

专题 17 解三角形（七大题型+模拟精练）

01 题型归纳

目录：

● 题型 01 余弦定理、正弦定理

● 题型 02 判断三角形的形状

● 题型 03 解三角形与平面向量

● 题型 04 解三角形几何的应用

● 题型 05 取值范围、最值问题

● 题型 06 解三角形的实际应用

● 题型 07 解三角形解答题

● 题型 01 余弦定理、正弦定理

1. (2024·浙江金华·三模) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $a = \sqrt{7}$, $b = 2$, $A = 60^\circ$, 则 c 为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 1 或 3

【答案】C

【分析】根据余弦定理直接求解即可.

【解析】由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,

即 $\frac{2^2 + c^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \times 2c} = \frac{1}{2}$, 即 $c^2 - 2c - 3 = 0$, 解得 $c = 3$ 或 $c = -1$ (舍).

故选: C.

2. (21-22 高一下·江苏连云港·期中) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a = 3$, $c = 1$, $\cos(A+C) = -\frac{1}{2}$, 则 $b =$ ()

A. $\sqrt{7}$

B. $\sqrt{13}$

C. 3

D. $\sqrt{19}$

【答案】A

【分析】先求得 B 的余弦值, 再根据余弦定理可求得 b 的值.

【解析】 $\cos(A+C) = \cos(\pi - B) = -\cos B = -\frac{1}{2}$, $\therefore \cos B = \frac{1}{2} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{9 + 1 - b^2}{6}$,

$\therefore b^2 = 7$, $b = \sqrt{7}$.

故选: A.

3. (2022·河南·模拟预测) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 面积为 $3\sqrt{3}$, $A = \frac{\pi}{3}$,

$b+c=4\sqrt{3}$, 则 $a=$ ()

A. $2\sqrt{3}$

B. 5

C. 8

D. $2\sqrt{2}$

【答案】A

【分析】由三角形的面积和A 计算出 bc 的值, 再根据余弦定理求出 a^2 的值, 即可得到答案

【解析】由题意可知, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 3\sqrt{3}$, 得 $bc = 12$

$\therefore b+c=4\sqrt{3}$, $bc=12$

由余弦定理可得: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = (b+c)^2 - 2bc - 2bc \cos A$

整理得: $a^2 = 12$, $\therefore a = 2\sqrt{3}$

故选: A

4. (2022·山西晋城·三模) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知

$A = 30^\circ, b^2 + c^2 - a^2 = 4\sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 1

D. 2

【答案】C

【分析】根据余弦定理可求得 $bc = 4$, 再根据三角形的面积公式 $\frac{1}{2}bc \sin A$, 即可求出结果.

【解析】因为 $A = 30^\circ, b^2 + c^2 - a^2 = 4\sqrt{3}$,

所以 $2bc \cos A = \sqrt{3}bc = 4\sqrt{3}$, 所以 $bc = 4$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}bc \sin A = 1$.

故选: C.

5. (2023·四川南充·三模) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $b^2 = a^2 + c^2 - ac$, 则 $B =$ ()

A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】A

【分析】由余弦定理即可求解.

【解析】由 $b^2 = a^2 + c^2 - ac$ 得 $ac = a^2 + c^2 - b^2$, 所以 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{ac}{2ac} = \frac{1}{2}$,

由于 $B \in (0, \pi)$, $\therefore B = \frac{\pi}{3}$,

故选: A

题型02 判断三角形的形状

6. (21-22 高二上·广西桂林·期末) $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $c = b \cos A$, 则 $\triangle ABC$

一定是 ()

- A. 等腰三角形
C. 直角三角形

- B. 等边三角形
D. 等腰直角三角形

【答案】C

【分析】利用余弦定理角化边整理可得.

【解析】由余弦定理有 $c = b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 整理得 $b^2 = a^2 + c^2$, 故 $\triangle ABC$ 一定是直角三角形.

故选: C

7. (2023·上海嘉定·一模) 已知 $\triangle ABC$, 那么“ $|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 < 0$ ”是“ $\triangle ABC$ 为钝角三角形”的 ()

- A. 充分条件但非必要条件
C. 充要条件
- B. 必要条件但非充分条件
D. 以上皆非

【答案】A

【分析】利用余弦定理得到充分性成立, 举出反例得到必要性不成立, 得到答案.

【解析】 $|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 < 0$, 即 $b^2 + c^2 - a^2 < 0$,

由余弦定理得: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < 0$,

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 故 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 充分性成立,

$\triangle ABC$ 为钝角三角形, 若 B 为钝角, 则 A 为锐角, 则 $|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 > 0$, 必要性不成立,

综上: “ $|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 < 0$ ”是“ $\triangle ABC$ 为钝角三角形”的充分条件但非必要条件.

故选: A

8. (2023·贵州·一模) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, 且满足 $b - a = 2b \sin^2 \frac{C}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 ()

- A. 直角三角形
C. 直角三角形或等腰三角形
- B. 等边三角形
D. 等腰直角三角形

【答案】A

【分析】根据三角恒等变换得 $a = b \cos C$, 再由余弦定理解决即可.

【解析】由题知, $b - a = 2b \sin^2 \frac{C}{2}$,

所以 $\frac{b-a}{2b} = \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{1-\cos C}{2}$,

所以 $b-a = b-b \cos C$, 得 $a = b \cos C$,

所以 $a = b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ ，得 $a^2 + c^2 = b^2$ ，

所以 $\triangle ABC$ 的形状为直角三角形，

故选：A

● 题型03 解三角形与平面向量

9. (2024·江苏盐城·模拟预测) $\triangle ABC$ 中，若 $AB=6$, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, $\angle ACB = \frac{\pi}{4}$ ，则 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} =$ ()

A. 54

B. 27

C. 9

D. $3\sqrt{6}$

【答案】A

【分析】利用正弦定理求出 BC ，再利用数量积的运算律求解即得.

$$BC = \frac{AB \sin \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{4}} = 3\sqrt{6}$$

【解析】在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB=6$, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, $\angle ACB = \frac{\pi}{4}$ ，由正弦定理得

所以 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}^2 = 54$.

故选：A

10. (2024·安徽六安·模拟预测) 已知平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{2}$, $\langle \vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c} \rangle = 30^\circ$ ，则 $|\vec{c}|$ 的最大值等于 ()

A. $2\sqrt{7}$

B. $\sqrt{7}$

C. $2\sqrt{3}$

D. $3\sqrt{3}$

【答案】A

【分析】由 $\angle AOB = 150^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$ ，即点 A, O, B, C 四点共圆，再利用余弦定理、正弦定理求解即可.

【解析】设 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ，

由 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{2}$ ，则 $\cos \angle AOB = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

所以 $\angle AOB = 150^\circ$ ，又 $\langle \vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c} \rangle = 30^\circ$ ，所以 $\angle ACB = 30^\circ$ ，

即点 A, O, B, C 四点共圆，要使 $|\vec{c}|$ 最大，即 $|\overrightarrow{OC}|$ 为圆的直径，

在 $\triangle AOB$ 中，由余弦定理可得 $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB \times \cos \angle AOB = 7$ ，

即 $AB = \sqrt{7}$ ，又由正弦定理可得 $2R = \frac{AB}{\sin \angle AOB} = 2\sqrt{7}$ ，

即 $|\vec{c}|$ 的最大值为 $2\sqrt{7}$ ，

故选：A

11. (2024·广东东莞·模拟预测) 已知在同一平面内的三个点 A, B, C 满足 $|AB|=2$, $\left| \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} - \frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|} \right| \geq 1$, 则 $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}|$ 的取值范围是 ()

- A. $[0, 1]$ B. $[0, 2]$ C. $[0, \sqrt{3}]$ D. $[0, 2\sqrt{3}]$

【答案】D

【分析】根据 $\left| \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} - \frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|} \right| \geq 1$, 利用向量数量积的运算性质可得 $\angle ACB \geq 60^\circ$, 从而点 C 在度数为 $\frac{4\pi}{3}$ 的优弧上运动, 或点 C 在圆的内部, 然后根据三角形中线性质的圆的性质可解.

$$\vec{e}_1 = \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|},$$

【解析】设

则 $\vec{e}_1$ 是与 $\overrightarrow{CA}$ 同方向的单位向量, $\vec{e}_2$ 是与 $\overrightarrow{CB}$ 同方向的单位向量,

对于 $\left| \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} - \frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|} \right| \geq 1$, 即 $|\vec{e}_1 - \vec{e}_2| \geq 1$,

两边平方得 $(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)^2 \geq 1$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \leq \frac{1}{2}$,

因此可以得到 $\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_2$ 的夹角 $\angle ACB \geq 60^\circ$, 在构成等边三角形时取等号,

在如图所示的圆中, 点 A, B 在圆上, 其中劣弧 $\widehat{AB}$ 的度数为 $\frac{2\pi}{3}$,

点 C 在度数为 $\frac{4\pi}{3}$ 的优弧上运动, 或点 C 在圆的内部,

若点 C 在圆上, 根据正弦定理,

$$2R = \frac{|AB|}{\sin C} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \quad R = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

可得圆的半径 R 满足

, 即

设 E 为 AB 的中点, 则 $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CE}$,

当 $CE \perp AB$ 时, CE 长达到最大值, 此时 $\triangle ABC$ 为等边三角形,

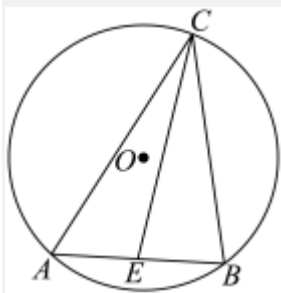
可知 $|CO| = \frac{3}{2}R = \sqrt{3}$, 即 $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = 2\sqrt{3}$,

当点 C 在圆的内部时, 则 C, E 重合时, $|CO| = 0$,

此时取最小值 $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = 0$, 又 $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}|$,

综上所述, $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}|$ 的取值范围为 $[0, 2\sqrt{3}]$.

故选：D



题型04 解三角形几何的应用

12. (2024·北京·三模) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $AB=4$, $PC=PD=3$, $\angle PCA=45^\circ$, 则 $\triangle PBC$ 的周长为 ()

A. 10

B. 11

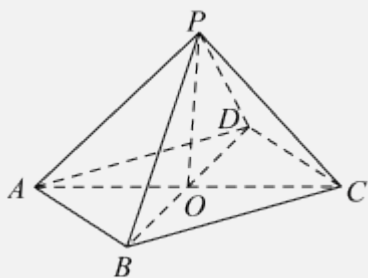
C. $7+\sqrt{17}$

D. 12

【答案】C

【分析】根据给定条件, 结合棱锥的结构特征, 利用全等三角形性质及余弦定理求出 PB 即得.

【解析】在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 连接 AC, BD 交于 O , 连 PO , 则 O 为 AC, BD 的中点, 如图,



正方形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $AC=BD=4\sqrt{2}$,

在 $\triangle POC$ 与 $\triangle POD$ 中, $OC=OD, OP=OP, PC=PD$, 则 $\triangle POC \cong \triangle POD$,

于是 $\angle PDB = \angle PCA = 45^\circ$,

由余弦定理得 $PB = \sqrt{BD^2 + PD^2 - 2BD \cdot PD \cos \angle PDB} = \sqrt{32 + 9 - 2 \times 4\sqrt{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{17}$,

所以 $\triangle PBC$ 的周长为 $7 + \sqrt{17}$.

故选：C

13. (2024·广东广州·模拟预测) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 若 $c=3$, $b=2$,

$\angle BAC$ 的平分线 AD 的长为 $\frac{4\sqrt{6}}{5}$, 则 BC 边上的中线 AH 的长等于 ()

A. $\frac{\sqrt{17}}{2}$

B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{17}}{4}$

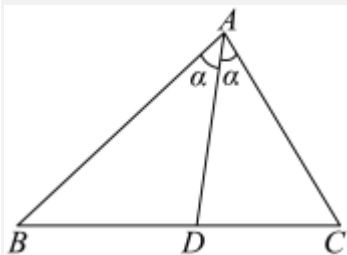
D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【答案】A

【分析】由设 $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$ 可得 $\cos \alpha$ 的值, 进而可求得 $\cos 2\alpha, \sin 2\alpha$

的值，结合余弦定理可得 a ，由 $\overline{AH}^2 = \frac{1}{4}(\overline{AB} + \overline{AC})^2$ 可求得 $\overline{AH}^2$ ，即可求得结果。

【解析】由题意知，设 $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$ ，则 $\angle BAC = 2\alpha$ ，如图所示，



由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$ 可得 $\frac{1}{2} \times 3 \times 2 \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{4\sqrt{6}}{5} \sin \alpha + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4\sqrt{6}}{5} \sin \alpha$ ，

整理得 $3 \sin 2\alpha = 2\sqrt{6} \sin \alpha$ ，即 $\sin \alpha (3 \cos \alpha - \sqrt{6}) = 0$ ，

又因为 $\sin \alpha \neq 0$ ，所以 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

所以 $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{1}{3}$ ，所以 $\sin 2\alpha = \sqrt{1 - \cos^2 2\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $a^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \cos 2\alpha = 13 - 4 = 9$ ，所以 $a = 3$ ，

由 AH 是 BC 边上的中线，得 $\overline{AH} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$

$$\overline{AH}^2 = \frac{1}{4}(\overline{AB} + \overline{AC})^2$$

$$= \frac{1}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{AC}) = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + 2bc \cos 2\alpha) = \frac{1}{4}\left(b^2 + c^2 + \frac{2}{3}bc\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2^2 + 3^2 + 2 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}(4 + 9 + 4) = \frac{17}{4}$$

所以，中线长 $AH = \frac{\sqrt{17}}{2}$ 。

故选：A

14. (2023·四川南充·二模) 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边，若 $b^2 + c^2 = 2023a^2$ ，则

$\frac{2\sin B \sin C}{\tan A \cdot \sin A}$ 的值为 ()

A. 2021

B. 2022

C. 2023

D. 2024

【答案】B

【分析】利用正弦定理和余弦定理有 $\frac{2\sin B \sin C}{\tan A \cdot \sin A} = \frac{2\sin B \sin C}{\sin^2 A} \cdot \cos A = \frac{2bc}{a^2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ，再根据条件整体代换即可。

【解析】因为 $b^2 + c^2 = 2023a^2$ ，

则根据正弦定理和余弦定理有

$$\frac{2 \sin B \sin C}{\tan A \sin A} = \frac{2 \sin B \sin C}{\sin^2 A} \cdot \cos A = \frac{2bc}{a^2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2022a^2}{a^2} = 2022$$

故选：B.

● 题型05 取值范围、最值问题

15. (2024·江苏连云港·模拟预测) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a=1$, $b \cos A = 1 + \cos B$, 则边 b 的取值范围为 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(0, 2)$ D. $(2, 3)$

【答案】B

【分析】利用正弦定理边化角, 再利用和差角的正弦推理得 $B=2A$, 又由正弦定理得 $b=2\cos A$, 根据角 A 的范围利用余弦函数性质求解值域即可求解.

【解析】由 $a=1$, $b \cos A = 1 + \cos B$ 得, $b \cos A = a + a \cos B$,

由正弦定理可得 $\sin B \cos A = \sin A + \sin A \cos B$, 即 $\sin B \cos A - \sin A \cos B = \sin A$,

所以 $\sin(B-A) = \sin A$, 所以 $B-A=A$ 或 $B-A+A=\pi$ (舍去), 所以 $B=2A$,

由正弦定理得, $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{\sin 2A}{\sin A} = 2 \cos A$,

而 $0 < A < \pi, 0 < B=2A < \pi, 0 < C = \pi - 3A < \pi$, 所以 $0 < A < \frac{\pi}{3}$,

所以 $\frac{1}{2} < \cos A < 1$, 所以 $b = 2 \cos A \in (1, 2)$, 所以 b 的取值范围为 $(1, 2)$.

故选：B

16. (2024·四川成都·模拟预测) 设锐角 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $c=2, B=2C$, 则 $a+b$ 的取值范围为 ()

- A. $(2, 10)$ B. $(2+2\sqrt{2}, 10)$ C. $(2+2\sqrt{2}, 4+2\sqrt{3})$ D. $(4+2\sqrt{3}, 10)$

【答案】C

【分析】根据正弦定理, 转化为三角函数, 化简后换元, 根据二次函数的单调性求范围即可.

【解析】在 $\triangle ABC$ 中, 由 $B=2C$ 可得 $A=\pi-3C$,

由正弦定理 $\frac{a}{\sin(\pi-3C)} = \frac{b}{\sin 2C} = \frac{c}{\sin C}$ 得:

$$a+b = \frac{2(\sin 3C + \sin 2C)}{\sin C} = \frac{2(\sin C \cos 2C + \cos C \sin 2C + 2 \sin C \cos C)}{\sin C} = 2(4 \cos^2 C + 2 \cos C - 1)$$

又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 所以 $\begin{cases} 0 < A = \pi - 3C < \frac{\pi}{2} \\ 0 < B = 2C < \frac{\pi}{2} \\ 0 < C < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 解得 $\frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{4}$,

令 $t = \cos C \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 则 $a+b = 2(4t^2 + 2t - 1), t \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

因为 $y = 4t^2 + 2t - 1$ 在 $t \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 时单调递增,

所以 $1 + \sqrt{2} < y < 2 + \sqrt{3}$, 则 $a+b \in (2 + 2\sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{3})$.

故选: C

17. (2024·河南·三模) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $\frac{a}{\cos A} + \frac{b}{\cos B} = \frac{3c}{\cos C}$, 则 $\tan A + \tan C$ 的最小值是 ()

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{8}{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 4

【答案】B

【分析】由正弦定理得 $\tan A + \tan B = 3 \tan C$, 再通过两角和的正切公式得 $\tan A \tan B = 4$, 最后使用基本不等式求解即可.

【解析】因为 $\frac{a}{\cos A} + \frac{b}{\cos B} = \frac{3c}{\cos C}$,

由正弦定理得 $\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{3 \sin C}{\cos C}$,

所以 $\tan A + \tan B = 3 \tan C$,

又因为 $C = \pi - (A + B)$,

所以 $\tan A + \tan B = -3 \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$,

所以 $1 = \frac{3}{\tan A \tan B - 1}$,

即 $\tan A \tan B = 4$.

所以 $\tan B = \frac{4}{\tan A}, \tan C = \frac{1}{3}(\tan A + \tan B) = \frac{1}{3}\left(\tan A + \frac{4}{\tan A}\right)$,

显然 $\tan A$ 必为正 (否则 $\tan A$ 和 $\tan C$ 都为负, 就两个钝角),

所以 $\tan A + \tan C = \frac{4}{3} \tan A + \frac{4}{3 \tan A} \geq 2 \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{8}{3}$,

当且仅当 $\frac{4}{3} \tan A = \frac{4}{3 \tan A}$, 即 $\tan A = 1, A = \frac{\pi}{4}$ 取等号.

所以 $\tan A + \tan C \geq \frac{8}{3}$.

故选: B.

18. (2023·陕西榆林·一模) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a \sin A + (b + \lambda a) \sin B = c \sin C$

，则 λ 的取值范围为 ()

A. $(-2, 2)$

B. $(0, 2)$

C. $[-2, 2]$

D. $[0, 2]$

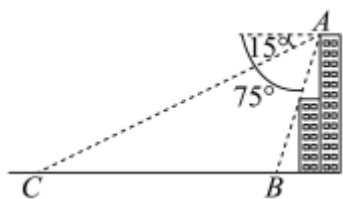
【答案】A

【分析】根据正弦、余弦定理可得 $\lambda = -2\cos C$ ，结合 $C \in (0, \pi)$ 即可求解.

【解析】因为 $a\sin A + (b + \lambda a)\sin B = c\sin C$ ，由正弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 + \lambda ab$ ，又 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ ，所以 $\lambda = -2\cos C$ ，因为 $C \in (0, \pi)$ ，所以 $\cos C \in (-1, 1)$ ，故 $\lambda \in (-2, 2)$ 。
故选：A.

题型06 解三角形的实际应用

19. (2024·陕西西安·模拟预测) 在 100m 高的楼顶 A 处，测得正西方向地面上 B、C 两点 (B、C 与楼底在同一水平面上) 的俯角分别是 75° 和 15° ，则 B、C 两点之间的距离为 ()。



A. $200\sqrt{2}$

B. $240\sqrt{2}$

C. $180\sqrt{3}$

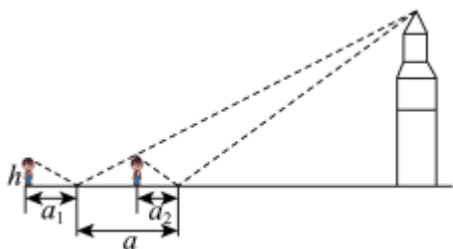
D. $200\sqrt{3}$

【答案】D

【分析】根据图形，利用直角三角形求解即可.

【解析】由题意， $BC = \frac{100}{\tan 15^\circ} - \frac{100}{\tan 75^\circ} = 100 \times \frac{\tan 75^\circ - \tan 15^\circ}{\tan 15^\circ \tan 75^\circ} = 100 \times \frac{\tan 60^\circ (1 + \tan 15^\circ \tan 75^\circ)}{\tan 15^\circ \tan 75^\circ}$
而 $\tan 15^\circ \tan 75^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} \cdot \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} \cdot \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = 1$ ，
所以 $BC = 100 \times 2\sqrt{3} = 200\sqrt{3}$ 。
故选：D

20. (2024·广东·二模) 在一堂数学实践探究课中，同学们用镜而反射法测量学校钟楼的高度.如图所示，将小镜子放在操场的水平地面上，人退后至从镜中能看到钟楼顶部的位置，此时测量人和小镜子的距离为 $a_1 = 1.00\text{m}$ ，之后将小镜子前移 $a = 6.00\text{m}$ ，重复之前的操作，再次测量人与小镜子的距离为 $a_2 = 0.60\text{m}$ ，已知人的眼睛距离地面的高度为 $h = 1.75\text{m}$ ，则钟楼的高度大约是 ()



A. 27.75m

B. 27.25m

C. 26.75m

D. 26.25m

【答案】D

【分析】设钟楼的高度为 PQ ，根据相似得到 $PQ = \frac{ah}{a_1 - a_2}$ ，代入数据计算得到答案.

【解析】如下图，设钟楼的高度为 PQ ，

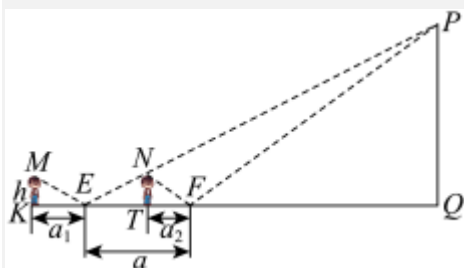
由 $\triangle MKE \sim \triangle PQE$ ，可得：
$$EQ = \frac{PQ \cdot KE}{MK} = \frac{a_1 \cdot PQ}{h},$$

由 $\triangle NTF \sim \triangle PQF$ ，可得：
$$FQ = \frac{PQ \cdot TF}{NT} = \frac{PQ \cdot a_2}{h},$$

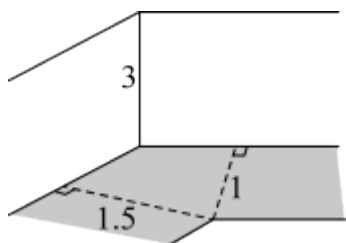
故
$$EQ - FQ = \frac{a_1 \cdot PQ}{h} - \frac{PQ \cdot a_2}{h} = a,$$

故
$$PQ = \frac{ah}{a_1 - a_2} = \frac{6 \times 1.75}{1 - 0.6} = \frac{10.5}{0.4} = 26.25\text{m},$$

故选：D.



21. (2024·上海嘉定·二模)嘉定某学习小组开展测量太阳高度角的数学活动.太阳高度角是指某时刻太阳光线和地平面所成的角.测量时,假设太阳光线均为平行的直线,地面为水平平面.如图,两竖直墙面所成的二面角为 120° ,墙的高度均为 3 米.在时刻 t ,实地测量得在太阳光线照射下的两面墙在地面的阴影宽度分别为 1 米、1.5 米.在线查阅嘉定的天文资料,当天的太阳高度角和对应时间的部分数据如表所示,则时刻 t 最可能为 ()



太阳高度角	时间	太阳高度角	时间
43.13°	08:30	68.53°	10:30
49.53°	09:00	74.49°	11:00
55.93°	09:30	79.60°	11:30
62.29°	10:00	82.00°	12:00

A. 09:00

B. 10:00

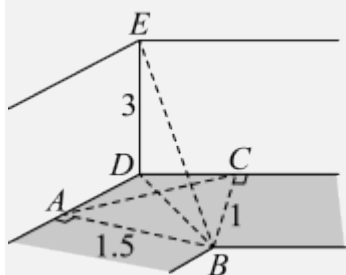
C. 11:00

D. 12:00

【答案】B

【分析】作出示意图形，在四边形 $ABCD$ 中利用正弦定理与余弦定理，算出四边形 $ABCD$ 的外接圆直径大小，然后在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中利用锐角三角函数定义，算出 $\angle DBE$ 的大小，即可得到本题的答案.

【解析】如图所示，



设两竖直墙面的交线为 DE ，点 E 被太阳光照射在地面上的影子为点 B ，

点 A, C 分别是点 B 在两条墙脚线上的射影，连接 AC ， BD ， BE ，

由题意可知 $\angle DBE$ 就是太阳高度角.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ ， $\angle ADC = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = 360^\circ - (\angle BAD + \angle BCD + \angle ADC) = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 中， $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 60^\circ = 1.5^2 + 1^2 - 2 \times 1.5 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1.75$ ，

可得 $AC = \sqrt{1.75} \approx 1.32$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形， BD 是其外接圆直径，

$\therefore$ 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R ，则 $BD = 2R = \frac{AC}{\sin 60^\circ} \approx 1.53$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中， $\tan \angle DBE = \frac{ED}{BD} = \frac{3}{1.53} \approx 1.96$ ，

所以 $\angle DBE = \arctan 1.96 \approx 63.02^\circ$ ，

对照题中表格，可知时刻 $t = 10:00$ 时，太阳高度角为 62.29° ，与 63.02° 最接近.

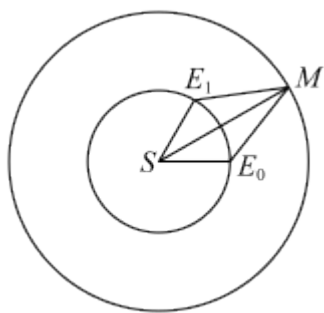
故选：B.

22. (2024·云南昆明·一模) 早期天文学家常采用“三角法”测量行星的轨道半径. 假设一种理想状态: 地球 E 和某小行星 M 绕太阳 S 在同一平面上的运动轨道均为圆, 三个星体的位置如图所示. 地球在 E_0 位置

时, 测出 $\angle SE_0M = \frac{2\pi}{3}$; 行星 M 绕太阳运动一周回到原来位置, 地球运动到了 E_1 位置, 测出

$\angle SE_1M = \frac{3\pi}{4}$, $\angle E_1SE_0 = \frac{\pi}{3}$. 若地球的轨道半径为 R , 则下列选项中与行星 M 的轨道半径最接近的是 (参

考数据: $\sqrt{3} \approx 1.7$) ()



A. $2.1R$

B. $2.2R$

C. $2.3R$

D. $2.4R$

【答案】A

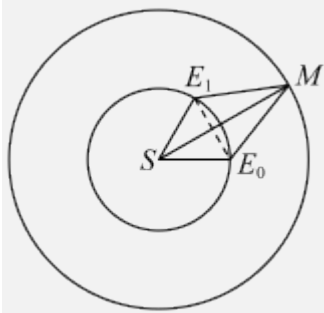
【分析】连接 E_0E_1 ，根据给定条件，在 $\triangle ME_0E_1$ 中利用正弦定理求出 ME_1 ，再在 $\triangle SME_1$ 中利用余弦定理求解即得.

【解析】连接 E_0E_1 ，在 $\triangle SE_0E_1$ 中， $SE_0 = SE_1 = R$ ，又 $\angle E_1SE_0 = \frac{\pi}{3}$ ，则 $\triangle SE_0E_1$ 是正三角形， $E_0E_1 = R$ ，
由 $\angle SE_0M = \frac{2\pi}{3}$ ， $\angle SE_1M = \frac{3\pi}{4}$ ，得 $\angle E_1E_0M = \frac{\pi}{3}$ ， $\angle E_0E_1M = \frac{5\pi}{12}$ ，

在 $\triangle ME_0E_1$ 中， $\angle E_0ME_1 = \frac{\pi}{4}$ ，由正弦定理得 $\frac{E_1M}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{E_0E_1}{\sin \frac{\pi}{4}}$ ，则 $E_1M = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}R}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}R$ ，

在 $\triangle SME_1$ 中，由余弦定理得 $SM = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}R\right)^2 - 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}R \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{5}{2}R^2 + \sqrt{3}R^2} \approx \sqrt{4.2}R \approx 2.1R$.

故选：A



● 题型 07 解三角形解答题

23. (2024·内蒙古·三模) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且

$$(a - \sqrt{2}b) \cos C = c (\sqrt{2} \cos B - \cos A)$$

(1) 求 $\frac{b}{a}$ 的值；

(2) 若 $B = 2C$ ，证明： $\triangle ABC$ 为直角三角形.

【答案】(1) $\sqrt{2}$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 由正弦定理和逆用正弦和角公式得到 $b = \sqrt{2}a$ ，求出答案；

(2) 由(1)得到 $\sin B = \sqrt{2}\sin A$ ，结合 $B = 2C$ ，得到 $\sin 2C = \sqrt{2}\sin 2C \cos C + \sqrt{2}\cos 2C \sin C$ ，化简得到 $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $C = \frac{\pi}{4}$ ， $B = \frac{\pi}{2}$ ，得到答案.

【解析】(1) 由 $(a - \sqrt{2}b)\cos C = c(\sqrt{2}\cos B - \cos A)$ ，

可得 $a\cos C + c\cos A = \sqrt{2}(b\cos C + c\cos B)$ ，

所以 $\sin A\cos C + \sin C\cos A = \sqrt{2}(\sin B\cos C + \sin C\cos B)$ ，

所以 $\sin B = \sqrt{2}\sin A$ ，

则 $b = \sqrt{2}a$ ，即 $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$ 。

(2) 证明：由(1)可得 $\sin B = \sqrt{2}\sin A$ 。

又 $B = 2C$ ，所以 $\sin 2C = \sqrt{2}\sin(B+C) = \sqrt{2}\sin 3C$ ，

即 $\sin 2C = \sqrt{2}\sin(2C+C) = \sqrt{2}\sin 2C \cos C + \sqrt{2}\cos 2C \sin C$ ，

故 $2\sin C \cos C = 2\sqrt{2}\sin C \cos^2 C + \sqrt{2}\cos 2C \sin C$ ，

所以 $2\cos C = 2\sqrt{2}\cos^2 C + 2\sqrt{2}\cos^2 C - \sqrt{2}$ ，

即 $4\sqrt{2}\cos^2 C - 2\cos C - \sqrt{2} = 0$ ，

因为 $B = 2C$ ，所以 C 为锐角，

解得 $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (负值舍去)，即 $C = \frac{\pi}{4}$ ， $B = \frac{\pi}{2}$ ，

所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形。

24. (2024·四川绵阳·模拟预测) 三角形三内角 A ， B ， C 的对边分别为 a ， b ， c 。已知 $\frac{\sqrt{3}b}{a} = \frac{1 - \cos B}{\sin A}$ 。

(1) 求角 B 的大小；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\sqrt{3}$ ， D 为 BC 边的中点，当中线 AD 的长最短时，求 AC 边的长。

【答案】(1) $B = \frac{2\pi}{3}$

(2) $AC = \sqrt{14}$ 。

【分析】(1) 由正弦定理以及条件边化角得 $\sqrt{3}\sin B = 1 - \cos B$ ，再结合辅助角公式即可求解。

(2) 先由面积公式 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B$ 得 $ac = 4$ ，再在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理结合基本不等式即可得中线 AD 的最小值，进而可得 AC 长。

【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得, $\sqrt{3}\sin B\sin A = \sin A - \sin A\cos B$.

因为 $A \in (0, \pi)$, $\sin A \neq 0$, 所以 $\sqrt{3}\sin B = 1 - \cos B$,

所以 $\sqrt{3}\sin B + \cos B = 2\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) = 1$, 即 $\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$,

又 $B \in (0, \pi)$, 则 $B + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$,

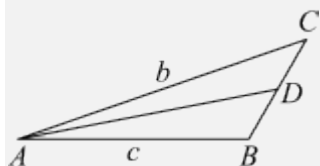
所以 $B = \frac{2\pi}{3}$.

(2) 由 (1) 得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}ac = \sqrt{3}$, 所以 $ac = 4$,

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理可得:

$$AD^2 = c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2c \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos 120^\circ = c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{ac}{2} \geq \frac{3ac}{2} = 6,$$

当且仅当 $c = \frac{a}{2}$, 即 $a = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{2}$ 时, 等号成立,



$$AC^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos 120^\circ = 8 + 2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 14,$$

此时

故 $AC = \sqrt{14}$.

25. (2024·重庆渝中·模拟预测) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足

$$\frac{\sqrt{3}c}{a} - \sin B = \tan A \cdot \cos B.$$

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形且 $a = 2\sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$

(2) $(4\sqrt{3}, 6\sqrt{3}]$

【分析】(1) 根据条件由正弦定理边化角, 结合三角恒等变换求得答案;

(2) 由正弦定理得 $b = 4\sqrt{2}\sin B$, $c = 4\sqrt{2}\sin C$, 代入三角形面积公式化简得

$$S_{\triangle ABC} = 4\sqrt{3}\sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) + 2\sqrt{3},$$

结合角 B 的范围求出答案.

【解析】(1) 由正弦定理得, $\frac{\sqrt{3}\sin C}{\sin A} - \sin B = \tan A \cdot \cos B$,

所以 $\frac{\sqrt{3}\sin C}{\sin A \cos B} - \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin A}{\cos A}$,

即 $\frac{\sqrt{3}\sin C}{\sin A \cos B} = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B} = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \frac{\sin C}{\cos A \cos B}$,

化简得: $\frac{\sin A}{\cos A} = \sqrt{3}$, 即 $\tan A = \sqrt{3}$,

又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{2\sqrt{6}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{2}$$

(2) 由正弦定理得:

所以 $b = 4\sqrt{2} \sin B$, $c = 4\sqrt{2} \sin C$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 8\sqrt{3} \sin B \sin C = 8\sqrt{3} \sin B \sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)$

$$= 8\sqrt{3} \sin B \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B \right) = 6 \sin 2B - 2\sqrt{3} \cos 2B + 2\sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2B - \frac{1}{2} \cos 2B \right) + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) + 2\sqrt{3}$$

因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 所以 $\begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 解得 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$,

所以 $2B - \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$, 所以 $\sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$,

所以 $S_{\triangle ABC} = 4\sqrt{3} \sin\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) + 2\sqrt{3} \in (4\sqrt{3}, 6\sqrt{3}]$.

26. (2024·江西·模拟预测) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 所对的边分别记为 a , b , c , 且

$$\tan A = \frac{\cos B - \sin C}{\cos C + \sin B}.$$

(1) 若 $B = \frac{\pi}{6}$, 求 C 的大小.

(2) 若 $a = 2$, 求 $b+c$ 的取值范围.

【答案】(1) $C = \frac{2\pi}{3}$

(2) $(2, +\infty)$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/885023321003011321>