

5. 要得到函数 $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{3})$ 的导函数 $f'(x)$ 的图像, 只需将 $f(x)$ 的图像 ()

- A. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把各点的纵坐标伸长到原来的 3 倍
- B. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把各点的纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍
- C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把各点的纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍
- D. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把各点的纵坐标伸长到原来的 3 倍

6. 将函数 $y = \sin(3x + \varphi)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{9}$ 个单位长度后, 得到函数 $f(x)$ 的图象, 则“ $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ”是“ $f(x)$ 是偶函数”的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

7. 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 内单调递减, $a = f(\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3})$, $b = f(\sin(-\frac{\pi}{5}))$, $c = f(\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}})$, 则 a, b, c 满足 ()

- A. $a < b < c$
- B. $c < a < b$
- C. $b < c < a$
- D. $c < b < a$

8. 已知集合 $A = \{x | x > -1\}$, 集合 $B = \{x | x(x+2) < 0\}$, 那么 $A \cup B$ 等于 ()

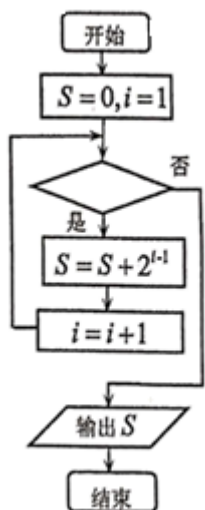
- A. $\{x | x > -2\}$
- B. $\{x | -1 < x < 0\}$
- C. $\{x | x > -1\}$
- D. $\{x | -1 < x < 2\}$

9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, O 为坐标原点, F_1, F_2 为其左、右焦点, 点 G 在 C 的渐近线上,

$F_2G \perp OG$, 且 $\sqrt{6} |OG| = |GF_1|$, 则该双曲线的渐近线方程为 ()

- A. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$
- B. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$
- C. $y = \pm x$
- D. $y = \pm \sqrt{2}x$

10. 执行下面的程序框图, 若输出的 S 的值为 63, 则判断框中可以填入的关于 i 的判断条件是 ()



- A. $i \leq 5$ B. $i \leq 6$ C. $i \leq 7$ D. $i \leq 8$

11. 已知等差数列 $\{a_n\}$, 则“ $a_2 > a_1$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列”的 ()

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

12. 若复数 $z = \frac{a-i}{1+i}$ 在复平面内对应的点在第二象限, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-1, 1)$ B. $(-\infty, -1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $a = 2$, $c = 2\sqrt{3}$, $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $b =$ _____

14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线与双曲线左支交于 A, B 两点,

$\angle AF_2B = 90^\circ$, $\triangle AF_2B$ 的内切圆的圆心的纵坐标为 $\frac{\sqrt{7}}{2}a$, 则双曲线的离心率为 _____.

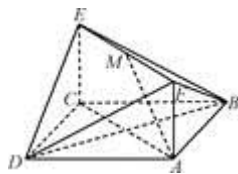
15. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(x-2) & (x > 2) \\ f(x+4) & (x \leq 2) \end{cases}$, 则 $f(-5) =$ _____; $f(f(-5)) =$ _____.

16. $\left(ax^2 - \frac{1}{x}\right)^6$ 展开式中 x^3 项系数为 160, 则 a 的值为 _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图所示, 已知正方形 $ABCD$ 和矩形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直, $AB = \sqrt{2}$

, $AF=1$, M 是线段 EF 的中点.



求证: (1) $AM \parallel$ 平面 BDE ;

(2) $AM \perp$ 平面 BDF .

18. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 上的任意一点 M 到直线 $y = -1$ 的距离比 M 点到点 $F(0, 2)$ 的距离小 1.

(1) 求动点 M 的轨迹 C_1 的方程;

(2) 若点 P 是圆 $C_2: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 1$ 上一动点, 过点 P 作曲线 C_1 的两条切线, 切点分别为 A, B , 求直线 AB 斜率的取值范围.

19. (12 分) 某公司欲投资一新型产品的批量生产, 预计该产品的每日生产总成本价格 y (单位: 万元) 是每日产量 x (单位: 吨) 的函数: $y = \frac{32x^2}{x^2 - 1} \ln x (x > 1)$.

(1) 求当日产量为 3 吨时的边际成本 (即生产过程中一段时间的总成本对该段时间产量的导数);

(2) 记每日生产平均成本 $\frac{y}{x} = m$, 求证: $m < 16$;

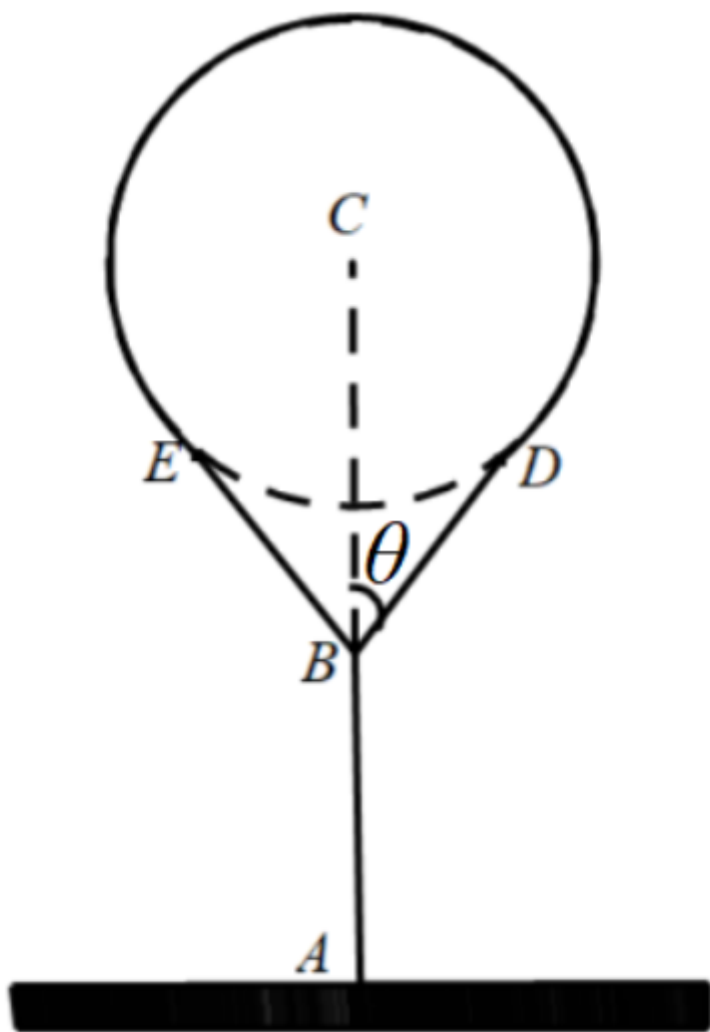
(3) 若财团每日注入资金可按数列 $a_n = \frac{2n}{4n^2 - 1}$ (单位: 亿元) 递减, 连续注入 60 天, 求证: 这 60 天的总投入资金大于 $\ln 11$ 亿元.

20. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右顶点为 A , 点 P 在 y 轴上, 线段 AP 与椭圆 C 的交点 B 在第一象限, 过点 B 的直线 l 与椭圆 C 相切, 且直线 l 交 x 轴于 M . 设过点 A 且平行于直线 l 的直线交 y 轴于点 Q .

(I) 当 B 为线段 AP 的中点时, 求直线 AB 的方程;

(II) 记 $\triangle BPQ$ 的面积为 S_1 , $\triangle OMB$ 的面积为 S_2 , 求 $S_1 + S_2$ 的最小值.

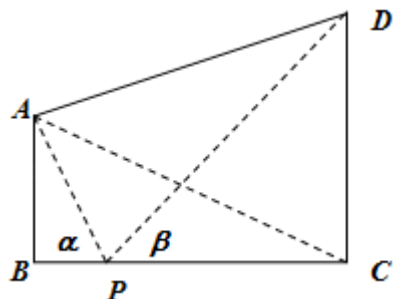
21. (12 分) 如图, 湖中有一个半径为 1 千米的圆形小岛, 岸边点 A 与小岛圆心 C 相距 3 千米, 为方便游人到小岛观光, 从点 A 向小岛建三段栈道 AB , BD , BE , 湖面上的点 B 在线段 AC 上, 且 BD , BE 均与圆 C 相切, 切点分别为 D , E , 其中栈道 AB , BD , BE 和小岛在同一个平面上. 沿圆 C 的优弧 (圆 C 上实线部分) 上再修建栈道 DE . 记 $\angle CBD$ 为 θ .



(1) 用 θ 表示栈道的总长度 $f(\theta)$ ，并确定 $\sin \theta$ 的取值范围；

(2) 求当 θ 为何值时，栈道总长度最短.

22. (10 分) 如图，两座建筑物 AB ， CD 的底部都在同一个水平面上，且均与水平面垂直，它们的高度分别是 $10m$ 和 $20m$ ，从建筑物 AB 的顶部 A 看建筑物 CD 的视角 $\angle CAD = 60^\circ$.



(1) 求 BC 的长度；

(2) 在线段 BC 上取一点 P (点 P 与点 B ， C 不重合)，从点 P 看这两座建筑物的视角分别为 $\angle APB = \alpha$ ， $\angle DPC = \beta$

，问点 P 在何处时， $\alpha + \beta$ 最小？

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

解：因为 $P = \{y | y = -x^2 + 1, x \in \mathbb{R}\} = \{y | y \leq 1\}$ ， $Q = \{y | y = 2^x, x \in \mathbb{R}\} = \{y | y > 0\}$ ，因此选 C

2、C

【解析】

观察图表，判断四个选项是否正确。

【详解】

由表易知 A、B、D 项均正确，2010 年中国 GDP 为 $\frac{1.4670}{3.55\%} \approx 41$ 万亿元，2018 年中国 GDP 为 $\frac{3.6990}{4.11\%} = 90$ 万亿

元，则从 2010 年至 2018 年，中国 GDP 的总值大约增加 49 万亿，故 C 项错误。

【点睛】

本题考查统计图表，正确认识图表是解题基础。

3、C

【解析】

首先，根据二倍角公式和辅助角公式化简函数解析式，根据所求函数的周期性，得到其周期为 4，然后借助于三角函数的周期性确定其值即可。

【详解】

解： $f(x) = \sin^2 \frac{\pi}{4} x - \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{4} x \cos \frac{\pi}{4} x$.

$$= \frac{1}{2} (1 - \cos \frac{\pi}{2} x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\pi}{2} x$$

$$= -\sin(\frac{\pi}{2} x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2},$$

$$\therefore f(x) = -\sin(\frac{\pi}{2} x + \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2},$$

$\therefore f(x)$ 的周期为 $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$,

$$f(1) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad f(4) = 0,$$

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 2.$$

$$\therefore f(1) + f(2) + \dots + f(2020)$$

$$= 505 \times [f(1) + f(2) + f(3) + f(4)]$$

$$= 505 \times 2$$

$$= 1010.$$

故选: C

【点睛】

本题重点考查了三角函数的图象与性质、三角恒等变换等知识, 掌握辅助角公式化简函数解析式是解题的关键, 属于中档题.

4、B

【解析】

按补集、交集定义, 即可求解.

【详解】

$$\complement_U A = \{1, 3, 5, 6\}, \quad \complement_U B = \{1, 2, 5, 6\},$$

$$\text{所以 } (\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{1, 5, 6\}.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查集合间的运算, 属于基础题.

5、D

【解析】

先求得 $f'(x)$, 再根据三角函数图像变换的知识, 选出正确选项.

【详解】

$$\text{依题意 } f'(x) = 3 \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \cos\left[\left(3x + \frac{5\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{2}\right] = 3 \sin\left(3x + \frac{5\pi}{6}\right) = 3 \sin\left[3\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right], \text{ 所以由}$$

$f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{3})$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把各点的纵坐标伸长到原来的 3 倍得到 $f'(x)$ 的图像.

故选：D

【点睛】

本小题主要考查复合函数导数的计算，考查诱导公式，考查三角函数图像变换，属于基础题.

6、A

【解析】

求出函数 $y = f(x)$ 的解析式，由函数 $y = f(x)$ 为偶函数得出 φ 的表达式，然后利用充分条件和必要条件的定义判断即可.

【详解】

将函数 $y = \sin(3x + \varphi)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{9}$ 个单位长度，得到的图象对应函数的解析式为

$$f(x) = \sin\left[3\left(x + \frac{\pi}{9}\right) + \varphi\right] = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3} + \varphi\right),$$

若函数 $y = f(x)$ 为偶函数，则 $\frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ ，解得 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$ ，

当 $k = 0$ 时， $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

因此，“ $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ”是“ $y = f(x)$ 是偶函数”的充分不必要条件.

故选：A.

【点睛】

本题考查充分不必要条件的判断，同时也考查了利用图象变换求三角函数解析式以及利用三角函数的奇偶性求参数，考查运算求解能力与推理能力，属于中等题.

7、D

【解析】

首先由函数为偶函数，可得函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内单调递增，再由 $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} > \left|\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right| > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$ ，即可判定大小

【详解】

因为偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 减，所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上增，

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} > 1, \quad \left|\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right| \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \therefore c < b < a.$$

故选：D

【点睛】

本题考查函数的奇偶性和单调性，不同类型的数比较大小，应找一个中间数，通过它实现大小关系的传递，属于中档题.

8、A

【解析】

求出集合 B ，然后进行并集的运算即可.

【详解】

$$\because A = \{x | x > -1\}, B = \{x | -2 < x < 0\},$$

$$\therefore A \cup B = \{x | x > -2\}.$$

故选：A.

【点睛】

本小题主要考查一元二次不等式的解法，考查集合并集的概念和运算，属于基础题.

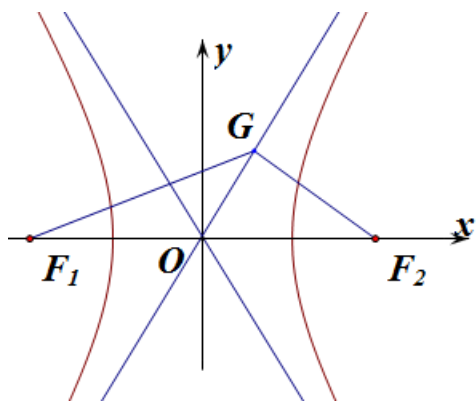
9、D

【解析】

根据 $F_2G \perp OG$ ，先确定出 GF_2, GO 的长度，然后利用双曲线定义将 $\sqrt{6}|OG| = |GF_1|$ 转化为 a, b, c 的关系式，化简后可得到 $\frac{b}{a}$ 的值，即可求渐近线方程.

【详解】

如图所示：



$$\text{因为 } F_2G \perp OG, \text{ 所以 } |GF_2| = \frac{\left| \frac{bc}{a} \right|}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} = b, |OG| = \sqrt{c^2 - b^2} = a,$$

$$\text{又因为 } \sqrt{6}|OG| = |GF_1|, \text{ 所以 } \sqrt{6}|\overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{GF_1}|, \text{ 所以 } \sqrt{6}|\overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{GF_2} + \overrightarrow{F_2F_1}|,$$

$$\text{所以 } 6|\overrightarrow{OG}|^2 = |\overrightarrow{GF_2} + \overrightarrow{F_2F_1}|^2, \text{ 所以 } 6a^2 = b^2 + 4c^2 + 2b \times 2c \times \cos(180^\circ - \angle GF_2F_1),$$

$$\text{所以 } 6a^2 = b^2 + 4c^2 + 2b \times 2c \times \left(-\frac{b}{c}\right), \text{ 所以 } b^2 = 2a^2, \frac{b}{a} = \sqrt{2},$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/885221043340011140>