

专题 04 一元二次方程压轴题型专训

【一元二次方程 30 道压轴题型专训】

1. (2023·浙江温州·校考一模) 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - 2ax + b + 1 = 0$ ($ab \neq 0$) 有两个相等的实数根 k , 则下列选项成立的是 ()

- A. 若 $-1 < a < 0$, 则 $\frac{k}{a} > \frac{k}{b}$ B. 若 $\frac{k}{a} > \frac{k}{b}$, 则 $0 < a < 1$
C. 若 $0 < a < 1$, 则 $\frac{k}{a} < \frac{k}{b}$ D. 若 $\frac{k}{a} < \frac{k}{b}$, 则 $-1 < a < 0$

2. (2023 春·八年级课时练习) 方程 $x^3 + x - 1 = 0$ 的实数根所在的范围是 ()

- A. $-\frac{1}{2} < x < 0$ B. $0 < x < \frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2} < x < 1$ D. $1 < x < \frac{3}{2}$

3. (2023 春·八年级课时练习) 已知 a, b 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两根, 则代数式 $2a^3 + 5a + 3b^3 + 3b + 1$ 的值是 ()

- A. 19 B. 20 C. 14 D. 15

4. (2022 秋·全国·九年级专题练习) 若四个互不相等的正实数 a, b, c, d 满足

$(a^{2012} - c^{2012})(a^{2012} - d^{2012}) = 2012$, $(b^{2012} - c^{2012})(b^{2012} - d^{2012}) = 2012$, 则 $(ab)^{2012} - (cd)^{2012}$ 的值为 ()

- A. -2012 B. -2011 C. 2012 D. 2011

5. (2023 春·福建南平·九年级专题练习) 两个关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 和 $cx^2 + bx + a = 0$, 其中 a, b, c 是常数, 且 $a + c = 0$, 如果 $x = 2020$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根, 那么下列各数中, 一定是方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 的根的是 ()

- A. ± 2020 B. $-\frac{1}{2020}$ C. -2020 D. $\pm \frac{1}{2020}$

6. (2022 秋·九年级课时练习) 要使关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 2x - 1 = 0$ 有两个实数根, 且使关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-4} + \frac{a+2}{4-x} = 2$ 的解为非负数的所有整数 a 的个数为 ()

- A. 5 个 B. 6 个 C. 7 个 D. 8 个

7. (2022 秋·全国·九年级专题练习) 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 有下列说法:

- ①若 $a - b + c = 0$, 则方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 必有一个根为 1;
②若方程 $ax^2 + c = 0$ 有两个不相等的实根, 则方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 必有两个不相等的实根;
③若 c 是方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的一个根, 则一定有 $ac + b + 1 = 0$ 成立;
④若 x_0 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根, 则 $b^2 - 4ac = (2ax_0 - b)^2$.

其中正确的有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

8. (2023 春·浙江·八年级期末) 若方程 $x^2 + 2px - 3p - 2 = 0$ 的两个不相等的实数根 x_1 、 x_2 满足

$x_1^2 + x_1^3 = 4 - (x_2^2 + x_2^3)$, 则实数 p 的所有值之和为 ()

- A. 0 B. $-\frac{3}{4}$ C. -1 D. $-\frac{5}{4}$

9. (2022 秋·重庆·九年级西南大学附中校考阶段练习) 对于多项式 $x^2 - xy - 2y^2$ 记为 $f(x, y)$, 即

$f(x, y) = x^2 - xy - 2y^2$; 若令 $x = 1$, $y = 2$, 即 $f(1, 2) = 1^2 - 1 \times 2 - 2 \times 2^2 = -9$; 下面几个结论正确的个数有

() 个.

(1) 存在实数 x 使 $f(x, 1) = k$ 成立, 则 k 的取值范围是 $k \geq -\frac{9}{4}$;

(2) 若 $f(3, y) < 0$, 则 $-3 < y < \frac{3}{2}$;

(3) 若 $f(x, y) = 0$, 则 $\frac{2x-y}{x+2y} = -3$ 或 $\frac{3}{4}$;

(4) 存在整数 x 、 y , 使 $f(x, y) = 3xy + 4x - 6y^2 - 8y + 4$ 成立.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

10. (2022 春·湖南长沙·八年级校考期末) 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 有下列说法: ①若

$a - b + c = 0$, 则方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 必有一个根为 1; ②若方程 $ax^2 + c = 0$ 有两个不相等的实根, 则方

程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 必有两个不相等的实根; ③若 c 是方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的一个根, 则一定有

$ac + b + 1 = 0$ 成立. 其中正确的有 ()

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

11. (2023 春·浙江·七年级专题练习) 已知关于 x 的方程 $x + \frac{a}{x} + b = 0$ 的两根均大于 1 且小于 2, 则 $a+b$ 的取值范围是_____.

12. (2023 春·浙江·七年级专题练习) 已知 x , y 为实数, 且满足 $x^2 - xy + 4y^2 = 4$, 记 $u = x^2 + xy - 4y^2$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $M + m =$ _____.

13. (2023 秋·浙江宁波·八年级校考期末) 已知平行四边形 $ABCD$, $AD = 8$, $\angle BAD = 135^\circ$, 点 E 在边 BC 上, 将平行四边形沿 AE 翻折, 使点 B 落在边 CD 的 F 处, 且满足 $CF - DF = 3\sqrt{2}$, 则 $EF =$ _____.

14. (2023 春·八年级单元测试) 对于实数 a , b , 定义运算“ $*$ ”: $\begin{cases} a * b = a^2 - ab (a \geq b) \\ a * b = ab - b^2 (a < b) \end{cases}$, 例如: $4 * 2$, 因为

$4 > 2$, 所以 $4 * 2 = 4^2 - 4 \times 2 = 8$, 若 x_1 、 x_2 是一元二次方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的两个根, 则 $x_1 * x_2$

的值是_____.

15. (2022 秋·江苏宿迁·九年级统考阶段练习) 对于实数 a, b , 定义运算“ $*$ ”; $a * b = \begin{cases} a^2 - ab (a \leq b) \\ b^2 - ab (a > b) \end{cases}$, 关于

x 的方程 $(2x) * (x-1) = t+3$ 恰好有三个不相等的实数根, 则 t 的取值范围是_____.

16. (2022 秋·北京西城·九年级北京四中校考阶段练习) 已知双曲线 $y = \frac{5}{x}$ 与直线 $y = kx + b$ 交于点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

(1) 若 $x_1 + x_2 = 0$, 则 $y_1 + y_2 =$ _____;

(2) 若 $x_1 + x_2 > 0$ 时, $y_1 + y_2 > 0$, 则 k _____ 0, b _____ 0 (填“ $>$ ”、“ $=$ ”或“ $<$ ”).

17. (2023·山东枣庄·统考一模) 将关于 x 的一元二次方程 $x^2 - px + q = 0$ 变形为 $x^2 = px - q$, 就可以将 x^2 表示为关于 x 的一次多项式, 从而达到“降次”的目的, 又如 $x^3 = x \cdot x^2 = x(px - q) = \dots$, 我们将这种方法称为“降次法”, 通过这种方法可以化简次数较高的代数式. 根据降次法, 已知 $x^2 + x - 1 = 0$, 且 $x > 0$. 则 $x^4 - 2x^3 + 3x$ 的值为_____.

18. (2022 秋·江苏盐城·九年级统考期中) 对于一切不小于 2 的自然数 n , 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (n+2)x - 2n^2 = 0$ 的两个根为 $a_n, b_n (n \geq 2)$, 则 $\frac{1}{(a_2-2)(b_2-2)} + \frac{1}{(a_3-2)(b_3-2)} + \dots + \frac{1}{(a_{2021}-2)(b_{2021}-2)} =$ _____.

19. (2022 春·陕西西安·八年级高新一中校考期末) (1) 若 $ab \neq 1$, 且有 $|8a^2 + 2014a + 7| + (7b^2 + 2014b + 8)^2 = 0$, 则 $\frac{a}{b}$ 的值是_____.

(2) 如果方程 $(x-1)\left(x^2 - 2x + \frac{k}{4}\right) = 0$ 的三个根可以作为一个三角形的三边之长, 那么实数 k 的取值范围是_____.

20. (2023 春·江苏·八年级期末) 韦达是法国杰出的数学家, 其贡献之一是发现了多项式方程根与系数的关系, 如一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两实数根分别为 x_1, x_2 , 则方程可写成 $a(x-x_1)(x-x_2) = 0$, 即 $ax^2 - ak(x_1+x_2) + ax_1x_2 = 0$, 容易发现根与系数的关系: $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 = \frac{c}{a}$. 设一元三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ 三个非零实数根分别 x_1, x_2, x_3 , 现给出以下结论:

① $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$, ② $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$; ③ $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}$; ④ $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{c}{d}$, 其中正确的是_____

(写出所有正确结论的序号).

21. (2022 春·八年级单元测试) 对于任意实数 k , 方程 $(k^2+1)x^2-2(k+a)^2x+k^2+4k+b=0$ 总有一个根是 1

(1) 求实数 a, b ;

(2) 求另一个根的范围.

22. (2023·四川南充·统考一模) 关于 x 的一元二次方程 $a(1-x^2)-2\sqrt{2}bx+c(1+x^2)=0$ 中, a, b, c 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的三条边, 其中 $\angle C=90^\circ$.

(1) 求证此方程有两个不相等的实数根;

(2) 若方程的两个根是 x_1, x_2 , 且 $x_1^2+x_2^2=12$, 求 $a:b:c$.

23. (2023 春·浙江·八年级期中) 相传, 大禹治水时, 洛水中出现了一个“神龟背上有妙的图案, 史称“洛书”, 用现在的数字翻译出来, 就是三级幻方. 三阶幻方是最简单的幻方, 又叫九宫格, 它是由九个数字组成的一个三行三列的矩阵其对角线、横行、纵向的数字之和均相等, 这个和叫做幻和, 正中间那个数叫中心数. 如图 1, 是由 1、2、3、4、5、6、7、8、9 所组成的一个三阶幻方, 其幻和为 15, 中心数为 5.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图1

	7	
	5	
x		8

图2

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

图3

n_1	n_2	n_3
n_4	n_5	n_6
n_7	n_8	n_9

图4

- (1)如图2也是由1、2、3、4、5、6、7、8、9所组成的一个三阶幻方，则 x 的值为_____.
- (2)由1、2、3、4、5、6、7、8、9生成的幻方称为基本三阶幻方，在此基础上各数再加或减一个相同的数，可组成新三阶幻方，新三阶幻方的幻和也随之变化，如图3，是由基本三阶幻方中各数加上 m 后生成的新三阶幻方，该新三阶幻方的幻和为 a_3 的4倍，且 $a_5 - a_3 = 3$ ，求 a_7 的值.
- (3)由1、2、3、4、5、6、7、8、9生成的基本三阶幻方中每个数都乘以或除以一个不为0的数也可组成一个新三阶幻方，如图4，是由基本三阶幻方中各数乘以 p 再减2后生成的新三阶幻方，其中 n_8 为9个数中的最大数，且满足 $n_1 - 2n_6 = 2, n_8^2 - n_6^2 = 2448$ 求 P 及 n_9 的值.

24. (2023 春·浙江·八年级期中)正月十五是中华民族传统的节日——元宵节，家家挂彩灯、户户吃汤圆已成为世代相沿的习俗. 位于北关古城内的盼盼手工汤圆店，计划在元宵节前用21天的时间生产袋装手工汤圆，已知每袋汤圆需要0.3斤汤圆馅和0.5斤汤圆粉，而汤圆店每天能生产450斤汤圆馅或300斤汤圆粉(每天只能生产其中一种).

- (1)若这 21 天生产的汤圆馅和汤圆粉恰好配套，且全部及时加工成汤圆，则总共生产了多少袋手工汤圆？
- (2)为保证手工汤圆的最佳风味，汤圆店计划把达 21 天生产的汤圆在 10 天内销售完毕．据统计，每袋手工汤圆的成本为 13 元，售价为 25 元时每天可售出 225 袋，售价每降低 2 元，每天可多售出 75 袋．汤圆店按售价 25 元销售 2 天后，余下 8 天进行降价促销，第 10 天结束后将还未售出的手工汤圆以 15 元/袋的价格全部卖给古城小吃店，若最终获利 40500 元，则促销时每袋应降价多少元？

25. (2023 春·福建南平·九年级专题练习) 已知关于 x 的方程 $mx^2 - (m-1)x + 2 = 0$ 有实数根.

- (1)若方程的两根之和为整数，求 m 的值；
- (2)若方程的根为有理根，求整数 m 的值.

26. (2023 春·四川南充·九年级阆中中学校考阶段练习) 已知方程 $x^2 + 4x + 1 = 0$ 的两根是 α 、 β .

- (1)求 $|\alpha - \beta|$ 的值；
- (2)求 $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ 的值；

(3)求作一个新的一元二次方程，使其两根分别等于 α 、 β 的倒数的立方．（参考公式：

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy).$$

27.（2023 春·浙江·八年级期末）（1） x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2(k+1)x + k^2 + 2 = 0$ 的两实根，且 $(x_1 + 1) \cdot (x_2 + 1) = 8$ ，求 k 的值．

（2）已知： $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$ 是一元二次方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个实数根，设 $s_1 = \alpha + \beta$ ， $s_2 = \alpha^2 + \beta^2$ ， $\dots$ ， $s_n = \alpha^n + \beta^n$ ．根据根的定义，有 $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ ， $\beta^2 - \beta - 1 = 0$ ，将两式相加，得 $(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha + \beta) - 2 = 0$ ，于是，得 $s_2 - s_1 - 2 = 0$ ．

根据以上信息，解答下列问题：

①直接写出 s_1, s_2 的值．

②经计算可得： $s_3 = 4, s_4 = 7, s_5 = 11$ ，当 $n \geq 3$ 时，请猜想 s_n, s_{n-1}, s_{n-2} 之间满足的数量关系，并给出证明．

28.（2023 秋·重庆北碚·九年级重庆市兼善中学校考期末）对任意一个三位数 k ，如果满足各个数位上的数字都不为零，且十位上的数字等于百位上的数字与个位上的数字的平均数，那么称这个数为“快乐数”．例如： $k = 123$ ，因为 $2 = \frac{1+3}{2}$ ，所以123是“快乐数”．

(1)请通过计算判断241是不是“快乐数”，并直接写出最大的“快乐数”；

(2)已知一个“快乐数” $k = 100a + 10b + c$ （ $1 \leq a, b, c \leq 9$ ， a, b, c 为自然数），且使关于 x

的一元二次方程 $ax^2 + 2bx + c = 0$ 有两个相等的实数根，若 $7 \leq a + b + c \leq 10$ ，求满足条件的所有 k 的值。

29. (2023 春·湖北十堰·九年级专题练习) 定义：已知 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个实数根，若 $x_1 < x_2 < 0$ ，且 $3 < \frac{x_1}{x_2} < 4$ ，则称这个方程为“限根方程”。如：一元二次方程 $x^2 + 13x + 30 = 0$ 的两根为 $x_1 = -10, x_2 = -3$ ，因 $-10 < -3 < 0$ ， $3 < \frac{-10}{-3} < 4$ ，所以一元二次方程 $x^2 + 13x + 30 = 0$ 为“限根方程”。

请阅读以上材料，回答下列问题：

(1) 判断一元二次方程 $x^2 + 9x + 14 = 0$ 是否为“限根方程”，并说明理由；

(2) 若关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + (k+7)x + k^2 + 3 = 0$ 是“限根方程”，且两根 x_1, x_2 满足 $x_1 + x_2 + x_1x_2 = -1$ ，求 k 的值；

(3) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (1-m)x - m = 0$ 是“限根方程”，求 m 的取值范围。

30. (2023 春·浙江·八年级专题练习) 阅读理解以下内容，解决问题：

解方程： $x^2 + |x| - 2 = 0$ 。

解： $\because x^2 = |x|^2$ ，

$\therefore$ 方程即为： $|x|^2 + |x| - 2 = 0$ ，

设 $|x|=t$ ，原方程转化为： $t^2+t-2=0$

解得， $t_1=1$ ， $t_2=-2$ ，

当 $t_1=1$ 时，即 $|x|=1$ ， $\therefore x_1=1$ ， $x_2=-1$ ；

当 $t_2=-2$ 时，即 $|x|=-2$ ，不成立.

$\therefore$ 综上所述，原方程的解是 $x_1=1$ ， $x_2=-1$.

以上解方程的过程中，将其中 $|x|$ 作为一个整体设成一个新未知数 t ，从而将原方程化为关于 t 的一元二次方程，像这样解决问题的方法叫做“换元法”（“元”即未知数）.

(1)已知方程： $x^2+\frac{1}{x^2}-2x-\frac{2}{x}-1=0$ ，若设 $x+\frac{1}{x}=m$ ，则利用“换元法”可将原方程化为关于 m 的方程是_____；

(2)仿照上述方法，解方程： $\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+1}-5=0$.

专题 04 一元二次方程压轴题型专训

【一元二次方程 30 道压轴题型专训】

1. (2023·浙江温州·校考一模) 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - 2ax + b + 1 = 0$ ($ab \neq 0$) 有两个相等的实数根 k , 则下列选项成立的是 ()

A. 若 $-1 < a < 0$, 则 $\frac{k}{a} > \frac{k}{b}$

B. 若 $\frac{k}{a} > \frac{k}{b}$, 则 $0 < a < 1$

C. 若 $0 < a < 1$, 则 $\frac{k}{a} < \frac{k}{b}$

D. 若 $\frac{k}{a} < \frac{k}{b}$, 则 $-1 < a < 0$

【答案】B

【分析】根据一元二次方程的根的情况利用判别式求得 a 与 b 的数量关系, 再代入方程求 k 的值, 然后结合 a 的取值范围和分式加减法运算法则计算求解.

【详解】解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - 2ax + b + 1 = 0$ ($ab \neq 0$) 有两个相等的实数根 k ,

$$\therefore \Delta = (-2a)^2 - 4a(b+1) = 0,$$

$$4a^2 - 4ab - 4a = 0,$$

$$\text{又} \because ab \neq 0,$$

$$\therefore a - b - 1 = 0, \text{ 即 } a = b + 1,$$

$$\therefore ax^2 - 2ax + a = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = x_2 = 1,$$

$$\therefore k = 1,$$

$$\frac{k}{a} - \frac{k}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a-1} = -\frac{1}{a(a-1)}$$

$$\text{当 } \frac{k}{a} > \frac{k}{b} \text{ 时, 即 } \frac{k}{a} - \frac{k}{b} > 0,$$

$$\text{即 } -\frac{1}{a(a-1)} > 0,$$

$$\therefore a(a-1) < 0,$$

$$\text{即 } \begin{cases} a < 0 \\ a-1 > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a > 0 \\ a-1 < 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } 0 < a < 1$$

$$\text{当 } \frac{k}{a} < \frac{k}{b} \text{ 时, 即 } \frac{k}{a} - \frac{k}{b} < 0,$$

$$\text{即 } -\frac{1}{a(a-1)} < 0,$$

$$\therefore a(a-1) > 0,$$

$$\text{即} \begin{cases} a > 0 \\ a-1 > 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a < 0 \\ a-1 < 0 \end{cases}$$

解得： $a > 1$ 或 $a < 0$ 。

故选：B。

【点睛】本题考查一元二次方程的根的判别式，根据一元二次方程根的情况求得 a 与 b 之间的等量关系是解题关键。

2. (2023 春·八年级课时练习) 方程 $x^3+x-1=0$ 的实数根所在的范围是 ()

- A. $-\frac{1}{2} < x < 0$ B. $0 < x < \frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2} < x < 1$ D. $1 < x < \frac{3}{2}$

【答案】C

【分析】当 $x=0$ 时，方程无解，可知 $x \neq 0$ ，方程两边都除以 x ，得 $x^2+1=\frac{1}{x}$ ，根据 $x^2+1>1$ 可得 $\frac{1}{x}$ 的范围，从而得到缩小的 x 的范围，进一步根据 $x^2+1<2$ ，再得到缩小的 $\frac{1}{x}$ 的范围，进而可确定 x 的更小范围。

【详解】解：将 $x=0$ 代入方程得 $-1 \neq 0$ ，

$\therefore x \neq 0$ ，

$\therefore$ 原方程可化为 $x^2+1=\frac{1}{x}$ ，

$\because x^2+1>1$ ，

$\therefore \frac{1}{x}>1$ ，

$\therefore 0 < x < 1$ ，

当 $0 < x < 1$ 时， $x^2+1<2$ ，

$\therefore \frac{1}{x}<2$ ，

$\therefore x>\frac{1}{2}$ ，

$\therefore \frac{1}{2} < x < 1$ ，

故选 C。

【点睛】本题考查了高次方程根的估计方法，两边除以 x ，得到降次的方程是本题的关键。

3. (2023 春·八年级课时练习) 已知 a ， b 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两根，则代数式

$2a^3+5a+3b^3+3b+1$ 的值是 ()

- A. 19 B. 20 C. 14 D. 15

【答案】D

【分析】由根与系数的关系可得： $a+b=1$ ，再由 a 与 b 是方程的两根可得 $a^2=a+1$ ， $b^2=b+1$ ，把 a^3 与 b^3 采用降次的方法即可求得结果的值.

【详解】 $\because a$ 与 b 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两根

$$\therefore a+b=1, a^2-a-1=0, b^2-b-1=0$$

$$\therefore a^2=a+1, b^2=b+1$$

$$\because a^3 = a^2 \cdot a = (a+1)a = a^2 + a = a+1+a = 2a+1, \text{同理: } b^3 = 2b+1$$

$$\therefore 2a^3 + 5a + 3b^3 + 3b + 1$$

$$= 2(2a+1) + 5a + 3(2b+1) + 3b + 1$$

$$= 9a + 9b + 6$$

$$= 9(a+b) + 6$$

$$= 9 \times 1 + 6$$

$$= 15$$

故选：D.

【点睛】本题考查了一元二次方程的解的概论、一元二次方程根与系数的关系，求代数式的值，灵活进行整式的运算是解题的关键.

4. (2022 秋·全国·九年级专题练习) 若四个互不相等的正实数 a, b, c, d 满足

$(a^{2012} - c^{2012})(a^{2012} - d^{2012}) = 2012$, $(b^{2012} - c^{2012})(b^{2012} - d^{2012}) = 2012$, 则 $(ab)^{2012} - (cd)^{2012}$ 的值为 ()

A. -2012

B. -2011

C. 2012

D. 2011

【答案】A

【分析】根据题意可将 a^{2012} 与 b^{2012} 看做方程 $(x - c^{2012})(x - d^{2012}) = 2012$ 的两个解，把所求的式子被减数利用积的乘方逆运算变形后换为 $x_1 x_2$ ，把方程整理后，利用根与系数的关系表示出 $x_1 x_2$ ，代入整理后的式子中，即可求出所求式子的值.

【详解】解：设 a^{2012} 与 b^{2012} 看做方程 $(x - c^{2012})(x - d^{2012}) = 2012$ 的两个解，
方程整理得： $x^2 - (c^{2012} + d^{2012})x + (cd)^{2012} - 2012 = 0$,

$$\text{则 } (ab)^{2012} - (cd)^{2012} = x_1 x_2 - (cd)^{2012},$$

$$\text{又 } x_1 x_2 = (cd)^{2012} - 2012,$$

$$\text{则 } (ab)^{2012} - (cd)^{2012} = x_1 x_2 - (cd)^{2012} = (cd)^{2012} - 2012 - (cd)^{2012} = -2012.$$

故选：A.

【点睛】此题考查了根与系数的关系的运用，利用了方程的思想，其中当一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 有解，即 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时，设方程的两个根分别为 x_1, x_2 ，则有 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

5. (2023 春·福建南平·九年级专题练习) 两个关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 和

$cx^2+bx+a=0$ ，其中 a, b, c 是常数，且 $a+c=0$ ，如果 $x=2020$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，那么下列各数中，一定是方程 $cx^2+bx+a=0$ 的根的是（ ）

- A. ± 2020 B. $-\frac{1}{2020}$ C. -2020 D. $\pm \frac{1}{2020}$

【答案】C

【分析】根据一元二次方程的定义以及一元二次方程的解法即可求出答案.

【详解】 $\because a \neq 0, c \neq 0, a+c=0$

$$\therefore \frac{c}{a} = -1,$$

$\because ax^2+bx+c=0$ 和 $cx^2+bx+a=0$,

$$\therefore x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \quad \frac{c}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + 1 = 0,$$

$$\therefore x^2 + \frac{b}{a}x - 1 = 0, \quad x^2 - \frac{b}{a}x - 1 = 0,$$

$\because x=2020$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根,

$\therefore x=2020$ 是方程 $x^2 + \frac{b}{a}x - 1 = 0$ 的一个根,

$\therefore x=-2020$ 是方程 $x^2 - \frac{b}{a}x - 1 = 0$ 的一个根,

即 $x=-2020$ 是方程 $cx^2+bx+a=0$ 的一个根

故选：C.

【点睛】本题考查了一元二次方程，解题的关键是熟练运用一元二次方程的定义以及方程的解的概念.

6. (2022 秋·九年级课时练习) 要使关于 x 的一元二次方程 $ax^2+2x-1=0$ 有两个实数根，且

使关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-4} + \frac{a+2}{4-x} = 2$ 的解为非负数的所有整数 a 的个数为（ ）

- A. 5 个 B. 6 个 C. 7 个 D. 8 个

【答案】B

【分析】根据一元二次方程根的情况得到 $a \neq 0$ 且 $\Delta = 2^2 - 4a(-1) \geq 0$ 解得： $a \geq -1$ 且 $a \neq 0$ ，再把分式方程化简求得： $x = -a+6$ ，因为解为非负数， $-a+6 \geq 0$ 且 $-a+6 \neq 4$ 即 $a \leq 6$ 且 $a \neq 2$ ，所以 $-1 \leq a \leq 6$ 且 $a \neq 0, a \neq 2$ ，即可得出满足题意的整数解.

【详解】解：关于 x 的一元二次方程 $ax^2+2x-1=0$ 有两个实数根

$$\text{则} \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 2^2 - 4a(-1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore a \geq -1 \text{ 且 } a \neq 0$$

关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-4} + \frac{a+2}{4-x} = 2$

去分母得: $x - (a+2) = 2(x-4)$

解得: $x = -a+6$

Q 分式方程的解为非负数

$\therefore -a+6 \geq 0$ 且 $-a+6 \neq 4$ 即 $a \leq 6$ 且 $a \neq 2$

$\therefore -1 \leq a \leq 6$ 且 $a \neq 0, a \neq 2$

$\therefore$ 满足题意的整数 a 的值为 $-1, 1, 3, 4, 5, 6$

故答案为: B.

【点睛】本题考查一元二次方程根的情况、分式方程的解, 注意二次项系数不为 0 及分式方程的解要有意义, 这是此题的易错点.

7. (2022 秋·全国·九年级专题练习) 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 有下列说法:

- ①若 $a-b+c=0$, 则方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 必有一个根为 1;
- ②若方程 $ax^2 + c = 0$ 有两个不相等的实根, 则方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 必有两个不相等的实根;
- ③若 c 是方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的一个根, 则一定有 $ac+b+1=0$ 成立;
- ④若 x_0 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根, 则 $b^2 - 4ac = (2ax_0 - b)^2$.

其中正确的有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】A

【分析】按照方程的解的含义、一元二次方程的实数根与判别式的关系、等式的性质、一元二次方程的求根公式等对各选项分别讨论, 可得答案.

【详解】解: ①若 $x=1$ 时, 方程 $ax^2+bx+c=0$, 则 $a+b+c=0$,

$\therefore$ 无法确定 $a-b+c=0$. 故①错误;

② $\because$ 方程 $ax^2+c=0$ 有两个不相等的实根,

$$\therefore \Delta = 0 - 4ac > 0$$

$$\therefore -4ac > 0$$

则方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式,

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

$\therefore$ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有两个不相等的实根, 故②正确;

③ $\because c$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根,

$$\text{则 } ac^2+bc+c=0$$

$$\therefore c(ac+b+1) = 0$$

若 $c=0$, 等式仍然成立,

但 $ac+b+1=0$ 不一定成立，故③错误；

④若 x_0 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，

则由求根公式可得：

$$x_0 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ 或 } x_0 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\therefore 2ax_0 + b = \sqrt{b^2 - 4ac} \text{ 或 } 2ax_0 + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$\therefore b^2 - 4ac = (2ax_0 + b)^2$ ，故④错误。

故选：A.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的实数根与判别式的关系，牢固掌握二者的关系并灵活运用，是解题的关键。

8. (2023 春·浙江·八年级期末) 若方程 $x^2 + 2px - 3p - 2 = 0$ 的两个不相等的实数根 x_1 、 x_2 满足 $x_1^2 + x_1^3 = 4 - (x_2^2 + x_2^3)$ ，则实数 p 的所有值之和为 ()

A. 0

B. $-\frac{3}{4}$

C. -1

D. $-\frac{5}{4}$

【答案】B

【分析】先根据一元二次方程解的定义和根与系数的关系得到 $x_1^2 + 2px_1 - 3p - 2 = 0$ ， $x_1 + x_2 = -2p$ ，进而推出 $x_1^3 = 3px_1 + 2x_1 - 2px_1^2$ ，则 $x_1^3 + x_1^2 = 3px_1 + 2x_1 - 2px_1^2 + x_1^2$ ， $x_2^3 + x_2^2 = 3px_2 + 2x_2 - 2px_2^2 + x_2^2$ ，即可推出 $(3p+2)(x_1+x_2) + (1-2p)(x_1^2+x_2^2) = 4$ ，然后代入 $x_1+x_2 = -2p$ ， $x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 4p$ 得到 $2p(4p+3)(p+1) = 0$ ，再根据判别式求出符号题意的值即可得到答案。

【详解】解： $\because x_1$ 、 x_2 是方程 $x^2 + 2px - 3p - 2 = 0$ 的两个相等的实数根，

$$\therefore x_1^2 + 2px_1 - 3p - 2 = 0, \quad x_1 + x_2 = -2p, \quad x_1x_2 = -3p - 2,$$

$$\therefore x_1^2 + 2px_1 = 3p + 2,$$

$$\therefore x_1^3 + 2px_1^2 = 3px_1 + 2x_1,$$

$$\therefore x_1^3 = 3px_1 + 2x_1 - 2px_1^2,$$

$$\therefore x_1^3 + x_1^2 = 3px_1 + 2x_1 - 2px_1^2 + x_1^2,$$

$$\text{同理得 } x_2^3 + x_2^2 = 3px_2 + 2x_2 - 2px_2^2 + x_2^2,$$

$$\therefore x_1^2 + x_1^3 = 4 - (x_2^2 + x_2^3),$$

$$\therefore x_1^2 + x_1^3 + (x_2^2 + x_2^3) = 4,$$

$$\therefore 3px_1 + 2x_1 - 2px_1^2 + x_1^2 + 3px_2 + 2x_2 - 2px_2^2 + x_2^2 = 4,$$

$$\therefore (3p+2)(x_1+x_2) + (1-2p)(x_1^2+x_2^2) = 4,$$

$$\therefore (3p+2)(-2p) + (1-2p)[(-2p)^2 - 2(-3p-2)] = 4,$$

$$\therefore -6p^2 - 4p + (1-2p)(4p^2 + 6p + 4) = 4,$$

$$\therefore -6p^2 - 4p + 4p^2 + 6p + 4 - 2p(4p^2 + 6p + 4) = 4,$$

$$\therefore -2p^2 + 2p - 2p(4p^2 + 6p + 4) = 0,$$

$$\therefore -2p(4p^2 + 6p + 4 + p - 1) = 0,$$

$$\therefore 2p(4p^2 + 7p + 3) = 0,$$

$$\therefore 2p(4p+3)(p+1) = 0,$$

$$\text{解得 } p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -\frac{3}{4},$$

$$\therefore \Delta = (2p)^2 + 4(3p+2) > 0,$$

$$\therefore p^2 + 3p + 2 > 0,$$

$$\therefore (p+1)(p+3) > 0,$$

$$\therefore p = -1 \text{ 不符合题意},$$

$$\therefore p_1 + p_3 = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{符合题意},$$

故选 B.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系，根的判别式，一元二次方程解的定义，熟知一元二次方程的解是使方程左右两边相等的未知数的值是解题的关键.

9. (2022 秋·重庆·九年级西南大学附中校考阶段练习) 对于多项式 $x^2 - xy - 2y^2$ 记为 $f(x, y)$, 即 $f(x, y) = x^2 - xy - 2y^2$; 若令 $x=1$, $y=2$, 即 $f(1, 2) = 1^2 - 1 \times 2 - 2 \times 2^2 = -9$; 下面几个结论正确的个数有 () 个.

(1) 存在实数 x 使 $f(x, 1) = k$ 成立, 则 k 的取值范围是 $k \geq -\frac{9}{4}$;

(2) 若 $f(3, y) < 0$, 则 $-3 < y < \frac{3}{2}$;

(3) 若 $f(x, y) = 0$, 则 $\frac{2x-y}{x+2y} = -3$ 或 $\frac{3}{4}$;

(4) 存在整数 x, y , 使 $f(x, y) = 3xy + 4x - 6y^2 - 8y + 4$ 成立.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】A

【分析】由 $f(x, 1) = k$, 得 $x^2 - x - 2 - k = 0$, 根据 $\Delta \geq 0$, 得 $k \geq -\frac{9}{4}$, 可判断①正确; 由

$(3, y) < 0$ ，得 $2y-3$ 与 $y+3$ 同号，可判断②错误；由 $f(x, y)=0$ ，则 $x^2-xy-2y^2=0$ 可得 $x=2y$ 或 $x=-y$ ，当 $x=2y \neq 0$ 时， $\frac{2x-y}{x+2y}=\frac{3}{4}$ ，当 $x=-y \neq 0$ 时， $\frac{2x-y}{x+2y}=-3$ ，可判断③错误；若 $f(x, y)=3xy+4x-6y^2-8y+4$ ，可得 $x=2y+2+2\sqrt{2}$ 或 $x=2y+2-2\sqrt{2}$ ，由 y 为整数，知 x 不是整数，可判断④错误。

【详解】解：若 $f(x, 1)=k$ ，则 $x^2-x-2=k$ ，即 $x^2-x-2-k=0$ ，

∵存在实数 x 使 $f(x, 1)=k$ 成立，

∴ $x^2-x-2-k=0$ 有实数根，即 $\Delta \geq 0$ ，

∴ $1-4(-2-k) \geq 0$ ，

解得 $k \geq -\frac{9}{4}$ ，故①正确，符合题意；

若 $f(3, y) < 0$ ，则 $9-3y-2y^2 < 0$ ，

∴ $(2y-3)(y+3) > 0$ ，

∴ $2y-3$ 与 $y+3$ 同号，

∴ $y > \frac{3}{2}$ 或 $y < -3$ ，故②错误，不符合题意；

若 $f(x, y)=0$ ，则 $x^2-xy-2y^2=0$ ；

∴ $(x-2y)(x+y)=0$ ，

∴ $x=2y$ 或 $x=-y$ ，

当 $x=2y \neq 0$ 时， $\frac{2x-y}{x+2y}=\frac{4y-y}{2y+2y}=\frac{3}{4}$ ，

当 $x=-y \neq 0$ 时， $\frac{2x-y}{x+2y}=\frac{-2y-y}{-y+2y}=-3$ ，

∴③错误，不符合题意；

若 $f(x, y)=3xy+4x-6y^2-8y+4$ ，则 $x^2-xy-2y^2=3xy+4x-6y^2-8y+4$ ，

∴ $x^2-4xy+4y^2-4x+8y-4=0$ ，

∴ $(x-2y)^2-4(x-2y)-4=0$ ，

∴ $x-2y=\frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{2}=2 \pm 2\sqrt{2}$ ，

即 $x=2y+2+2\sqrt{2}$ 或 $x=2y+2-2\sqrt{2}$ ，

若 y 为整数，则 x 不是整数，

∴不存在整数 x, y ，使 $f(x, y)=3xy+4x-6y^2-8y+4$ 成立，故④错误，不符合题意；

∴正确的有①，共 1 个；

故选：A.

【点睛】本题考查不等式的解集，涉及一元二次方程根的判别式，不等式，代数式的值等知识，解题的关键是掌握一元二次方程根的判别式及代数式的变形。

10. (2022 春·湖南长沙·八年级校考期末) 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，有下列说法：①若 $a - b + c = 0$ ，则方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 必有一个根为 1；②若方程 $ax^2 + c = 0$ 有两个不相等的实根，则方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 必有两个不相等的实根；③若 c 是方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的一个根，则一定有 $ac + b + 1 = 0$ 成立。其中正确的有 ()

A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

【答案】B

【分析】按照方程的解的含义、一元二次方程的实数根与判别式的关系、等式的性质、因式分解法解一元二次方程等知识对各选项分别讨论，可得答案。

【详解】解 ①当 $x = -1$ 时， $a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c = a - b + c = 0$ ，所以方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 必有一个根为 -1 ，故①错误。

②方程 $ax^2 + c = 0$ 有两个不相等的实根，则 $-4ac > 0$ ，那么 $b^2 - 4ac > 0$ ，故方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 必有两个不相等的实根，故②正确。

③由 c 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根，得 $ac^2 + bc + c = 0$ 。当 $c \neq 0$ ，则 $ac + b + 1 = 0$ ；当 $c = 0$ ，则 $ac + b + 1$ 不一定等于 0，故③不一定正确。

故选：B。

【点睛】本题主要考查一元二次方程的根、一元二次方程的根的判别式、因式分解法解一元二次方程、等式的性质，熟练掌握一元二次方程的根、一元二次方程的根的判别式、等式的性质是解决本题的关键。

11. (2023 春·浙江·七年级专题练习) 已知关于 x 的方程 $x + \frac{a}{x} + b = 0$ 的两根均大于 1 且小于 2，则 $a + b$ 的取值范围是_____。

【答案】 $-3 < a + b < 3$

【分析】先化简分式方程得一元二次方程，再根据根与系数的关系列出两个根与 a, b 的关系式，最后根据根的范围，求出 $a + b$ 的取值范围。

【详解】解： $x + \frac{a}{x} + b = 0$ ，

去分母得， $x^2 + bx + a = 0$ ，

设 $x^2 + bx + a = 0$ 的两个根为 x_1, x_2 ，

由根与系数的关系可知，

$$x_1 \cdot x_2 = a,$$

$$x_1 + x_2 = -b,$$

$$\therefore a + b = x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2),$$

$\because x_1, x_2$, 均大于 1 且小于 2,

$\therefore 1 < x_1 \cdot x_2 < 4, 1 < x_1 + x_2 < 4,$

$\therefore -4 < -(x_1 + x_2) < -1.$

$\therefore -3 < x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) < 3.$

$\therefore -3 < a + b < 3.$

故答案为: $-3 < a + b < 3$

【点睛】本题考查根与系数的关系和代数式取值范围问题, 熟练进行解方程, 解不等式, 正确运算是解题的关键.

12. (2023 春·浙江·七年级专题练习) 已知 x, y 为实数, 且满足 $x^2 - xy + 4y^2 = 4$, 记 $u = x^2 + xy - 4y^2$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $M + m =$ _____.

【答案】 $\frac{8}{15}$

【分析】根据题意得出 $u = x^2 + xy - 4y^2 = 2x^2 - 4$, 进而根据关于 y 的方程

$4y^2 - xy + (x^2 - 4) = 0$ 有实数解, 得出 $x^2 \leq \frac{64}{15}$, 即可求解.

【详解】解: $\because x^2 - xy + 4y^2 = 4,$

$\therefore x^2 - 4 = xy - 4y^2,$

$\therefore u = x^2 + xy - 4y^2 = 2x^2 - 4,$

$\because$ 已知 x, y 为实数, 且满足 $x^2 - xy + 4y^2 = 4,$

$\therefore$ 关于 y 的方程 $4y^2 - xy + (x^2 - 4) = 0$ 有实数解,

$\therefore \Delta = x^2 - 16(x^2 - 4) \geq 0,$

$\therefore x^2 \leq \frac{64}{15},$

$\therefore x^2$ 的最大值为 $\frac{64}{15},$

$\therefore u = 2x^2 - 4$ 的最大值为: $2 \times \frac{64}{15} - 4 = \frac{68}{15}$, 即 $M = \frac{68}{15}$,

当 $x = 0$ 时, $u = 2x^2 - 4$ 的最小值为: -4 , 即 $m = -4$,

$\therefore M + m = \frac{8}{15}.$

故答案为: $\frac{8}{15}.$

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式, 熟练掌握一元二次方程的根的判别式是解题的关键.

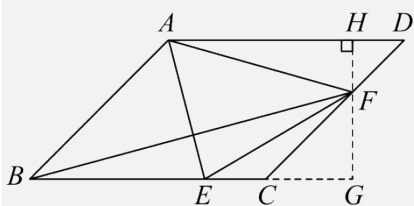
13. (2023 秋·浙江宁波·八年级校考期末) 已知平行四边形 $ABCD$, $AD = 8$, $\angle BAD = 135^\circ$

，点 E 在边 BC 上，将平行四边形沿 AE 翻折，使点 B 落在边 CD 的 F 处，且满足 $CF - DF = 3\sqrt{2}$ ，则 $EF =$ _____.

【答案】 $\frac{20}{3}$ / $6\frac{2}{3}$

【分析】过点 F 作 $HG \perp AD$ 于点 H ，交 BC 的延长线于点 G ，得出 $\triangle FCG, \triangle FHD$ 是等腰直角三角形，设 $CG = x, EC = y$ ，则 $BE = EF = 8 - y$ ，在 $\text{Rt}\triangle AFH$ 中， $AF^2 = AH^2 + HF^2$ ，求得 $x = 4$ ，在 $\text{Rt}\triangle FEG$ 中， $EF^2 = FG^2 + EG^2$ ，得出 $y = \frac{3}{4}$ ，即可求解.

【详解】解：如图，过点 F 作 $HG \perp AD$ 于点 H ，交 BC 的延长线于点 G ，



设 $CG = x, EC = y$ ，

则 $BE = EF = 8 - y$ ，

$\because \angle BAD = 135^\circ$ ，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore \angle BCD = \angle A = 135^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ， $AD = BC$ ， $AB = CD$ ，

$\therefore \angle FCG = 45^\circ$ ， $\angle D = \angle DCG = 45^\circ$

$\therefore \triangle FCG, \triangle FHD$ 是等腰直角三角形，

$\therefore FC = \sqrt{2}CG = \sqrt{2}x$ ，

$\therefore CF - DF = 3\sqrt{2}$ ，

$\therefore DF = CF - 3\sqrt{2} = (x - 3)\sqrt{2}$ ，

$\therefore HF = HD = x - 3$ ，

$\therefore AD = 8$ ，

$\therefore AH = 8 - HD = 8 - (x - 3) = 11 - x$ ，

$\therefore CD = CF + FD = \sqrt{2}x + (x - 3)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}$

$\therefore AF = AB = CD = 2\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AFH$ 中， $AF^2 = AH^2 + HF^2$ ，

即 $(2\sqrt{2}x - 3\sqrt{2})^2 = (11 - x)^2 + (x - 3)^2$

解得： $x = 4$ 或 $x = -\frac{14}{3}$ （舍去）

在 $\text{Rt}\triangle FEG$ 中， $EF^2 = FG^2 + EG^2$ ，

$\therefore (8 - y)^2 = (y + 4)^2 + 4^2$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/885214013121011334>