $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x = 0$ 的半径是 ()

A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4

5. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0$ 相交于 A、B 两点, 则线段 AB 的垂直平分线的方程为

A. $x + y - 3 = 0$ B. $x + y + 3 = 0$ C. $3x - 3y + 4 = 0$ D.

$7x + y - 9 = 0$

6. 若点 P 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的一个动点, 点 $A(-1,0)$, $B(1,0)$ 为两个定点, 则 $|PA| + |PB|$ 的最大值为 ()

A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$

7. 已知直线 $l: x + ay - 1 = 0 (a \in R)$ 是圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 的对称轴. 过点 $A(-4, a)$ 作圆 C 的一条切线, 切点为 B , 则 $|AB| = ()$

A. 2 B. $4\sqrt{2}$ C. 6 D. $2\sqrt{10}$

8. 若直线 $l: ax+by+1=0$ 经过圆 $M: x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ 的圆心则

$(a-2)^2 + (b-2)^2$ 的最小值为

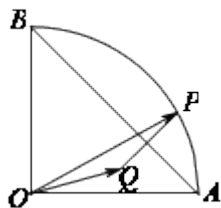
A. $\sqrt{5}$ B. 5 C. $2\sqrt{5}$ D. 10

9. 若 x, a, b 均为任意实数, 且 $(a+2)^2 + (b-3)^2 = 1$, 则 $(x-a)^2 + (\ln x - b)^2$ 的最小值为 ()

- A. $3\sqrt{2}$ B. 18 C. $3\sqrt{2}-1$ D. $19-6\sqrt{2}$

二、填空题

10. 如图, 扇形 AOB 的圆心角为 90° , 半径为1, 点 P 是圆弧 AB 上的动点, 作点 P 关于弦 AB 的对称点 Q , 则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 的取值范围为_____.



11. 已知 x, y 满足 $x^2 - 4x - 4 + y^2 = 0$, 则 $x^2 + y^2$ 的最大值为_____

12. 若直线 $l: 2ax - by + 2 = 0 (a > 0, b > 0)$ 与 x 轴相交于点 A , 与 y 轴相交于 B , 被圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 截得的弦长为4, 则 $|OA| + |OB| (O$ 为坐标原点)的最小值为_____.

13. 设直线 $y = x + 2a$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 2ay - 2 = 0$ 相交于 A, B 两点, 若 $|AB| = 2\sqrt{3}$, 则圆 C 的面积为_____.

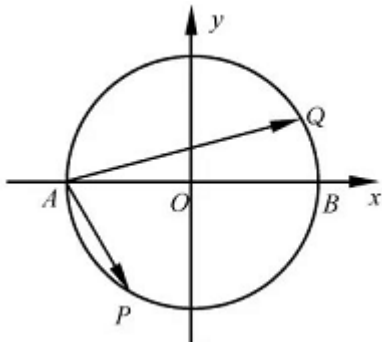
14. 已知圆的圆心在曲线 $xy = 1 (x > 0)$ 上, 且与直线 $x + 4y + 13 = 0$ 相切, 当圆的面积最小时, 其标准方程为_____.

15. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知过点 $A(2, -1)$ 的圆 C 和直线 $x + y = 1$ 相切, 且圆心在直线 $y = -2x$ 上, 则圆 C 的标准方程为_____.

16. 已知圆 C 的圆心在直线 $2x - y = 0$ 上, 且经过 $A(6, 2), B(4, 8)$ 两点, 则圆 C 的标准方程是_____.

17. 在平面直角坐标系中, 三点 $O(0, 0), A(2, 4), B(6, 2)$, 则三角形 OAB 的外接圆方程是_____.

18. 如图, O 是坐标原点, 圆 O 的半径为1, 点 $A(-1, 0), B(1, 0)$, 点 P, Q 分别从点 A, B 同时出发, 圆 O 上按逆时针方向运动. 若点 P 的速度大小是点 Q 的两倍, 则在点 P 运动一周的过程中, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 的最大值是_____.



三、解答题

19. 设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过 F 且斜率为 $k (k > 0)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB| = 8$.

(1) 求 l 的方程;

(2) 求过点 A, B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

20. 已知圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 7 = 0$ 内一点 $P(-1, 2)$, 直线 l 过点 P 且与圆 C 交于 A, B 两点.

(1) 求圆 C 的圆心坐标和面积;

(2) 若直线 l 的斜率为 $\sqrt{3}$, 求弦 AB 的长;

(3) 若圆上恰有三点到直线 l 的距离等于 $\sqrt{2}$, 求直线 l 的方程.

21. 已知点 $M(x_0, y_0)$ 在圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上运动, 且存在一定点 $N(6, 0)$, 点 $P(x, y)$ 为线段 MN 的中点.

(1) 求点 P 的轨迹 C 的方程;

(2) 过 $A(0, 1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与点 P 的轨迹 C 交于不同的两点 E, F , 是否存在实数 k 使得 $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OF} = 12$, 并说明理由.

22. 已知圆经过 $(2, 5), (-2, 1)$ 两点, 并且圆心在直线 $y = \frac{1}{2}x$ 上.

(1) 求圆的方程;

(2) 求圆上的点到直线 $3x - 4y + 23 = 0$ 的最小距离.

23. 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 $y = x^2 - 6x + 1$ 与坐标轴的交点都在圆 C 上.

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 若圆 C 与直线 $x - y + a = 0$ 交于 A, B 两点, 且 $OA \perp OB$, 求 a 的值.

24. 已知点 $A(1, -2), B(-1, 4)$, 求

(1) 过点 A, B 且周长最小的圆的方程;

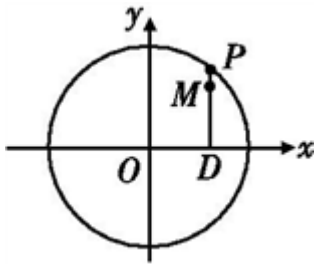
(2) 过点 A, B 且圆心在直线 $2x - y - 4 = 0$ 上的圆的方程.

25. 已知 $Rt \triangle ABC$ 的顶点 $A(8, 5)$, 直角顶点为 $B(3, 8)$, 顶点 C 在 y 轴上;

- (1) 求顶点 C 的坐标;
 (2) 求 $Rt \triangle ABC$ 外接圆的方程.

26. 如图, 设 P 是圆 $x^2 + y^2 = 25$ 上的动点, 点 D 是 P 在 x 轴上的投影, M 为线段 PD 上一点, 且 $|MD| = \frac{4}{5}|PD|$,

- (1) 当 P 在圆上运动时, 求点 M 的轨迹 C 的方程;
 (2) 求过点 $(3, 0)$ 且斜率为 $\frac{4}{5}$ 的直线被轨迹 C 所截线段的长度.



27. 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 在同一平面直角坐标系中, 将曲线

C 上的点按坐标变换 $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases}$ 得到曲线 C' .

- (I) 求曲线 C' 的普通方程;
 (II) 若点 A 在曲线 C' 上, 点 $B(3, 0)$, 当点 A 在曲线 C' 上运动时, 求 AB 中点 P 的轨迹方程.

参考答案

1. C

【解析】

【分析】

因为与 y 轴相切，所以可知圆的半径 $r = 2$ ，根据圆心坐标，可得圆的标准方程。

【详解】

圆心为 $(2, -3)$ 并且与 y 轴相切

所以半径 $r = 2$

所以圆的方程为 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$

所以选 C

【点睛】

本题考查了根据圆心坐标和半径写出圆的方程，属于基础题。

2. C

【解析】

【分析】

设动点 $P(x_0, y_0)$ ， PQ 的中点为 $M(x, y)$ ，由中点坐标公式解出 $x_0 = 2x - 3$ ， $y_0 = 2y$ ，将点 $P(2x - 3, 2y)$ 代入已知圆的方程，化简即可得到所求中点的轨迹方程。

【详解】

设动点 $P(x_0, y_0)$ ， PQ 的中点为 $M(x, y)$ ，可得
$$\begin{cases} x = \frac{x_0 + 3}{2} \\ y = \frac{y_0}{2} \end{cases}$$
，得 $x_0 = 2x - 3$ ， $y_0 = 2y$ 。

\because 点 $P(x_0, y_0)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上运动

$\therefore (2x - 3)^2 + (2y)^2 = 1$ ，化简得 $(2x - 3)^2 + 4y^2 = 1$ 。

\therefore 所求动点 M 的轨迹方程是 $(2x - 3)^2 + 4y^2 = 1$ 。

故选 C。

【点睛】

求轨迹方程的常用方法：

(1) 直接法：直接利用条件建立 x ， y 之间的关系 $F(x, y) = 0$ ；

(2) 待定系数法：已知所求曲线的类型，求曲线方程；

(3) 定义法：先根据条件得出动点的轨迹是某种已知曲线，再由曲线的定义直接写出动点的轨迹方程；

(4) 代入(相关点)法: 动点 $P(x,y)$ 依赖于另一动点 $Q(x_0,y_0)$ 的变化而运动, 常利用代入法求动点 $P(x,y)$ 的轨迹方程.

3. B

【解析】

【分析】

由圆的方程求出圆心坐标, 代入直线方程求出 m 的值, 求出圆的方程后并配方求圆的半径, 代入圆的面积求解即可.

【详解】

\therefore 圆的方程是: $x^2+y^2-(4m+2)x-2my+4m^2+4m+1=0$,

\therefore 圆心坐标是 $(2m+1, m)$,

\therefore 圆心在直线 $x+y-4=0$ 上, $\therefore 2m+1+m-4=0$, 解得 $m=1$,

则圆的方程是: $x^2+y^2-6x-2y+9=0$, 即 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$,

\therefore 半径 $r=1$, 圆的面积 $S=\pi r^2=\pi$,

故选: B.

【点睛】

本题考查由圆的一般式方程求圆心和半径的方法: 公式法和配方法, 属于基础题.

4. A

【解析】分析: 一般方程转化为标准方程, 即可得到半径值.

详解: 把一般方程转化为圆的标准方程 $(x+\sqrt{2})^2+y^2=2$

由标准方程, 可知半径为 $\sqrt{2}$

所以选 A

点睛: 本题考查了圆的一般方程与标准方程的转化, 根据标准方程求圆心或半径, 属于基础题.

5. A

【解析】

【分析】

两个圆相减, 可得交点弦所在的直线方程; 再由弦的垂直平分线过圆心及斜率关系, 求得 AB 的垂直平分线方程.

【详解】

圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0$ 相交于 A、B 两点

所以 AB 所在的直线方程为两个方程相减，得 $3x - 3y + 4 = 0$

AB 垂直平分线的斜率为 $x + y + b = 0$

圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ 的圆心为 (1, 2)

将 (1, 2) 代入 $x + y + b = 0$ 解得 $b = -3$

所以 AB 的垂直平分线的方程为 $x + y - 3 = 0$

所以选 A

【点睛】

本题考查了圆方程的简单应用，注意相关性质的用法，属于基础题。

6. B

【解析】 $\because \angle APB = 90^\circ$, $\therefore |PA|^2 + |PB|^2 = 4$

由不等式可得 $\left(\frac{|PA| + |PB|}{2}\right)^2 \leq \frac{|PA|^2 + |PB|^2}{2} = 2$

$\therefore |PA| + |PB| \leq 2\sqrt{2}$

故选：B

7. C

【解析】试题分析：直线 l 过圆心 (2, 1)，所以 $a = -1$ ，所以切线长

$AB = \sqrt{(-4)^2 + 1 - 4 \times (-4) + 2 + 1} = 6$ ，选 C.

考点：切线长



8. B

【解析】由圆的方程知圆心为 (-2, -1)，所以 $2a + b = 1$ ， $(a - 2)^2 + (b - 2)^2$ 的几何意义为直线 $2a + b = 1$ 上的动点 (a, b) 与定点 (2, 2) 的距离的平方，故过点 (2, 2) 向直线

$2a + b = 1$ 作垂线段，其长的平方最小，最小值为 $d^2 = \left(\frac{4 + 2 - 1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 5$ ，故选 B.

9. D

【解析】

【分析】

该题可以看做是圆上的动点到曲线 $y = \ln x$ 上的动点的距离的平方的最小值问题，可以转化

为圆心到曲线 $y = \ln x$ 上的动点的距离减去半径的平方的最值问题，结合图形，可以断定那个点应该满足与圆心的连线与曲线在该点的切线垂直的问题来解决，从而求得切点坐标，即满足条件的点，代入求得结果。

【详解】

由题意可得，其结果应为曲线 $y = \ln x$ 上的点与以 $C(-2,3)$ 为圆心，以1为半径的圆上的点的距离的平方的最小值，可以求曲线 $y = \ln x$ 上的点与圆心 $C(-2,3)$ 的距离的最小值，在曲线 $y = \ln x$ 上取一点 $M(m, \ln m)$ ，曲线有 $y = \ln x$ 在点M处的切线的斜率为 $k' = \frac{1}{m}$ ，从而有

$$k_{CM} \cdot k' = -1, \text{ 即 } \frac{\ln m - 3}{m + 2} \cdot \frac{1}{m} = -1, \text{ 整理得 } \ln m + m^2 + 2m - 3 = 0, \text{ 解得 } m = 1, \text{ 所以点 } (1,0) \text{ 满}$$

足条件，其到圆心 $C(-2,3)$ 的距离为 $d = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-0)^2} = 3\sqrt{2}$ ，故其结果为

$$(3\sqrt{2} - 1)^2 = 19 - 6\sqrt{2},$$

故选 D.

【点睛】

本题考查函数在一点处切线斜率的应用，考查圆的程，两条直线垂直的斜率关系，属中档题。

10. $[\sqrt{2} - 1, 1]$.

【解析】分析:先建立直角坐标系，再设出点P,Q的坐标，利用已知条件求出P,Q的坐标，再求出 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 的函数表达式，求其最值，即得其取值范围。

详解:以点O为坐标原点,以OA所在直线作x轴，以OB所在直线作y轴，建立直角坐标系.则A(1, 0),B(0, 1),直线AB的方程为 $x+y-1=0$,

$$\text{设 } P(\cos\alpha, \sin\alpha) \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right), Q(x_0, y_0),$$

$$\text{所以 PQ 的中点 } \left(\frac{x_0 + \cos\alpha}{2}, \frac{y_0 + \sin\alpha}{2}\right),$$

$$\begin{cases} k_{PQ} = \frac{\sin\alpha - y_0}{\cos\alpha - x_0} = 1 \\ \frac{x_0 + \cos\alpha}{2} + \frac{y_0 + \sin\alpha}{2} - 1 = 0 \end{cases}, \therefore x_0 = 1 - \sin\alpha \quad y_0 = 1 - \cos\alpha$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \cos\alpha(1 - \sin\alpha) + \sin\alpha(1 - \cos\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\text{设 } t = \sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right), t \in [1, \sqrt{2}],$$

$$\text{所以 } \sin\alpha\cos\alpha = \frac{t^2 - 1}{2},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 1 - t^2 + t, t \in [1, \sqrt{2}]$$

所以当 $t=1$ 时函数取最大值 1, 当 $t=\sqrt{2}$ 时函数取最小值 $\sqrt{2}-1$.

故答案为: $[\sqrt{2}-1, 1]$

点睛: (1)本题的难点有三, 其一是要联想到建立直角坐标系; 其二是要能利用已知求出点 P,Q 的坐标, 其三是能够利用三角函数的知识求出函数 $\overline{OP} \cdot \overline{OQ}$ 的值域. (2) 本题主要考查利用坐标法解答数学问题, 考查直线、圆的方程和三角恒等变换, 考查三角函数的图像和性质, 意在考查学生基础知识的掌握能力及推理分析转化能力, 考查学生的基本运算能力.

11. $12 + 8\sqrt{2}$

【解析】

【分析】

现化简曲线的方程, 判定曲线的形状, 在根据 $x^2 + y^2$ 的意义, 结合图形即可求解.

【详解】

由题意, 曲线 $x^2 - 4x - 4 + y^2 = 0$, 即为 $(x-2)^2 + y^2 = 8$,

所以曲线表示一个圆心在 $(2,0)$, 半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆,

又由 $x^2 + y^2$ 表示圆上的点到原点之间距离的平方, 且原点到圆心的距离为 2,

所以原点到圆上的点的最大距离为 $2 + 2\sqrt{2}$,

所以 $x^2 + y^2$ 的最大值为 $(2 + 2\sqrt{2})^2 = 10 + 8\sqrt{2}$.

【点睛】

本题主要考查了圆的标准方程及其特征的应用, 其中把 $x^2 + y^2$ 转化为原点到圆上的点之间的距离是解答的关键, 着重考查了推理与运算能力.

12. $3 + 2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】

先求得圆的圆心与半径, 可知直线一定过圆心得 $a + b = 1$. 又 $A(\frac{1}{a}, 0), B(0, \frac{2}{b})$,

$|OA| + |OB| = \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$, 由均值不等式可求得最值.

【详解】

由题意可得 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 的圆心为 $(-1, 2)$, 半径为 2, 而截得弦长为 4, 所以直线

过圆心得 $a + b = 1$, 又 $A(-\frac{1}{a}, 0), B(0, \frac{2}{b})$,

所以 $|OA| + |OB| = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = (\frac{1}{a} + \frac{2}{b})(a + b) \geq (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$

当且仅当 $b = \sqrt{2}a$ 时等号成立。

【点睛】

本题综合考查直线与圆，均值不等式求最值问题，本题的关键是由弦长为 4，判断出直线过圆心。

13. 4π

【解析】

分析：根据弦长，求半径。应求圆的圆心、半径，弦心距。故将圆

$C: x^2 + y^2 - 2ay - 2 = 0$ 的方程变为标准方程得 $x^2 + (y - a)^2 = a^2 + 2$ 。可得圆心为 $C(0, a)$ ，

半径为 $r = \sqrt{a^2 + 2}$ 。然后求圆心到直线 $y = x + 2a$ 的距离为 $d = \frac{|0 - a + 2a|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ 。由为弦长

$|AB| = 2\sqrt{3}$ ，可得 $\sqrt{3^2 + (\frac{\sqrt{2}a}{2})^2} = \sqrt{a^2 + 2}$ 即 $a^2 = 2$ 。进而可得半径 $r = \sqrt{a^2 + 2} = 2$ 。可求

圆 C 的面积为 $\pi \times 2^2 = 4\pi$ 。

详解：圆 $C: x^2 + y^2 - 2ay - 2 = 0$ 的方程变为标准方程得 $x^2 + (y - a)^2 = a^2 + 2$ 。

所以圆心为 $C(0, a)$ ，半径为 $r = \sqrt{a^2 + 2}$ 。

直线 $y = x + 2a$ 化为 $x - y + 2a = 0$

圆心到直线 $y = x + 2a$ 的距离为 $d = \frac{|0 - a + 2a|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ 。

因为 $|AB| = 2\sqrt{3}$ ，

所以 $\sqrt{3^2 + (\frac{\sqrt{2}a}{2})^2} = \sqrt{a^2 + 2}$ 即 $a^2 = 2$

所以半径 $r = \sqrt{a^2 + 2} = 2$ 。所以圆 C 的面积为 $\pi \times 2^2 = 4\pi$ 。

点睛：解决与直线和圆相交弦长有关的问题，注意以弦长一半、弦心距、半径为三边长的直角三角形的三边长关系。本题考查学生的转化能力、运算能力。

14. $(x - 2)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 17$

【解析】

【分析】

圆的面积最小等价于圆的半径最小，根据点到直线距离公式，利用基本不等式可得结果。

【详解】

圆的面积最小等价于圆的半径最小

因为圆的圆心在曲线 $xy = 1$ ($x > 0$) 上，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/878076006017006071>