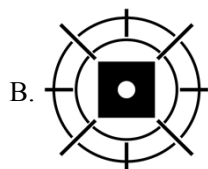


2025 北京昌平一中初三（下）开学考

数 学

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分．在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 下列巴黎奥运会项目标志中，既是中心对称图形又是轴对称图形的是（ ）



2. 若 $x = 2$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 + ax - a = 0$ 的一个解，则 a 的值为（ ）

A. 2

B. 4

C. -2

D. -4

3. 抛物线 $y = (x + 2)^2 - 1$ 的对称轴是（ ）

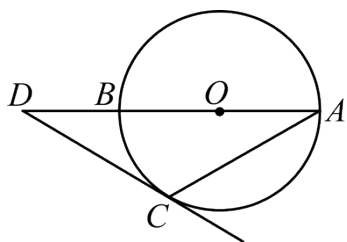
A. $x = -2$

B. $x = 2$

C. $x = -1$

D. $x = 1$

4. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 D 在 AB 的延长线上， DC 切 $\odot O$ 于点 C ，如果 $\angle A = 30^\circ$ ， $OD = 4$ ，那么 DC 的长是（ ）



A. 6

B. 4

C. $2\sqrt{3}$

D. 3

5. 点 $(-1, y_1)$ ， $(2, y_2)$ 在抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ 上，则 y_1 ， y_2 的大小关系是（ ）

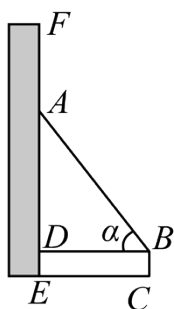
A. $y_1 < y_2$

B. $y_1 > y_2$

C. $y_1 = y_2$

D. 无法判断

6. 为了提升全民防灾减灾意识，某消防大队进行了消防演习．如图，架在消防车上的云梯 AB 可伸缩，也可绕点 B 转动，其底部 B 离地面的距离 BC 为 2m，当云梯顶端 A 在建筑物 EF 所在直线上时，底部 B 到 EF 的距离 BD 为 10m，若 $\angle ABD = \alpha$ ，则此时云梯顶端 A 离地面的高度 AE 的长是（ ）

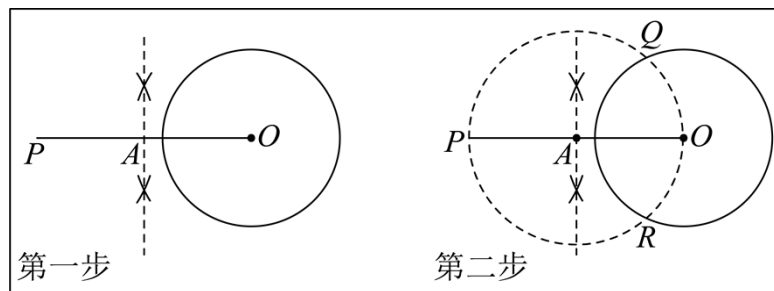


- A. $10\tan\alpha + 2$ B. $\frac{10}{\tan\alpha} + 2$ C. $\frac{10}{\cos\alpha} + 2$ D. $10\sin\alpha + 2$

7. 我国新能源汽车产业为应对全球气候变化、推动低碳发展做出了巨大贡献. 根据中国汽车工业协会发布的数据, 2024 年 5 月新能源汽车销量约为 95.5 万辆, 2024 年 7 月新能源汽车销量约为 99.1 万辆, 设新能源汽车销量的月平均增长率为 x , 则 x 满足的方程是 ()

- A. $95.5(1+2x) = 99.1$ B. $95.5(1+2x)^2 = 99.1$
C. $95.5(1+x)^2 = 99.1$ D. $95.5(1+x^2) = 99.1$

8. 如图, 已知 $\odot O$ 及 $\odot O$ 外一定点 P , 嘉嘉进行了如下操作后, 得出了四个结论:



- ①点 A 是 PO 的中点;
②直线 PQ , PR 都是 $\odot O$ 的切线;
③点 P 到点 Q 、点 R 的距离相等;
④连接 PQ , QA , PR , RO , OQ , 则 $S_{\triangle PQA} = \frac{1}{8} S_{\text{四边形} PROQ}$.

对上述结论描述正确的是 ()

- A. 只有①正确 B. 只有②正确 C. ①②③正确 D. ①②③④都正确

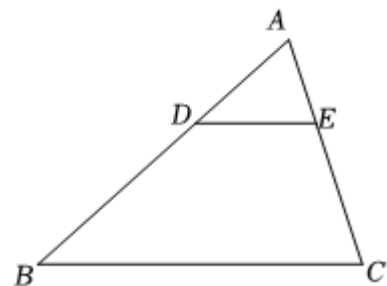
二、填空题 (本题共 8 小题, 每小题 2 分, 共 16 分)

9. 若 $\sqrt{x-3}$ 在实数范围内有意义, 则实数 x 的取值范围是_____.

10. 分解因式: $x^2y - 4y =$ _____.

11. 已知二次函数满足条件: ①有最大值; ②它的图象经过点 $(1, 0)$, 写出一个满足上述所有条件的二次函数的解析式_____.

12. 如图, D 、 E 是 $\triangle ABC$ 边 AB 、 AC 上的两点, 且 $DE \parallel BC$, $DE:BC = 1:3$, 那么 $AD:AB =$ _____.



13. 图 1 为一个装有液体的圆底烧瓶(厚度忽略不计), 侧面示意图如图 2, 其液体水平宽度 AB 为 16cm,

竖直高度 CD 为 4cm ，则 $\odot O$ 的半径为_____ cm 。

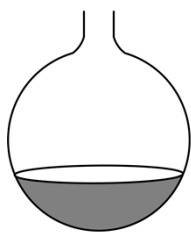


图1

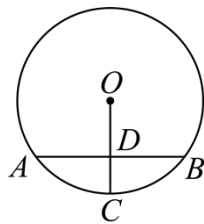
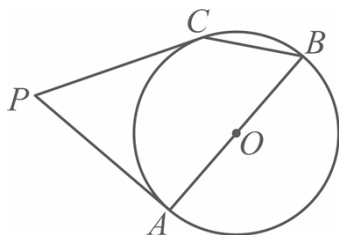
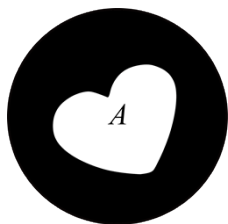


图2

14. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， PA ， PC 是 $\odot O$ 的切线，切点分别为 A ， C 。若 $AB = 2$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，则 PA 的长是_____。



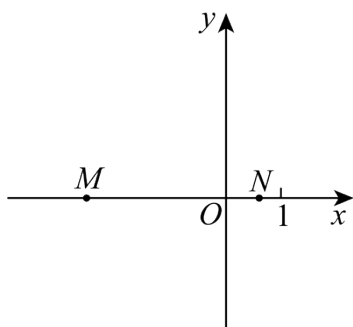
15. 小明看到公园地面上有一个心形封闭图形 A ，为了研究图形 A 的面积，设计了一项试验：在图形 A 外部绘制一个半径为 1 米的圆，如图所示，向这个圆内随机投掷石子。假设石子落在圆内的每一点都是等可能的（不考虑边界），记录的试验数据如下：



掷石子的总次数 p	50	100	200	500	...
石子落在图形 A 内的次数 m	15	43	80	201	...
石子落在阴影部分的次数 n	35	57	120	299	...

随着投掷次数的不断增多，石子落在图形 A 内的频率逐渐稳定在 0.4 左右，因此估计石子落在图形 A 内的概率为_____；由此估计图形 A 的面积为_____平方米。

16. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $M(m, 0)$ ， $N(n, 0)$ ，其中 $m + n = -2$ ，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 经过点 M 和 N ，以下四个结论：



① $abc > 0$; ② $3a + c > 0$; ③ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + 2c = 0$ 无实根; ④ 点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2)

在抛物线上且在对称轴的同侧, 当 $|x_1 - x_2| = 2$ 时, 总有 $|y_1 - y_2| \geq 3$ 时, 则 $a \geq \frac{3}{4}$. 其中所有正确结论的

序号是_____.

三、解答题 (本题共 12 小题, 共 68 分. 第 17-22 题各 5 分; 第 23-26 题各 6 分; 第 27-28 题各 7 分.)

17. 计算: $\sin^2 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \tan 60^\circ + (-2025)^0$.

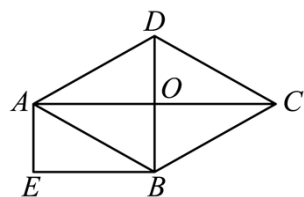
18. 解不等式组:
$$\begin{cases} \frac{x+5}{2} < 3x \\ 3x-4 > 2(x+1) \end{cases}$$

19. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (m-3)x + 2 - m = 0$.

(1) 求证: 该方程总有两个实数根;

(2) 若该方程的实数根均为非负数, 求 m 的取值范围.

20. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于点 O , 分别过点 A 、 B 作 $AE \parallel BD$, $BE \parallel AC$. AE 和 BE 交于点 E .



(1) 求证: 四边形 $AEBO$ 是矩形;

(2) 连接 EC , 当 $\angle ABD = 60^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$ 时, 求 $\tan \angle CEB$ 的值.

21. 我国古代著作《管子·地员篇》中介绍了一种用数学运算获得“宫商角徵羽”五音的方法. 研究发现, 当琴弦的长度比满足一定关系时, 就可以弹奏出不同的乐音. 例如, 三根弦按长度从长到短排列分别奏出乐音 “do, mi, so”, 需满足相邻弦长的倒数差相等. 若最长弦为 15 个单位长, 最短弦为 10 个单位长, 求中间弦的长度.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象经过点 $A(-2, -2)$ 和 $B(1, 4)$.

(1) 求该函数的解析式;

(2) 当 $x > 2$ 时, 对于 x 的每一个值, 函数 $y = \frac{1}{2}x + n$ 的值小于函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的值, 直接写出 n 的取值范围.

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$.

求作: 射线 AE , 使得 $AE \parallel BC$.

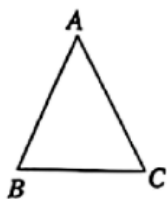
小靖同学的作法如下:

①以点 A 为圆心, AB 长为半径画圆, 延长 BA 交 $\odot A$ 于点 D ;

②作 $\angle ABC$ 的角平分线交 $\odot A$ 于点 E ;

③作射线 AE .

所以射线 AE 即为所求.



请你依据小靖同学设计的尺规作图过程, 完成下列问题:

(1) 使用直尺和圆规, 依作法补全图形 (保留作图痕迹)

(2) 完成下面的证明

证明: 连接 DC , $\because AB = AC$, $\therefore$ 点 C 在 $\odot A$ 上.

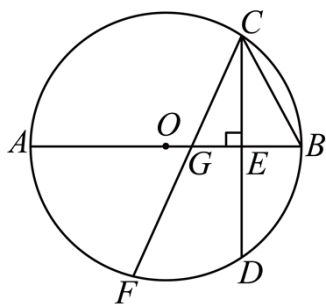
$\because BD$ 是 $\odot A$ 的直径, $\therefore \angle BCD = \underline{\hspace{1cm}}$ ($\underline{\hspace{1cm}}$) (填推理依据)

$\because BE$ 平分 $\angle ABC$, $\therefore \angle ABE = \angle CBE$. $\therefore \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CE}$,

$\therefore \angle DAE = \angle CAE$ ($\underline{\hspace{1cm}}$) (填推理依据).

$\therefore AD = AC$, $\therefore AE \perp DC$. ($\underline{\hspace{1cm}}$) (填推理依据). $\therefore AE \parallel BC$.

24. 如图, $\odot O$ 的直径 AB 垂直弦 CD 于点 E , F 是圆上一点, D 是 $\overset{\frown}{BF}$ 的中点, 连结 CF 交 OB 于点 G , 连结 BC .



(1) 求证: $GE = BE$.

(2) 若 $AG = 6$, $BG = 4$, 求 CD 的长.

25. 某兴趣小组通过实验研究发现: 当音量 x (单位: dB) 满足 $40 \leq x \leq 70$ 时, 听觉舒适度 y 与音量 x 之间满足二次函数关系. 当音量为 $45dB$ 时, 听觉舒适度为 6 ; 当音量为 $55dB$ 时, 听觉舒适度达到最大值

10.

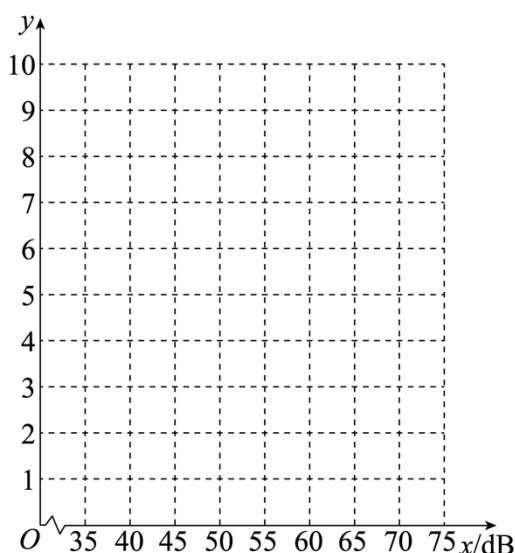


图1

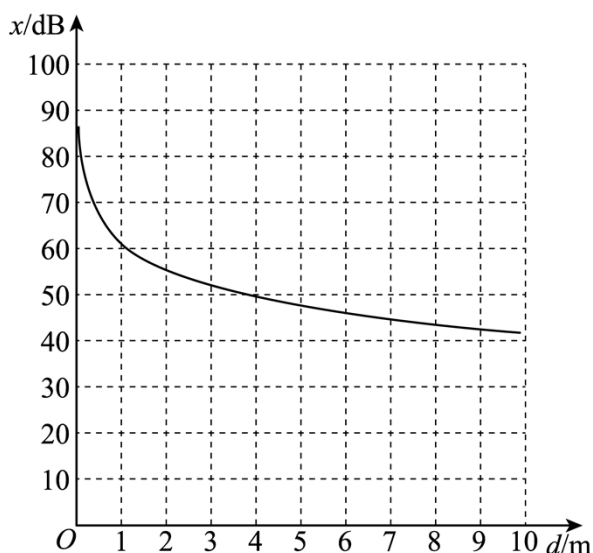


图2

- (1) 求该二次函数的解析式，并在图 1 的平面直角坐标系中画出该二次函数的图象；
- (2) 在家听音乐时，小明听到的音量 x 与所坐位置到音箱的距离 d (单位: m) 的关系如图 2 所示. 若她希望听觉舒适度不小于 9，根据此实验研究结果，请写出小明所坐位置到音箱的距离 d 的取值范围 _____ (结果保留小数点后一位).

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图象经过点 $(2, c)$.

- (1) 求此二次函数图象的对称轴；
- (2) 若二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图象上存在两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ，其中 $m-1 < x_1 < m$, $m+2 < x_2 < m+4$ ，且 $y_1 = y_2$ ，求 m 的取值范围.

27. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = \angle C = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$)， $AM \perp BC$ 于点 M ， D 是线段 BC 上的动点 (不与点 B , C , M 重合)，将线段 DM 绕点 D 顺时针旋转 2α 得到线段 DE .

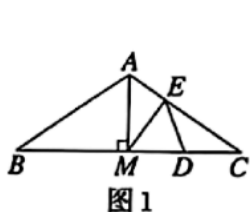


图1

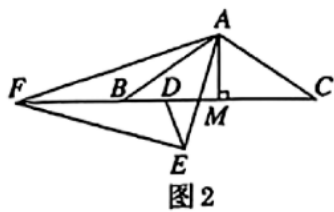
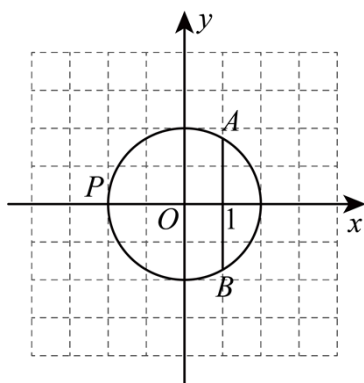


图2

- (1) 如图 1，如果点 E 在线段 AC 上，求证: $ME \perp AC$ ；
- (2) 如图 2，如果 D 在线段 BM 上，在射线 MB 上存在点 F 满足 $DF = DC$ ，连接 AE , AF , EF ，求证: $AE \perp FE$.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中， $\odot O$ 的半径为 2，对于点 P , Q 和 $\odot O$ 的弦 AB ，给出如下定义：若弦 AB 上存在点 C ，使得点 P 绕点 C 逆时针旋转 60° 后与点 Q 重合，则称点 Q 是点 P 关于弦 AB 的“等边旋转点”.



(1) 如图，点 $P(-2,0)$ ，直线 $x=1$ 与 $\odot O$ 交于点 A, B 。

①点 B 的坐标为_____，点 B _____（填“是”或“不是”）点 P 关于弦 AB 的“等边旋转点”；

②若点 P 关于弦 AB 的“等边旋转点”为点 Q ，则 PQ 的最小值为_____，当 PQ 与 $\odot O$ 相切时，点 Q 的坐标为_____；

(2) 已知点 $D(t,0)$ ， $E(-1,0)$ ，若对于线段 OE 上的每一点 M ，都存在 $\odot O$ 的长为 $2\sqrt{3}$ 的弦 GH ，使得点 M 是点 D 关于弦 GH 的“等边旋转点”，直接写出 t 的取值范围。

参考答案

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分．在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 【答案】B 【分析】本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念：轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合；中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合．根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解．

【详解】解：A、该图形是轴对称图形，不是中心对称图形，不符合题意；

B、该图形既是轴对称图形，也是中心对称图形，符合题意；

C、该图形既不是中心对称图形，也不是轴对称图形，不符合题意；

D、该图形是中心对称图形，不是轴对称图形，不符合题意．

故选：B．

2. 【答案】D 【分析】本题考查一元二次方程的解的定义，掌握方程的解就是使等式成立的未知数的值是解题关键．

把 $x=2$ 代入一元二次方程 $x^2+ax-a=0$ 中即可解得 a 的值．

【详解】解：把 $x=2$ 代入一元二次方程 $x^2+ax-a=0$ 中得： $4+2a-a=0$ ，

解得： $a=-4$ ．

故选：D．

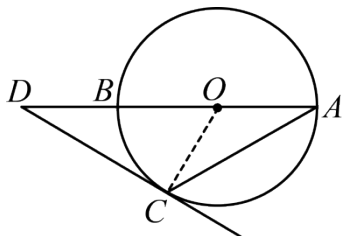
3. 【答案】A 【分析】本题考查二次函数的性质，根据题目中抛物线的顶点式，可以直接写出它的对称轴，本题得以解决．

【详解】解：抛物线 $y=(x+2)^2-1$ 的对称轴是直线 $x=-2$ ，

故选：A．

4. 【答案】C 【分析】本题考查了切线的性质，含 30° 的直角三角形的性质，勾股定理等知识，连接 OC ，由切线的性质得 $\angle OCD=90^\circ$ ，根据等腰三角形的性质得 $\angle OCA=\angle A=30^\circ$ ，通过外角性质可得 $\angle DOC=\angle OCA+\angle A=60^\circ$ ，则 $\angle D=30^\circ$ ，最后由勾股定理即可求解，掌握知识点的应用是解题的关键．

【详解】解：连接 OC ，



$\because DC$ 切 $\odot O$ 于点 C ，

$\therefore \angle OCD=90^\circ$ ，

$\because OC=OA$ ，

$$\therefore \angle OCA = \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DOC = \angle OCA + \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle D = 30^\circ,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{2}OD = 2,$$

$$\therefore DC = \sqrt{OD^2 - OC^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

故选：C.

5. 【答案】A 【分析】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征和二次函数的性质，首先确定抛物线的对称轴，再根据开口方向，根据二次函数的性质即可判断 y_1 ， y_2 的大小关系.

$$\text{【详解】解：}\because \text{抛物线 } y = \frac{1}{2}x^2 - 1,$$

$\therefore$ 抛物线开口向上，对称轴为直线 $x = 0$ ，

$\therefore$ 在对称轴右侧 y 随 x 的增大而增大，

$\therefore (-1, y_1)$ 关于对称轴的对称点为 $(1, y_1)$ ，

$$\because 1 < 2,$$

$$\therefore y_1 < y_2.$$

故选：A.

6. 【答案】A 【分析】本题考查了解直角三角形的应用，比较简单，掌握正切的定义是解题的关键.

根据 $\angle ABD$ 的正切可得 $AD = BD \cdot \tan \alpha = 10 \tan \alpha$ ，而 $DE = BC = 2$ ，进而即可求解.

$$\text{【详解】解：在直角三角形 } ABD \text{ 中，} \tan \alpha = \frac{AD}{BD},$$

$$\therefore AD = BD \cdot \tan \alpha = 10 \tan \alpha,$$

根据题意可得： $DE = BC = 2$ ，

$$\therefore AE = AD + DE = 10 \cdot \tan \alpha + 2,$$

故选：A.

7. 【答案】C 【分析】设新能源汽车销量的月平均增长率为 x ，根据题意，得 $95.5(1+x)^2 = 99.1$ ，解答即可.

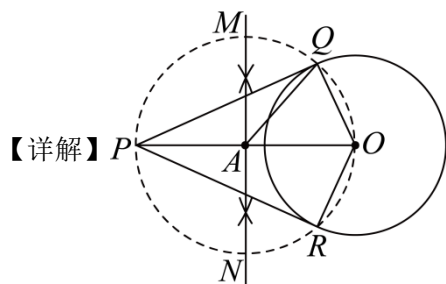
本题考查了平均增长率问题，正确列方程解答是解题的关键.

$$\text{【详解】解：设新能源汽车销量的月平均增长率为 } x, \text{ 根据题意，得 } 95.5(1+x)^2 = 99.1,$$

故选：C.

8. 【答案】C 【分析】由第一步作图痕迹可知直线 MN 是 PO 的垂直平分线，由此可判断①正确；根据直径所对的圆周角等于 90° ，可判断②正确；根据切线长定理可判断③正确；先证明 $\triangle VPO \cong \triangle VPOR$

, 由此可得 $S_{VPOQ} = S_{VPOR}$, 进而可得 $S_{VPQA} = \frac{1}{2} S_{VPOQ} = \frac{1}{4} S_{\text{四边形}PROQ}$, 因此可判断④错误.



由第一步作图痕迹可知直线 MN 是 PO 的垂直平分线, 因此点 A 是 PO 的中点,
故①正确;

$\because PO$ 是 $\odot A$ 的直径,

$\therefore \angle PQO = \angle PRO = 90^\circ$,

$\therefore PQ \perp OQ, PR \perp OR$,

$\therefore$ 直线 PQ, PR 都是 $\odot O$ 的切线,

故②正确;

直线 PQ, PR 都是 $\odot O$ 的切线, 根据切线长定理, 可知 $PQ = PR$,

故③正确;

$QPQ = PR, OQ = OR, PO = PO$,

$\therefore \triangle POQ \cong \triangle POR$,

$\therefore S_{VPOQ} = S_{VPOR}$,

$\therefore S_{VPOQ} = \frac{1}{2} S_{\text{四边形}PROQ}$.

$\because$ 点 A 是 PO 的中点,

$\therefore S_{VPQA} = \frac{1}{2} S_{VPOQ} = \frac{1}{4} S_{\text{四边形}PROQ}$,

故④错误.

故选: C

【点睛】本题主要考查了垂直平分线的尺规作图法、圆周角定理、切线的判定以及切线长定理. 熟练掌握以上知识是解题的关键.

二、填空题 (本题共 8 小题, 每小题 2 分, 共 16 分)

9. 【答案】 $x \geq 3$ 【分析】 本题主要考查实数及二次根式有意义的条件, 熟练掌握实数的性质及二次根式有意义的条件是解题的关键; 因此此题可根据二次根式有意义的条件“被开方数要为非负数”可进行求解.

【详解】解: 由题意得: $x - 3 \geq 0$,

$\therefore x \geq 3$;

故答案为 $x \geq 3$.

10. 【答案】 $y(x+2)(x-2)$ 【分析】 本题主要考查了提公因式法分解因式和平方差公式法分解因式等知识点，熟练掌握用平方差公式分解因式是解决此题的关键. 先提取公因式 y ，然后利用平方差公式分解因式即可.

【详解】 解： $x^2y - 4y = y(x^2 - 4) = y(x+2)(x-2)$,

故答案为： $y(x+2)(x-2)$.

11. 【答案】 $y = -x^2 + 1$ (答案不唯一) 【分析】 本题主要考查了二次函数的图象和性质，解题的关键是掌握 $a > 0$ 时，函数开口向上，有最小值； $a < 0$ 时，函数开口向下，有最大值.

【详解】 $\because$ 二次函数有最大值，

$\therefore$ 二次函数的二次项系数小于 0，可设二次函数的解析式为 $y = -x^2 + c$,

又 $\because$ 它的图象经过点 $(1, 0)$,

$$\therefore 0 = -1 + c,$$

$$\therefore c = 1,$$

二次函数的解析式为 $y = -x^2 + 1$.

故答案为： $y = -x^2 + 1$ (答案不唯一)

12. 【答案】 $\frac{1}{3}$ 【分析】 通过证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，可求解.

【详解】 解： $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3},$$

故答案为： $\frac{1}{3}$.

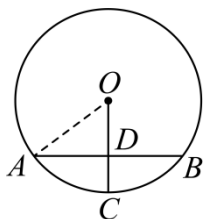
【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质，证明三角形相似是解题的关键.

13. 【答案】 10 【分析】 本题考查垂径定理，勾股定理.

由垂径定理得到 $AD = \frac{1}{2}AB = 8\text{cm}$ ，设 $\odot O$ 的半径为 $x\text{cm}$ ，则 $OA = OC = x\text{cm}$,

$OD = OC - CD = x - 4(\text{cm})$ ，在 $\triangle AOD$ 中，根据勾股定理有 $AD^2 + OD^2 = OA^2$ ，代入即可解答.

【详解】 解：连接 AO ，



$$\because OC \perp AB,$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 16 = 8(\text{cm}),$$

设 $\odot O$ 的半径为 $x\text{cm}$ ，则 $OA = OC = x\text{cm}$ ，

$$\therefore OD = OC - CD = (x - 4)(\text{cm}),$$

$$\because \text{在 } \triangle AOD \text{ 中, } AD^2 + OD^2 = OA^2,$$

$$\text{即 } 8^2 + (x - 4)^2 = x^2,$$

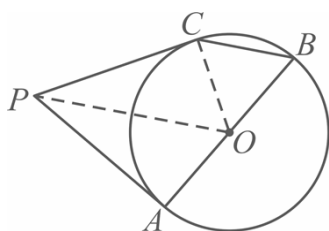
解得： $x = 10$ ，

$\therefore \odot O$ 的半径为 10cm 。

故答案为： 10。

14. 【答案】 $\sqrt{3}$ 【分析】 本题主要考查圆的切线性质，圆周角定理，全等三角形的判定及勾股定理的应用。通过连接 OC ，利用切线性质得到垂直关系，证明 $\triangle OAP \cong \triangle OCP$ ，得到 $\angle AOP = \angle COP$ ，再圆周角定理求出 $\angle AOC$ ，最后在 $\text{Rt}\triangle OAP$ 中应用勾股定理求得 PA 的长。

【详解】 连接 OC ， OP ，



$\because PA, PC$ 是 $\odot O$ 的切线，

$$\therefore PA = PC,$$

又 $\because OA \perp PA, OC \perp PC, OP = OP$ ，

$$\therefore \triangle OAP \cong \triangle OCP \text{ (HL 定理)},$$

$$\therefore \angle AOP = \angle COP,$$

而 $\angle AOC = 2\angle ABC = 120^\circ$ （圆心角是圆周角的两倍），

$$\therefore \angle AOP = 60^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle OAP$ 中， $\angle APO = 30^\circ$ ，

$$AB \text{ 是 } \odot O \text{ 的直径, } OA = \frac{1}{2}AB = 1,$$

$$\therefore OA = \frac{1}{2}PO = 1$$

$$\therefore PO = 2$$

$$\because PO^2 = OA^2 + PA^2$$

$$\therefore PA = \sqrt{PO^2 - OA^2} = \sqrt{3},$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/885300310022012123>