

微专题 25 函数的单调性与奇偶性的综合应用 7 种常考题型总结

高频考点

题型 1 判断函数的图像

题型 2 判断函数的单调性和奇偶性

题型 3 抽象函数的单调性与奇偶性

题型 4 比较大小

题型 5 解不等式

题型 6 求参数的取值范围

题型 7 求函数的最值



解题策略

一、函数的单调性

1. 单调性的定义

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I ，如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量 x_1, x_2 ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数；如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量 x_1, x_2 ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数。

2. 单调性的注意事项

1. 函数的单调性要针对区间而言，因此它是函数的局部性质；对于连续函数，单调区间可闭可开，即“单调区间不在一点处纠结”；单调区间不能搞并集。

2. 若函数 $f(x)$ 满足 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$ ，则函数在该区间单调递增；若满足 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$ ，则函数在该区间单调递减。

3. 函数单调性的判断方法主要有：

(1) 定义法：在定义域内的某个区间 D 上任取 x_1, x_2 并使得 $x_1 < x_2$ ，通过作差比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小来判断单调性。

注：定义法证明函数的单调性（抽象函数亦是应用此方法）

步骤	作法
取值	$\forall x_1, x_2 \in D, \text{ 令 } x_1 < x_2 (\text{或 } x_1 > x_2)$
作差	用 $f(x_1) - f(x_2)$

变形	合并同类项、通分（分式）、分解因式（整式）、分子分母有理化（根式）、配方等
定号	判断 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号
结论	同号为增，异号为减

(2) 性质法：若函数 $f(x)$ 为增函数， $g(x)$ 为增函数， $h(x)$ 为减函数， $\varphi(x)$ 为减函数，则有

① $f(x) + g(x)$ 为增函数，② $f(x) - h(x)$ 为增函数，

③ $h(x) + \varphi(x)$ 为减函数，④ $h(x) - g(x)$ 为减函数。

(3) 图像法：对于含绝对值或者分段函数经常使用数形结合的思想，通过函数的图象来判断函数的单调性。

二. 函数奇偶性的判断

1. 奇偶性的判定方法

判断方法	要点
次数	通过判断次数来判断函数的奇偶性
奇偶性的定义	若 $f(-x) = f(x)$ ，则函数为偶函数；若 $f(-x) = -f(x)$ ，则函数为奇函数
结论	① 奇±奇=奇；② 偶±偶=偶；③ 奇×奇=偶（奇÷奇=偶）；④ 奇×偶=奇（奇÷偶=奇）；⑤ $ 奇 $ = 偶；⑥ $ 偶 $ = 偶；⑦ $ x $ 为偶函数；⑧ $x^{\text{偶数}}$ 为偶函数
特别提醒： 1.判断函数奇偶性的第一步是看定义域是否关于原点对称；2.奇±偶=非奇非偶函数.	

2. （需要记忆）

函数类型	函数列举
奇函数	① $f(x) = a^x - \frac{1}{a^x}$ ；② $f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$ ；③ $f(x) = \lg \frac{x-1}{x+1}$ ；④ $f(x) = \lg(\sqrt{x^2 + 1} + x)$
偶函数	$f(x) = a^x + \frac{1}{a^x}$

三. 函数奇偶性的性质

函数类型	函数性质
奇函数	① 图像关于原点对称；② $f(-x) = -f(x)$ ；③ 原点左右单调性相同；④ 若 x 可为 0，则 $f(0) = 0$
偶函数	① 图像关于 y 轴对称；② $f(-x) = f(x)$ ；③ 原点左右单调性相反

四. 函数图像变换之对称（添负号）

函数变换	对称
------	----

$f(x) \rightarrow f(-x)$	图像关于 y 轴对称（与偶函数关系紧密）
$f(x) \rightarrow -f(x)$	图像关于 x 轴对称
$f(x) \rightarrow -f(-x)$	图像关于原点对称（与奇函数关系紧密）

应用说明：函数的对称变换与函数的奇偶性有着紧密的联系，尤其在解决分段函数奇偶性时可以帮助我们快速的解决问题.

应用举例：1.若分段函数在 R 上为偶函数，当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ，则当 $x < 0$ 时，函数的解析式是？我们可以利用函数的对称变换来解决此类问题，由于函数是偶函数，所以函数的图像关于 y 轴对称，所以我们将 x 添符号，可得 $x < 0$ 时的函数解析式为 $f(x) = x^2 + 3x + 1$ ；

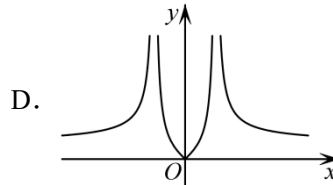
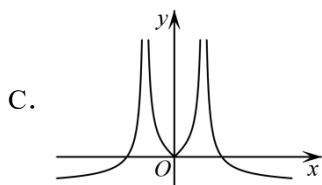
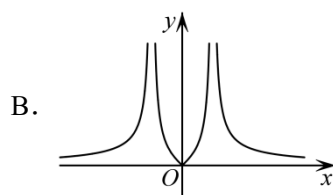
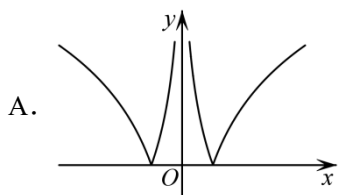
2.若分段函数在 R 上为奇函数，当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ，则当 $x < 0$ 时，函数的解析式是？我们可以利用函数的对称变换来解决此类问题，由于函数是奇函数，所以函数的图像关于原点对称，所以我们将 x 和 y 都添符号，可得 $x < 0$ 时的函数解析式为 $f(x) = -x^2 - 3x - 1$.



考点精析

题型 1 判断函数的图像

【例 1】 函数 $y = \left| \frac{x}{x^2 - 1} \right|$ 的图象大致是（ ）



【答案】B

【分析】 根据给定函数，由其定义域、值域排除选项 A，C；探究在 $x > 1$ 时，函数值的取值范围判断 B，D 作答.

【详解】

函数 $y = \left| \frac{x}{x^2 - 1} \right|$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ ，A 不满足；

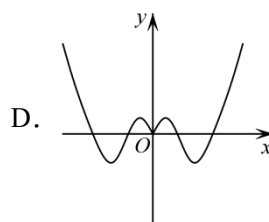
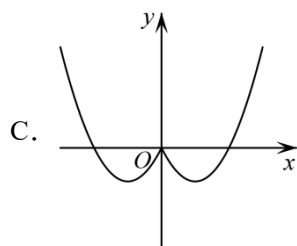
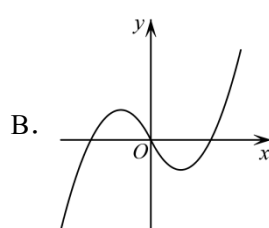
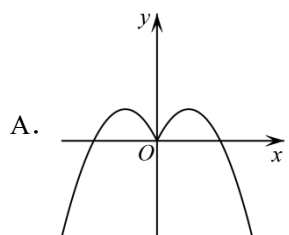
因 $\left| \frac{x}{x^2-1} \right| \geq 0$ ，当且仅当 $x=0$ 时取“=”，则 C 不满足；

函数 $y = \left| \frac{x}{x^2-1} \right|$ 是定义域上的偶函数，当 $x > 1$ 时， $y = \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x - \frac{1}{x}}$ ，而函数 $x - \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，

当 $x > 1$ 时， $x - \frac{1}{x}$ 取一切实数，于是得当 $x > 1$ 时， $y = \left| \frac{x}{x^2-1} \right|$ 取尽正实数，D 不满足，符合题意的是 B.

故选：B

【变式 1】函数 $f(x) = x^2 - 2|x|$ 的图象大致为 ()



【答案】C

【分析】根据函数的奇偶性可排除 B，再根据当 $x > 0$ 时，函数的单调性即可排除 AD，即可得解.

【详解】

解：由 $f(x) = x^2 - 2|x|$ ，

得 $f(-x) = x^2 - 2|x| = f(x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 为偶函数，故排除 B；

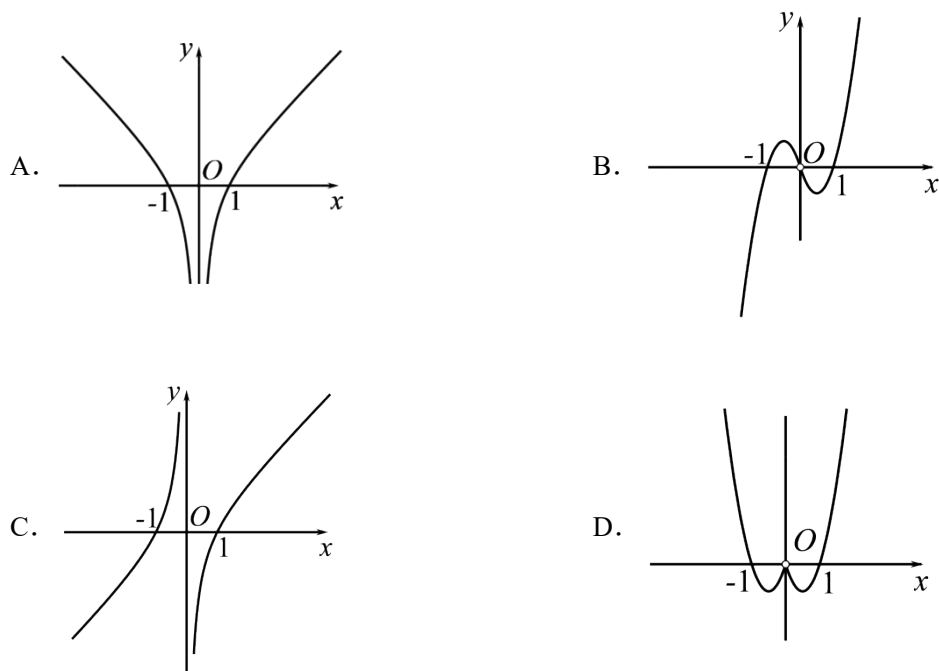
当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2 - 2x$ ，

则函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递减，在 $(1, +\infty)$ 上递增，

故排除 AD，C 符合题意.

故选：C.

【变式 2】函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x|}$ 的图象大致为 ()



【答案】A

【分析】

先由函数的奇偶性排除部分选项，再利用函数的单调性判断.

【详解】

函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x|}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$ ，且 $f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{|-x|} = \frac{x^2 - 1}{|x|} = f(x)$ ，

所以 $f(x)$ 是偶函数，图象关于 y 轴对称，故排除 BC，

当 $x > 0$ 时， $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}$ ，在 $(0, +\infty)$ 上递增，排除 D，

故选：A

题型 2 判断函数的单调性和奇偶性

【例 3】下列函数中，既是偶函数，又在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()

A. $f(x) = 1 - x^2$

B. $f(x) = x - \frac{1}{x}$

C. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |x|$

D. $f(x) = 2^{|x|}$

【解析】 $A: f(x) = 1 - x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减，不符合题意；

$B: f(x) = x - \frac{1}{x}$ 为奇函数，不符合题意；

$C: f(x) = \log_{\frac{1}{2}}|x|$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减，不符合题意；

$D: f(x) = 2^{|x|}$ 为偶函数且在单调递增，符合题意；

故选：D.

【变式 1】下列函数中，既是奇函数，又在 $(1, +\infty)$ 上单调递减的是()

$A. f(x) = x$ $B. f(x) = \ln \frac{1}{|x|}$ $C. f(x) = -x - \frac{1}{x}$ $D. f(x) = x^3 - 6x$

【解析】 对于A，其在定义域上为增函数，不符合题意，舍去；

对于B，其在定义域上为偶函数，不符合题意，舍去；

对于C，其是奇函数，又在 $(1, +\infty)$ 上单调递减，符合题意；

对于D， $f(2) = -4$ ， $f(3) = 3^3 - 18 = 9$ ，其在 $(1, +\infty)$ 上不为减函数，不符合题意，舍去。

故选：C.

【变式 2】下列函数中，既是偶函数，又在 $(-\infty, 0)$ 内单调递增的函数为()

$A. y = x^2 + 2x$ $B. y = e^{|x|}$ $C. y = 2^x - 2^{-x}$ $D. y = 1 - \lg|x|$

【解析】 根据题意，依次分析选项：

对于A， $y = x^2 + 2x$ ，为二次函数，其对称轴为 $x = -1$ ，在 $(-\infty, 0)$ 内不是增函数，不符合题意；

对于B， $y = e^{|x|} = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$ ，为偶函数，但在 $(-\infty, 0)$ 内不是增函数，不符合题意；

对于C， $y = 2^x - 2^{-x}$ ，有 $f(-x) = 2^{-x} - 2^x = -(2^x - 2^{-x}) = -f(x)$ ，为奇函数，不符合题意；

对于D， $y = 1 - \lg|x| = \begin{cases} 1 - \lg x, & x > 0 \\ 1 - \lg(-x), & x < 0 \end{cases}$ ，既是偶函数，又在 $(-\infty, 0)$ 内单调递增的函数，符合题意；

故选：D.

【变式 3】下列函数中为奇函数，且在定义域上是增函数的是()

$A. y = 2^x + 2^{-x}$ $B. y = \sin x$ $C. y = \tan x$ $D. y = x^{\frac{5}{3}}$

【答案】D

【解析】

【分析】

结合基本初等函数的单调性及奇偶性分别检验各选项即可判断.

【详解】

对于函数 $y = f(x) = 2^x + 2^{-x}$, 定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(-x) = 2^{-x} + 2^x = f(x)$, 所以函数 $y = 2^x + 2^{-x}$ 为偶函数, 不符合题意;

对于 $y = \sin x$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上不单调, 不符合题意;

对于 $y = \tan x$ 在定义域上不单调, 不符合题意;

对于 $y = x^{\frac{5}{3}}$, 由幂函数的性质可知, 函数 $y = x^{\frac{5}{3}}$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上为单调递增的奇函数, 符合题意.

故选: D.

【变式 4】已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数且单调递增, 则下列函数是偶函数且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的有()

① $y = |f(x)|$; ② $y = f(x^2 + x)$; ③ $y = f(|x|)$; ④ $y = e^{f(x)} + e^{-f(x)}$.

A. ①②③

B. ①③④

C. ②③④

D. ①②④

【解析】因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数且单调递增,

故当 $x > 0$ 时, $f(x) > f(0) = 0$,

① $g(-x) = |f(-x)| = |f(x)| = g(x)$ 为偶函数, 且当 $x > 0$ 时, $g(x) = |f(x)| = f(x)$ 单调递增, 符合题意;

② $g(-x) = f(x^2 - x) \neq g(x)$, 故不满足偶函数;

③ $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$, 且 $x > 0$ 时 $g(x) = f(x)$ 单调递增, 符合题意;

④ $g(-x) = e^{f(-x)} + e^{-f(-x)} = e^{-f(x)} + e^{f(x)} = g(x)$,

满足偶函数, 且 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, $e^{f(x)} > 1$,

根据对勾函数的单调性可知 $g(x) = e^{f(x)} + e^{-f(x)}$ 单调递增, 符合题意.

故选: B.

题型3 抽象函数的单调性与奇偶性

【例3】已知函数 $f(x)$ 对 $\forall x, y \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ，当 $x < 0$ 时， $f(x) > 0$ ，且 $f(1) = -2$ 。

(1) 证明函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的奇偶性；

(2) 证明函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的单调性；

(3) 当 $x \in [1, 2]$ 时，不等式 $f(x^2 - mx) + f(x) < 4$ 恒成立，求实数 m 的取值范围。

【答案】(1) 函数 $f(x)$ 为奇函数，证明见解析；

(2) 函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数，证明见解析；

(3) $(-\infty, 2\sqrt{2} + 1)$ 。

【解析】

【分析】

(1) 根据题意赋值以及奇函数、偶函数的定义即可证出；

(2) 根据单调性的定义即可判断并证明；

(3) 先利用赋值法可求出 $f(-2) = 4$ ，从而原不等式可化为 $f(x^2 - mx + x) < f(-2)$ ，再根据函数的单调性可得 $x^2 - mx + x > -2$ ，然后通过分离参数求最值即可解出。

(1)

因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，

令 $x = 1, y = 0$ ，所以 $f(1) = f(1) + f(0)$ ，即 $f(0) = 0$ ，

令 $y = -x$ ，所以 $f(0) = f(x) + f(-x) = 0$ ，即 $f(-x) = -f(x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 为奇函数。

(2)

不妨设 $x_1 < x_2$ ，所以 $f(x_2) - f(x_1) = f(x_2) - f(x_2 + x_1 - x_2) = -f(x_1 - x_2)$ ，而 $x_1 - x_2 < 0$ ，所以 $f(x_1 - x_2) > 0$ ，

$f(x_2) - f(x_1) < 0$ ，即 $f(x_2) < f(x_1)$ ，故函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数。

(3)

由 (1) 可知，函数 $f(x)$ 为奇函数，而 $f(2) = f(1) + f(1) = -4$ ，所以 $f(-2) = 4$ ，故原不等式可等价于

$f(x^2 - mx + x) < f(-2)$ ，而函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数，所以 $x^2 - mx + x > -2$ ，又 $x \in [1, 2]$ ，所以

$m < x + \frac{2}{x} + 1$ ，而 $x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{2}$ ，当且仅当 $x = \sqrt{2} \in [1, 2]$ 时取等号，所以 $m < 2\sqrt{2} + 1$ ，即实数 m 的取值范围为

$$(-\infty, 2\sqrt{2}+1).$$

【变式 1】 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，对定义域内的任意 x_1, x_2 都有

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2), \text{ 且当 } x > 1 \text{ 时, } f(x) > 0.$$

(1) 求证: $f(x)$ 是偶函数;

(2) 求证: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数;

(3) 试比较 $f(-\frac{5}{2})$, $f(\frac{7}{4})$ 的大小.

【答案】 (1) 证明见详解; (2) 证明见详解; (3) $f(-\frac{5}{2}) > f(\frac{7}{4})$.

【解析】 (1) 证明: 函数的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\therefore \text{令 } x_1 = x_2 = 1, \text{ 得 } f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$$

$$\therefore f(1) = 0, \text{ 又 } f(1) = f((-1) \times (-1)) = f(-1) + f(-1)$$

$$\therefore f(-1) = 0, \text{ 又 } f(-x) = f((-1) \times x) = f(-1) + f(x), \text{ 即有 } f(-x) = f(x)$$

$\therefore f(x)$ 是偶函数

(2) 证明: 设 $0 < x_1 < x_2$

$$\text{则 } f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1}) - f(x_1) = f(x_1) + f(\frac{x_2}{x_1}) - f(x_1) = f(\frac{x_2}{x_1}), \text{ 又 } \frac{x_2}{x_1} > 1$$

$$\therefore \text{而当 } x > 1 \text{ 时, } f(x) > 0 \text{ 知: } f(\frac{x_2}{x_1}) > 0 \text{ 即有 } f(x_2) > f(x_1)$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数

$$(3) \text{ 由 (1) 知 } f(x) \text{ 是偶函数, 则有 } f(-\frac{5}{2}) = f(\frac{5}{2})$$

$$\text{由 (2) 知 } f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上是增函数, 则有 } f(\frac{5}{2}) > f(\frac{7}{4})$$

$$\therefore f(-\frac{5}{2}) > f(\frac{7}{4}).$$

【变式 2】 已知函数 $f(x)$ 对任意 $x, y \in R$ ，总有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ，且当 $x > 0$ 时， $f(x) < 0$ ，

$$f(-1) = \frac{1}{2},$$

(1) 求证: 函数 $f(x)$ 是奇函数;

(2) 利用函数的单调性定义证明, $f(x)$ 在 R 上的单调递减;

(3) 若不等式 $f(mx^2 + x) - f(x^2 - x + 1) > -1$ 对于任意的 $x \in [\frac{3}{2}, +\infty)$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

【答案】(I) 见解析；(II) 见解析；(III) $m < \frac{2}{3}$

【解析】(I) 令 $x = y = 0$ ，得 $f(0) = f(0) + f(0)$ ，所以 $f(0) = 0$ ，

令 $y = -x$ ，得 $f(0) = f(x) + f(-x)$ ，即 $0 = f(x) + f(-x)$ ，所以 $f(-x) = -f(x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 是 R 上的奇函数.

(II) 任取 $x_1, x_2 \in R$ ，且 $x_1 > x_2$ ，则 $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) + f(-x_2) = f(x_1 - x_2)$ ，

因为当 $x > 0$ 时， $f(x) < 0$ ，而 $x_1 > x_2$ ，即 $x_1 - x_2 > 0$ ，所以 $f(x_1 - x_2) < 0$ ，

所以 $f(x_1) < f(x_2)$ ，所以 $f(x)$ 在 R 上的单调递减.

(III) 由(I)知 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，所以 $f(-1) = -f(1) = \frac{1}{2}$ ，所以 $f(1) = -\frac{1}{2}$ ，

所以 $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$ ，

所以不等式 $f(mx^2 + x) - f(x^2 - x + 1) > -1$ 可化为 $f(mx^2 + x) - f(x^2 - x + 1) > f(2)$ ，

即 $f(mx^2 + x) > f(2) + f(x^2 - x + 1)$ ，所以 $f(mx^2 + x) > f(x^2 - x + 3)$ ，

由(II)知， $f(x)$ 在 R 上的单调递减，所以 $mx^2 + x < x^2 - x + 3$ ，

故问题转化为 $mx^2 < x^2 - 2x + 3$ 对于任意的 $x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 恒成立，

即 $m < 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$ 对于任意的 $x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 恒成立，

令 $t = \frac{1}{x}$ ， $t \in (0, \frac{2}{3}]$ ，故问题可转化为 $m < 1 - 2t + 3t^2$ 对任意的 $t \in (0, \frac{2}{3}]$ 恒成立，

令 $g(t) = 3t^2 - 2t + 1$ ，其对称轴为 $t = \frac{1}{3}$ ，

所以 $g(t)_{\min} = g(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ ，所以 $m < \frac{2}{3}$.

【变式 3】已知函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增，对于任意 $x, y \in R$ 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(1) 求 $f(0)$ ；

(2) 判断 $f(x)$ 奇偶性并证明；

(3) 解不等式 $\frac{1}{2}f(x^2) - f(x) > \frac{1}{2}f(3x)$.

【答案】(1) $f(0) = 0$ ；(2) $f(x)$ 为奇函数，证明见解析；(3) $\{x \mid x > 5 \text{ 或 } x < 0\}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/878077117071006142>