专题21 相似模型之梅涅劳斯（定理）模型与塞瓦（定理）模型

梅内劳斯（*Menelaus*，公元98年左右），是希腊数学家兼天文学家，梅涅劳斯定理是平面几何中的一个重要定理。

梅涅劳斯（定理）模型： 如图1，如果一条直线与$\triangle ABC$的三边AB、BC、CA或其延长线交于F、D、E点，那么$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$．这条直线叫$\triangle ABC$的梅氏线，$\triangle ABC$叫梅氏三角形.

梅涅劳斯定理的逆定理： 如图1，若F、D、E分别是$\triangle ABC$的三边AB、BC、CA或其延长线的三点，如果$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$，则$F$、$D$、$E$三点共线.

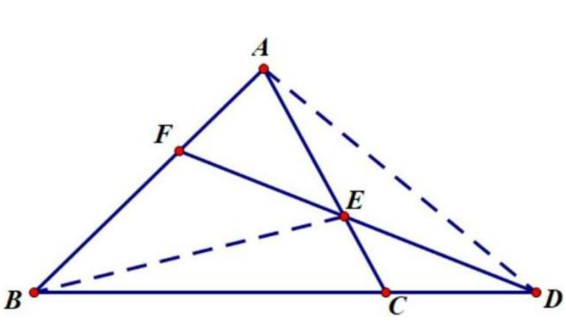


图1

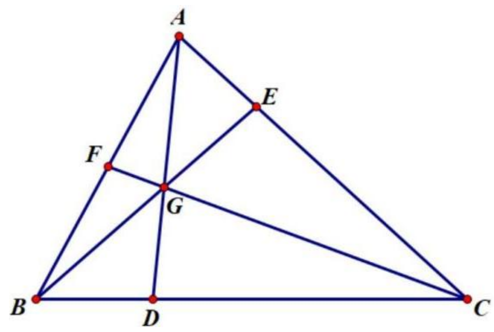


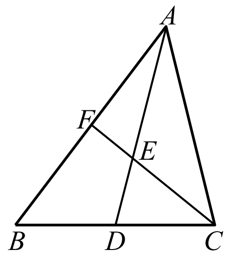
图2

塞瓦（$G\cdot Gevo$1647-1734）是意大利数学家兼水利工程师．他在1678年发表了一个著名的定理，后世以他的名字来命名，叫做塞瓦定理。

塞瓦（定理）模型： 塞瓦定理是指在$\triangle ABC$内任取一点G，延长AG、BG、CG分别交对边于D、E、F，如图2，则$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$。

注意：①梅涅劳斯（定理）与塞瓦（定理）区别是塞瓦定理的特征是三线共点，而梅涅劳斯定理的特征是三点共线；②我们用梅涅劳斯（定理）与塞瓦（定理）解决的大部分问题，也添加辅助线后用平行线分线段成比例和相似来解决。

例1．(2023.浙江九年级期中）如图，在$\triangle ABC$中，AD为中线，过点C任作一直线交AB于点F，交AD于点E，求证：$AE:ED=2AF:FB$.

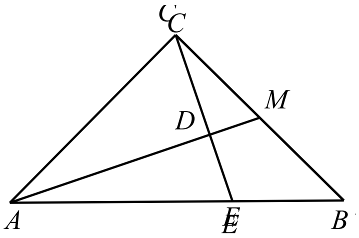


【解析】$\because$直线 FEC 是$\triangle ABD$的梅氏线，$\therefore \frac{AE}{ED}\cdot\frac{DC}{BC}\cdot\frac{BF}{FA}=1$.

而$\frac{DC}{BC}=\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{AE}{ED}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{BF}{FA}=1$，即$\frac{AE}{ED}=\frac{2AF}{BF}$.

【点睛】这道题也是梅氏定理的直接应用，但是对于梅氏定理的应用的难点，在于找梅氏线.

例 2. (2023.重庆九年级月考) 如图, 在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC$. AM 为 BC 边上的中线，$CD\perp AM$ 于点 D，CD 的延长线交 AB 于点 E．求$\frac{AE}{EB}$.



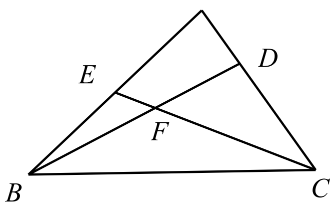
【解析】$\because HFC$ 是$\triangle ABD$的梅氏线，由题设，在$\mathrm{Rt}\triangle AMC$中，$CD\perp AM$，$AC=2CM$，

由射影定理$\frac{AD}{DM}=\frac{AD\cdot AM}{DM\cdot AM}=\frac{AC^2}{CM^2}=4$．对$\triangle ABM$和截线 EDC，由梅涅劳斯定理，

$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BC}{CM}\cdot\frac{MD}{DA}=1$，即$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{4}=1$．$\therefore \frac{AE}{EB}=2$.

【点睛】这道题也是梅氏定理的直接应用，但是对于梅氏定理的应用的难点，在于找梅氏线.

例 3.（2023.湖北九年级期中）如图，点 D、E 分别在$\triangle ABC$的边 AC、AB 上，$AE=EB$，$\frac{AD}{DC}=\frac{2}{3}$，$BD$ 与 CE 交于点 F，$S_{\triangle ABC}=40$．求S_{AEFD}.



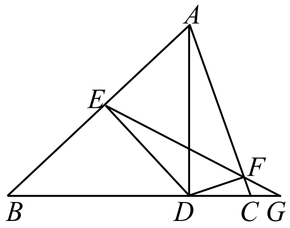
【解析】对$\triangle ECA$和截线 BFD，由梅氏定理得：$\frac{EF}{FC}\cdot\frac{CD}{DA}\cdot\frac{AB}{BE}=1$，

即$\frac{EF}{FC}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}=1$，$\therefore \frac{EF}{FC}=\frac{1}{3}$．$\therefore S_{\triangle BFE}=\frac{1}{4}S_{\triangle BEC}=\frac{1}{8}S_{\triangle ABC}$.

$\therefore S_{AEFD}=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle BEF}=\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{8}\right)S_{\triangle ABC}=\frac{11}{40}\cdot 40=11$.

【点睛】这道题主要考查梅氏定理和面积问题.

例 4. (2023.江苏九年级月考) 已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的高，点 D 在线段 BC 上，且 $BD=3$，$CD=1$，作 $DE\perp AB$ 于点 E，$DF\perp AC$ 于点 F，连接 EF 并延长，交 BC 的延长线于点 G，求 CG.

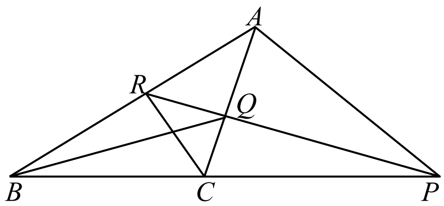


【解析】如图，设 $CG=x$，EFG 是 $\triangle ABC$ 的梅氏线. 则由梅涅劳斯定理 $\frac{4+x}{x}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AE}{EB}=1$.

显然的 $\frac{CF}{FA}=\frac{DC^2}{AD^2}$，$\frac{AE}{EB}=\frac{AD^2}{BD^2}$，于是 $\frac{1}{9}\cdot\frac{4+x}{x}=1$，得 $x=\frac{1}{2}$.

【点睛】这道题主要考查梅内劳斯定理和射影模型的综合.

例 5.（2023.广东九年级专项训练）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的外角平分线与边 BC 的延长线交于点 P，$\angle B$ 的平分线与边 CA 交于点 Q，$\angle C$ 的平分线与边 AB 交于点 R，求证：P、Q、R 三点共线.



【解析】AP 是 $\angle BAC$ 的外角平分线，则 $\frac{BP}{PC}=\frac{AB}{CA}$　　①

BQ 是 $\angle ABC$ 的平分线，则 $\frac{CQ}{QA}=\frac{BC}{AB}$　　②

CR 是 $\angle ACB$ 的平分线，则 $\frac{AR}{RB}=\frac{CA}{BC}$　　③

①×②×③得 $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{AB}{CA}\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{CA}{BC}=1$，

因 R 在 AB 上，Q 在 CA 上，P 在 BC 的延长线上，

则根据梅涅劳斯定理的逆定理得：P、Q、R 三点共线.

【点睛】这道题主要考查梅氏定理和角平分线定理的综合应用.

例 6．（2023 上·广东深圳·九年级校联考期中）梅涅劳斯（*Menelaus*）是古希腊数学家，他首先证明了梅涅劳斯定理，定理的内容是：如图 1，如果一条直线与 $\triangle ABC$ 的三边 AB,BC,CA 或它们的延长线交于 F、D、E 三点，那么一定有 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$.

下面是利用相似三角形的有关知识证明该定理的部分过程：

证明：如图 2，过点 A 作 $AG\parallel BC$，交 DF 的延长线于点 G，则有 $\frac{AF}{FB}=\frac{AG}{BD}$，$\frac{CE}{EA}=\frac{CD}{AG}$，

$\therefore \triangle AGF\backsim\triangle BDF,\triangle AGE\backsim\triangle CDE$，$\therefore \frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{AG}{BD}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CD}{AG}=1$.

请用上述定理的证明方法解决以下问题：

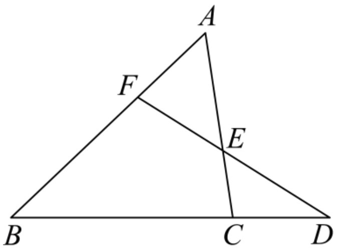


图1

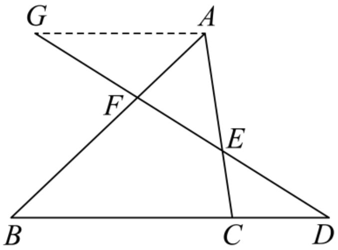


图2

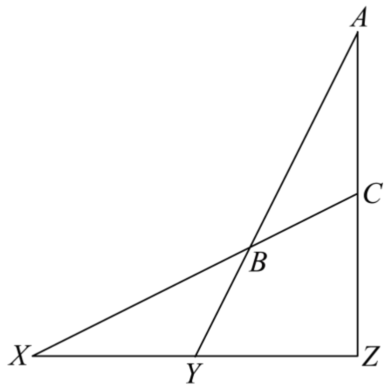


图3

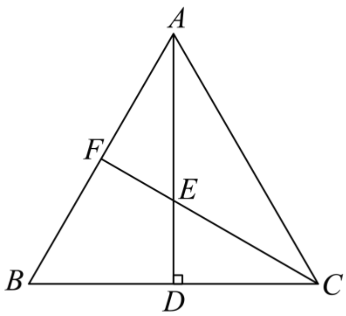


图4

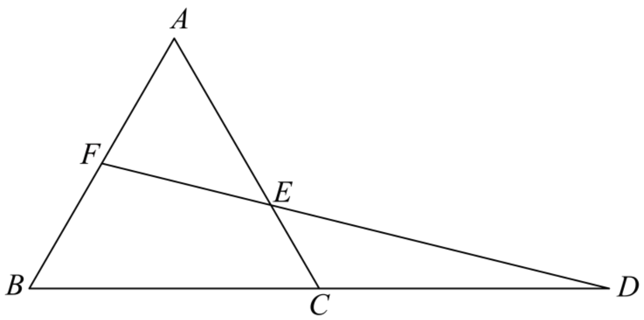


图5

（1）如图 3，$\triangle ABC$ 三边 CB,AB,AC 的延长线分别交直线 l 于 X,Y,Z 三点，证明：$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CZ}{ZA}\cdot\frac{AY}{YB}=1$.

请用上述定理的证明方法或结论解决以下问题：（2）如图 4，等边 $\triangle ABC$ 的边长为 3，点 D 为 BC 的中点，点 F 在 AB 上，且 $BF=2AF,CF$ 与 AD 交于点 E，试求 AE 的长．（3）如图 5，$\triangle ABC$ 的面积为 4，F 为 AB 中点，延长 BC 至 D，使 $CD=BC$，连接 FD 交 AC 于 E，求四边形 $BCEF$ 的面积.

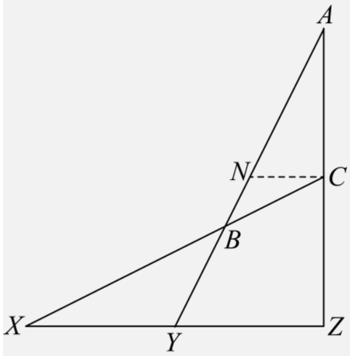
【答案】（1）详见解析；（2）$AE=\frac{3}{4}\sqrt{3}$；（3）$\frac{8}{3}$

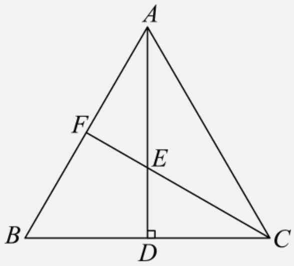
【分析】(1) 过点 C 作 $CN\parallel XZ$ 交 AY 于点 N，根据平行线分线段成比例定理列出比例，化简计算即可.

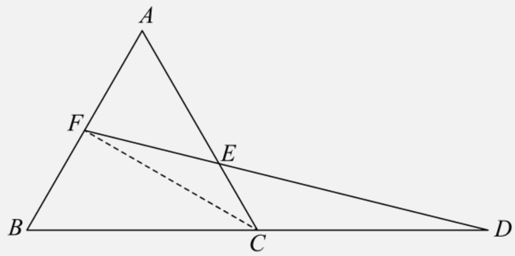
(2) 根据定理，勾股定理，等边三角形的性质解答即可．(3) 根据定理，计算比值，后解答即可.

【详解】（1）证明：如图，过点C作$CN//XZ$交AY于点N，

则$\frac{BX}{XC}=\frac{BY}{YN},\frac{CZ}{ZA}=\frac{YN}{AY}$．故：$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CZ}{ZA}\cdot\frac{AY}{YB}=\frac{BY}{YN}\cdot\frac{YN}{AY}\cdot\frac{AY}{YB}=1$．







（2）解：如图，根据梅涅劳斯定理得：$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{DE}{EA}=1$．

又$\because BF=2AF$，$\therefore\therefore\frac{AF}{BF}=\frac{1}{2},\frac{BC}{CD}=2$，$\therefore DE=AE$．在等边$\triangle ABC$中，$\because AB=3$，点$D$为$BC$的中点，

$\therefore AD\perp BC,BD=CD=\frac{3}{2}$．$\therefore$由勾股定理知：$AD=\frac{3}{2}\sqrt{3}$　$\therefore AE=\frac{3}{4}\sqrt{3}$．

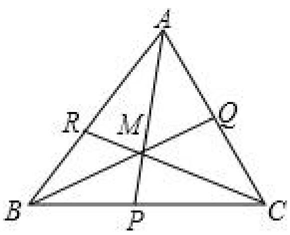
（3）解：$\because$线段DEF是$\triangle ABC$的梅氏线，

$\therefore$由梅涅劳斯定理得，$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$，即$\frac{1}{1}\times\frac{2}{1}\times\frac{CE}{EA}=1$，则$\frac{CE}{EA}=\frac{1}{2}$．如图，连接$FC$，

$S_{\triangle BCF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC},S_{\triangle CEF}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}$，于是$S_{四边形BCFF}=S_{\triangle BCF}+S_{\triangle CEF}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{3}\times4=\frac{8}{3}$．

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例定理，勾股定理，等边三角形的性质，三角形面积的计算，熟练掌握定理是解题的关键．

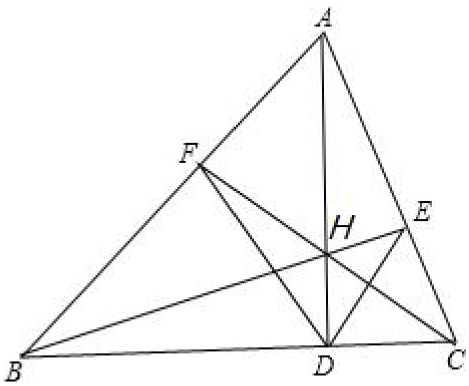
例 7．（2023.山东九年级月考）如图：P，Q，R分别是$\triangle ABC$的BC，CA，AB边上的点．若AP，BQ，CR相交于一点M，求证：$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$.



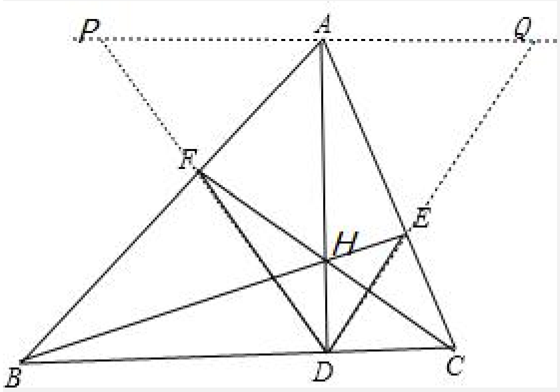
证明：如图，由三角形面积的性质，

有$\frac{AR}{RB}=\frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle BMC}}$，$\frac{BP}{PC}=\frac{S_{\triangle AMB}}{S_{\triangle AMC}}$，$\frac{CQ}{QA}=\frac{S_{\triangle BMC}}{S_{\triangle AMB}}$．以上三式相乘，得$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$.

例 8．（2023.浙江九年级期中）如图，在锐角$\triangle ABC$中，AD是BC边上的高线，H是线段AD内任一点，BH和CH的延长线分别交AC、AB于E、F，求证：$\angle EDH=\angle FDH$。



【详解】证明：过点 A 作 $PQ//BC$，与 DF，DE 的延长线分别交于点 P、Q，则 $DA\perp PQ$。



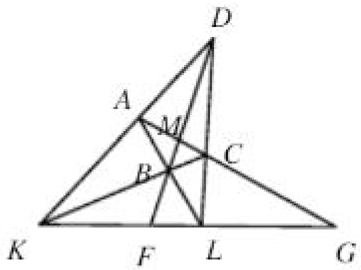
对$\triangle ABC$ 和点 H 应用赛瓦定理可得：$\dfrac{BD}{DC}\times\dfrac{CE}{EA}\times\dfrac{AF}{BF}=1$.

$\because PQ//BC$，$\therefore \dfrac{AF}{BF}=\dfrac{AP}{BD},\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{CD}{AQ},\therefore \dfrac{AP}{BD}\cdot\dfrac{BD}{CD}\cdot\dfrac{CD}{AQ}=1,\therefore AP=AQ$

根据垂直平分线，$\therefore PD=QD$，$\therefore \triangle PQD$ 是等腰三角形，$\therefore \angle EDH=\angle FDH$。

点评：本题考查了赛瓦定理，要熟练掌握定理的内容，是解此题的关键.

例 9．(2023.北京九年级月考如图，四边形 $ABCD$ 的对边 AB 和 CD，AD、BC 分别相交于 L、K，对角线 AC 与 BD 交于点 M，直线 KL 与 BD，AC 分别交于 F、G，求证：$\dfrac{KF}{LF}=\dfrac{KG}{LG}$.



对$\triangle DKL$ 和点 B 应用赛瓦定理可得：$\dfrac{DA}{AK}\times\dfrac{KF}{FL}\times\dfrac{LC}{CD}=1$．①

对$\triangle DKL$ 和截线 ACG，由梅氏定理得：$\dfrac{DA}{AK}\cdot\dfrac{KG}{GL}\cdot\dfrac{LC}{CD}=1$②

由①②得：$\dfrac{KF}{FL}=\dfrac{KG}{LG}$

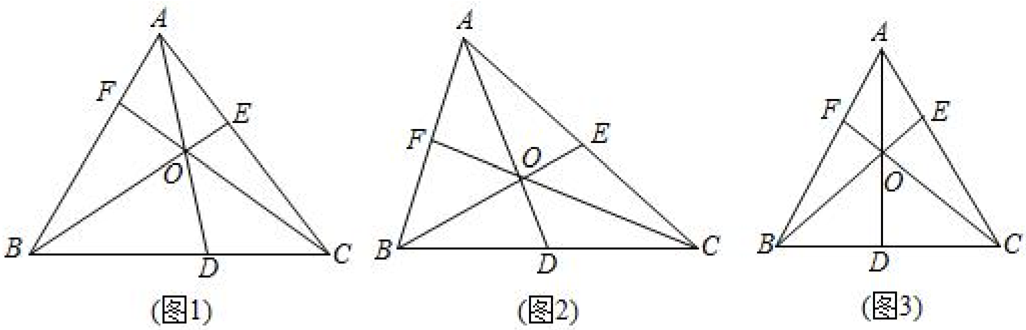
点评：本题考查了赛瓦定理，要熟练掌握定理的内容，是解此题的关键.

例 10. （2022·山西晋中·统考一模）请阅读下列材料，并完成相应任务：

塞瓦定理：塞瓦定理载于 1678 年发表的《直线论》，是意大利数学家塞瓦的重大发现．塞瓦是意大利伟大的水利工程师，数学家.

定理内容：如图 1，塞瓦定理是指在 $\triangle ABC$ 内任取一点 O，延长 AO，BO，CO 分别交对边于 D，E，F，则 $\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{BF}=1$.

数学意义：使用塞瓦定理可以进行直线形中线段长度比例的计算，其逆定理还可以用来进行三点共线、三线共点等问题的判定方法，是平面几何学以及射影几何学中的一项基本定理，具有重要的作用.



任务解决：(1)如图 2，当点 D，E 分别为边 BC，AC 的中点时，求证：点 F 为 AB 的中点；(2)若 $\triangle ABC$ 为等边三角形（图 3），$AB=12$，$AE=4$，点 D 是 BC 边的中点，求 BF 的长，并直接写出 $\triangle BOF$ 的面积.

【答案】(1)证明见解析(2) $BF=8$；$\triangle BOF$ 的面积为 $6\sqrt{3}$

【分析】（1）根据塞瓦定和中点的性质即可求解；

（2）根据塞瓦定和等边三角形的性质即可求出 BF，然后过点 F 作 $FG\perp BC$ 于 G，证明 $\triangle COD\sim\triangle CFG$，可求出 OD，从而求出△BOC 的面积，然后根据 $\frac{AF}{BF}=\frac{1}{2}$ 可求△BCF 的面积，从而得解.

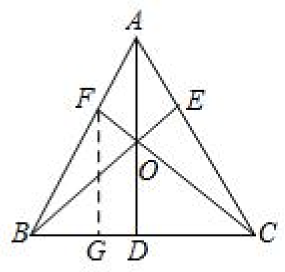
【详解】（1）证明：在 $\triangle ABC$ 中，$\because$ 点 D，E 分别为边 BC，AC 的中点，$\therefore BD=CD$，$CE=AE$.

由赛瓦定理可得：$\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{BF}=1$．$\therefore\frac{AF}{BF}=1$，$\therefore AF=BF$．即点 F 为 AB 的中点；

（2）解：$\because\triangle ABC$ 为等边三角形，$AB=12$，$\therefore BC=AC=12$

$\because$ 点 D 是 BC 边的中点，$\therefore BD=DC=6$，

$\because AE=4$，$\therefore CE=8$．由赛瓦定理可得：$BF=8$；过点 F 作 $FG\perp BC$ 于 G，



$\therefore BG = BF \cdot \cos 60° = 4$， $FG = BF \cdot \sin 60° = 4\sqrt{3}$， $\therefore CG=BC-BG=8$，

$\because AB=AC$，$BD=CD$，$\therefore AD\perp BC$，$\therefore AD // FG$，$\therefore \triangle COD \sim \triangle CFG$，

$\therefore \dfrac{OD}{FG} = \dfrac{CD}{CG}$，即 $\dfrac{OD}{4\sqrt{3}} = \dfrac{6}{8}$，$\therefore OD = 3\sqrt{3}$，$\therefore S_{\triangle BCO} = \dfrac{1}{2} BC \cdot OD = 18\sqrt{3}$，

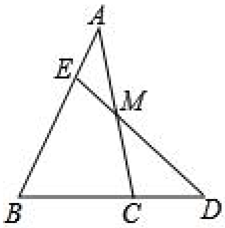
$\because AB=12$，$BF=8$，$\therefore AF=AB-BF=4$，$\therefore \dfrac{AF}{BF} = \dfrac{1}{2}$，$\therefore \dfrac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle BCF}} = \dfrac{1}{2}$

又 $S_{\triangle ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 12^2 = 36\sqrt{3}$，$\therefore S_{\triangle BCF} = \dfrac{2}{3} S_{\triangle ABC} = 24\sqrt{3}$，$\therefore S_{\triangle BOF} = S_{\triangle BCF} - S_{\triangle BOC} = 6\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质、中点的性质、等边三角形的性质，读懂题意，学会运用塞瓦定理是解题的关键.

课后专项训练

1. （2023.广东九年级期中）如图，在△ABC 中，M 是 AC 的中点，E 是 AB 上一点，$AE=\frac{1}{4}AB$，连接 EM 并延长，交 BC 的延长线于 D，则$\frac{BC}{CD}$=（　　）



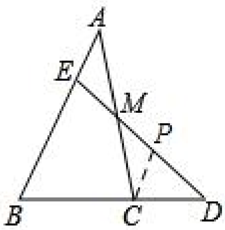
A. $\frac{1}{2}$　　　　B. 2　　　　C. $\frac{2}{3}$　　　　D. $\frac{3}{2}$

解：法 1：对△ABC 和截线 EMD，由梅氏定理得：$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CM}{AM}=1$，

∵M 是 AC 的中点，E 是 AB 上一点，$AE=\frac{1}{4}AB$，∴$\frac{AE}{EB}=\frac{1}{3},\frac{CM}{AM}=1$，

∴$\frac{1}{3}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot1=1$，∴$\frac{BD}{CD}=3$，∴$\frac{BC}{CD}=2$，故选 B.

法 2：如图，过 C 点作 $CP\parallel AB$，交 DE 于 P，



∵$PC\parallel AE$，∴△AEM∽△CPM，∴$\frac{PC}{AE}=\frac{CM}{AM}$，

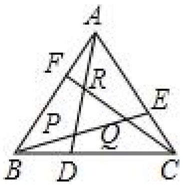
∵M 是 AC 的中点，∴$AM=CM$，∴$PC=AE$，

∵$AE=\frac{1}{4}AB$，∴$CP=\frac{1}{4}AB$，∴$CP=\frac{1}{3}BE$，

∵$CP\parallel BE$，∴△DCP∽△DBE，∴$\frac{CP}{BE}=\frac{CD}{BD}=\frac{1}{3}$，

∴$BD=3CD$，∴$BC=2CD$，即$\frac{BC}{CD}=2$. 故选：B.

2. (2023.浙江九年级期中）如图，D、E、F 内分正△ABC 的三边 AB、BC、AC 均为 1：2 两部分，AD、BE、CF 相交成的△PQR 的面积是△ABC 的面积的（　　）



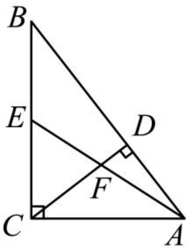
A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{7}$

解：对△ADC用梅涅劳斯定理可以得：$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CE}{EA}=1$，则$\frac{AP}{PD}=\frac{6}{1}$.

设$S_{\triangle BCF}=\frac{2}{3}$，$S_{\triangle BCQ}=\frac{6}{7}S_{\triangle BCE}=\frac{6}{21}$，$S_{BPRF}=\frac{5}{7}S_{\triangle ABD}=\frac{5}{21}$，

$\therefore S_{\triangle PQR}=S_{\triangle BCF}-S_{\triangle BCQ}-S_{BPRF}=\frac{1}{7}S_{\triangle ABC}$. 故选：$D$.

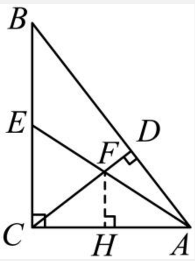
3.（广东 2023-2024 学年九年级上学期月考数学试题）如图，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AC=3$，$BC=4$，$CD\perp AB$，垂足为D，E为BC的中点，AE与CD交于点F，则DF的长为_______.



【答案】$\frac{54}{85}$

【分析】过点F作$FH\perp AC$于H，根据勾股定理求得AB的值，根据三角形的面积求得CD的值，根据勾股定理求得AD的值，根据相似三角形的判定和性质可得$\frac{FH}{AH}=\frac{2}{3}$，设$FH=2k$，$AH=3k$，$CH=3-3k$，根据相似三角形的判定和性质可求得$k$的值，即可求得$CH$和$FH$的值，根据勾股定理求得$CF$的值，即可求解.

【详解】解：如图，过点F作$FH\perp AC$于H.



在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$AC=3$，$BC=4$，则$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$\because CD\perp AB$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，即$\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{1}{2}\times5\times CD$ 解得：$CD=\frac{12}{5}$，

在Rt△ACD中， $AC=3$， $CD=\frac{12}{5}$， $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{9}{5}$，

$\because FH\perp AC$， $\angle ACB=90^\circ$， $\therefore FH\,/\!/\,EC$， $\therefore \triangle AFH\backsim\triangle AEC$， $\therefore \frac{FH}{EC}=\frac{AH}{AC}$，

$\because EC=EB=2$， $AC=3$， $\therefore \frac{FH}{AH}=\frac{EC}{AC}=\frac{2}{3}$，设 $FH=2k$， $AH=3k$， $CH=3-3k$，

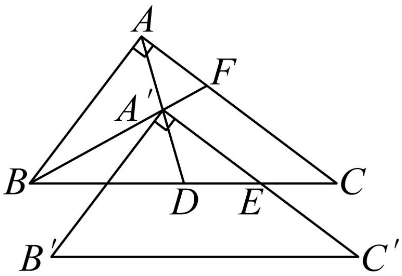
$\because FH\perp AC$， $CD\perp AB$， $\angle DCA=\angle DCA$， $\therefore \triangle CHF\backsim\triangle CDA$，

$\because \frac{FH}{AD}=\frac{CH}{CD}$， $\therefore \frac{2k}{\frac{9}{5}}=\frac{3-3k}{\frac{12}{5}}$， $\therefore k=\frac{9}{17}$， $\therefore FH=\frac{18}{17}$， $CH=3-3\times\frac{9}{17}=\frac{24}{17}$，

$\therefore CF=\sqrt{CH^2+FH^2}=\sqrt{\left(\frac{18}{17}\right)^2+\left(\frac{24}{17}\right)^2}=\frac{30}{17}$， $\therefore DF=CD-CF=\frac{12}{5}-\frac{30}{17}=\frac{54}{85}$，故答案为： $\frac{54}{85}$．

【点睛】本题考查了勾股定理，三角形的面积，相似三角形的判定和性质，熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键．

4．（2022年山西中考一模数学试题）如图，在Rt△ABC中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=3$，$AC=4$．AD是BC边上的中线．将$\triangle ABC$沿AD方向平移得到$\triangle A'B'C'$．$A'C'$与BC相交于点E，连接BA'并延长，与边AC相交于点F．当点E为$A'C'$的中点时，$A'F$的长为____________________．



【答案】$\frac{\sqrt{97}}{12}$/$\frac{1}{12}\sqrt{97}$

【分析】则E为$A'C'$的中点，得A'为AD的中点，证明$\triangle BEA'\backsim\triangle BCF$，推出$BE:BC=A'E:FC=BA':BF=3:4$，在Rt$\triangle ABF$中，利用勾股定理求得$BF$，再根据相似比即可求解．

【详解】解：$\because$由平移的性质得$A'C'\,/\!/\,AC$， $A'C'=AC$，

$\therefore E$为$A'C'$的中点，$\frac{DE}{EC}=\frac{DA'}{AA'}$， $\therefore A'E=\frac{1}{2}AC$， $\therefore A'$为AD的中点，

$\because D$是BC边上的中点， $\therefore \triangle BEA'\backsim\triangle BCF$， $\therefore BE:BC=A'E:FC=BA':BF=3:4$，

$\because AC=4$， $\therefore A'E=2$， $\therefore \frac{2}{FC}=\frac{3}{4}$， $FC=\frac{8}{3}$， $\therefore AF=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$，

在Rt$\triangle ABF$中， $BF=\sqrt{AB^2+AF^2}=\sqrt{9+\frac{16}{9}}=\frac{\sqrt{97}}{3}$，