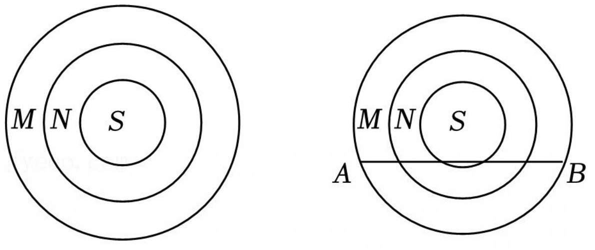
2025年湖南省株洲二中自主招生数学一模试卷

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．（5分）如图（1），一只圆形平盘被同心圆划成M，N，S三个区域，计算落在M，N，S三个区域的豆子数的比，发现落入三个区域的豆子数的比显示出一定的稳定性，总在三个区域的面积之比附近摆动．如图（2），发现三个圆弧刚好将AB五等分，我们把豆子落入三个区域的概率分别记作P（M），P（N），P（S）（S）$=\frac{1}{5}$，则P（M）等于（　　）



（1）　　　　（2）

A．$\frac{8}{15}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{4}{15}$　　D．$\frac{1}{5}$

2．（5分）阅读材料：已知点P（x_0，y_0）和直线$y=kx+b$，则点P到直线$y=kx+b$的距离d可用公式$d=\frac{|kx_0-y_0+b|}{\sqrt{1+k^2}}$计算．例如：求点$P$（﹣2，1），$b=1$．所以点$P$（﹣2，1）到直线$y=x+1$的距离为$d=\frac{|kx_0-y_0+b|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|1\times(-2)-1+1|}{\sqrt{1+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$．

根据以上材料，有下列结论：

①点（2，0）到直线$y=-2x$的距离是$\frac{4\sqrt{5}}{5}$；

②直线$y=-2x$和直线$y=-2x+6$的距离是$\frac{6\sqrt{5}}{5}$；

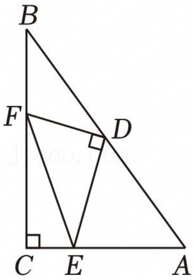
③抛物线$y=x^2-4x+3$上存在两个点到直线$y=-2x$的距离是$\sqrt{5}$；

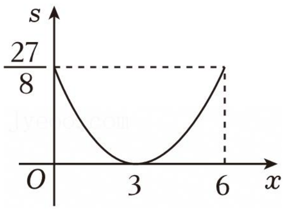
④若点P是抛物线$y=x^2-4x+3$上的点，则点P到直线$y=-2x$距离的最小值是$\frac{2\sqrt{5}}{5}$．

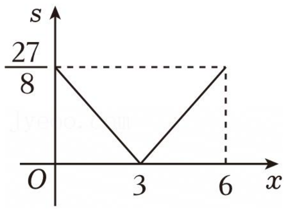
其中，正确结论的个数是（　　）

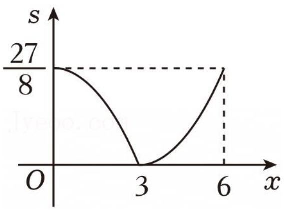
A．1　　B．2　　C．3　　D．4

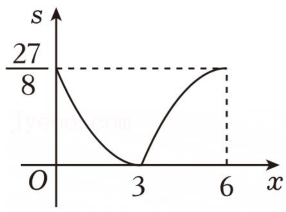
3．（5分）如图，△ABC中，∠$C=90°$，$BC=8$，点D为AB的中点，连接DE，过点D作$DF\perp DE$，△DEF的面积为y，$s=y-6$（　　）



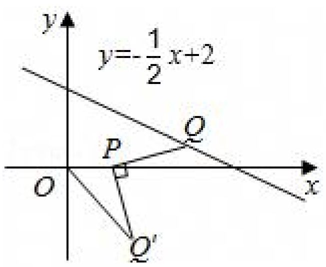
A. 

B. 

C. 

D. 

4.（5 分）如图，在平面直角坐标系中，Q 是直线 $y=-\frac{1}{2}$，将 Q 绕点 P（1，0）顺时针旋转 90°，连接 OQ'，则 OQ'的最小值为（　　）



A. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

5.（5 分）现有 m（$m\geqslant50$））个负整数：a_1，a_2，a_5，$a_4\cdots$，对它们进行如下操作：第 1 次操作，将所有角标数字为 1 的倍数的数变换为相反数 ${}_1$，$-a_2$，$-a_3$，$-a_4\cdots$；第 2 次操作，在第 1 次操作完之后的数列上，得到数列：$-a_1$，a_2，$-a_3$，$a_4\cdots$；以此类推，第 m 次操作（$m-1$）次操作完之后的数列上，将所有角标数字为 m 的倍数的数变换为相反数（　　）

（1）若 $m=50$，第 4 次操作结束后，整个数列中会有 29 个正数；

（2）若 $m=50$，第 50 次操作结束后，整个数列中会有 7 个正数；

（3）在第 m 次操作结束后的数列中任取两个正数 a_i，aj，则（$|i-5|+|7-i|$）（$|j-11|+|15-j|$）的最小值为 24.

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

6．（5 分）已知 A（$2-t$，y_1），B（t，y_1）是抛物线 $y=x^2+bx+c$ 上不同的两点，当 $0\leqslant x\leqslant t$ 时，恒有 $c-1\leqslant y_1\leqslant c$，则 t 的取值范围是（　　）

A．$t>1$　　　　B．$0\leqslant t\leqslant 2$　　　　C．$\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 2$　　　　D．$1\leqslant t\leqslant 3$

7．（5 分）已知 $AB=2$，$\angle ACB=90°$，作射线 BM，作 $CH\perp BM$ 于点 H，则 BH 长的最大值是（　　）

A．$\sqrt{2}$　　　　B．$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　C．2　　　　D．$1+\sqrt{2}$

8．（5 分）若数 a 使关于 x 的分式方程 $\frac{2}{x-1}+\frac{a}{1-x}=4$ 的解为正数，且使关于 y 的不等式组 $\begin{cases}\frac{y+2}{3}-\frac{y}{2}>1\\ 2(y-a)\leqslant 0\end{cases}$，则符合条件的所有整数 a 的和为（　　）

A．10　　　　B．12　　　　C．14　　　　D．16

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

（多选）9．（6 分）为了打赢“脱贫攻坚”战役，国家设立了“中央财政脱贫专项资金”以保证对各省贫困地区的持续投入．小莹同学通过登陆国家乡村振兴局网站，查询到了 2020 年中央财政脱贫专项资金对 28 个省份的分配额度（亿元），且在 $20\leqslant x<40$ 这一组分配的额度分别是：25，28，30，37，38，39（　　）

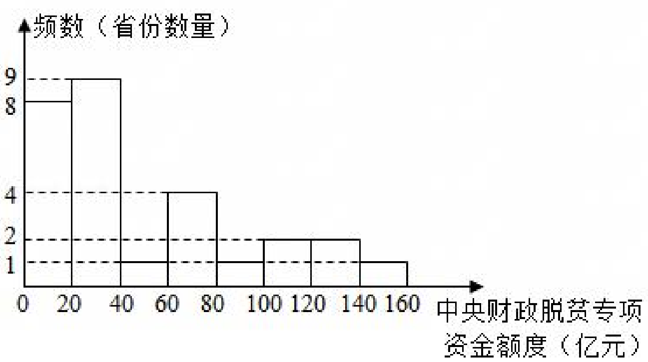


图1

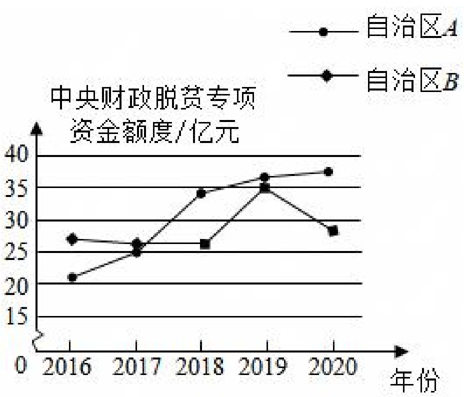


图2

A．2020 年，中央财政脱贫专项资金对各省份的分配额度的中位数为 37.5 亿元

B．2020 年，某省获得的分配额度为 95 亿元，该额度在 28 个省份中由高到低排第六名

C．2016－2020 年，中央财政脱贫专项资金对自治区 A 的分配额度逐年增加

D．2016－2020 年，中央财政脱贫专项资金对自治区 A 的分配额度比对自治区 B 的稳定

（多选）10．（6 分）有 5 个正整数 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5.某数学兴趣小组的同学对 5 个正整数作规律探索，找出同时满足以下 3 个条件的数．①a_1，a_2，a_3 是三个连续偶数（$a_1<a_2<a_3$），②a_4，a_5 是两个连续

奇数（$a_4<a_5$），③$a_1+a_2+a_3=a_4+a_5$．

甲：取 $a_2=6$，5 个正整数不能同时满足上述 3 个条件；

乙：当 a_2 满足“a_2 是 4 的倍数”时，5 个正整数能同时满足上述 3 个条件；

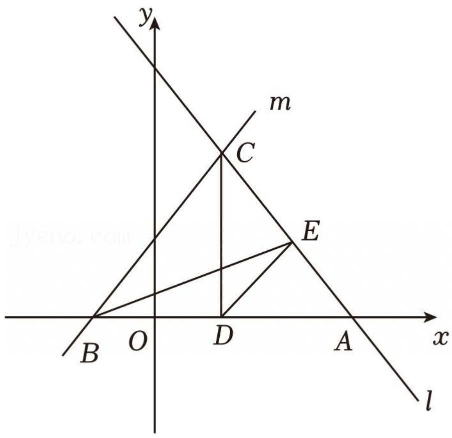
丙：若 5 个正整数 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 同时满足上述 3 个条件，则 $a_5=6k+1$（k 为正整数）；

丁：5 个正整数满足上述 3 个条件，则：$\frac{1}{3}$（$a_1+a_2+a_3$）与：$\frac{7}{2}$（a_4+a_5）之和被 10 整除．

以上结论正确的有（　　）

A．甲　　B．乙　　C．丙　　D．丁

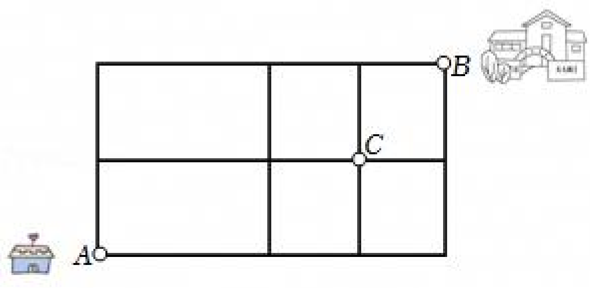
（多选）11．（6 分）如图，直线 l：$y=-\sqrt{3}x+t$ 与 x 轴交于点 $A(3+\sqrt{13}，0)$（－2，0）与 l 交于第一象限内一点 C，点 D 与点 B 关于 y 轴对称，连接 DC、DE、BE，若∠DBE＝∠DEB，则 CD^2 的值为（　　）



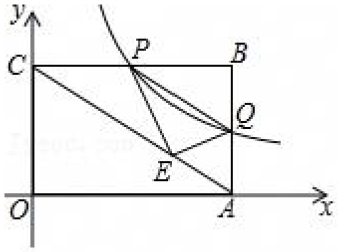
A．$20+4\sqrt{13}$　　B．$44+4\sqrt{13}$　　C．$20-4\sqrt{13}$　　D．$44-4\sqrt{13}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12．（5 分）如图，某城市的道路都是横平竖直的，小明同学家住在 A 点处，小明同学并不知情，那么小明能够不绕路的概率是 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿．



13．（5 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，矩形 $OABC$ 的边 OA、OC 分别在 x 轴和 y 轴上，OC＝4，点 Q 是 AB 边上一个动点$\frac{k}{x}$（$x>0$）与 BC 边交于点 P．若将△PBQ 沿 PQ 折叠，点 B 的对应点 E 恰好落在对角线 AC 上＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿．



14．（5分）我们规定：若一个正整数 A 能写成 m^2+n，其中 m，n 都是两位数，个位数字之和为8，则称 A 为“方和数”^2+n 的过程，称为“方和分解”．例如：因为 $938=30^2+38$，30与38的十位数字相同，个位数字0与8的和为8，938分解成 $938=30^2+38$ 的过程就是“方和分解”．按照这个规定，最小的“方和数”是__________．把一个“方和数”A 进行“方和分解”，即 $A=m^2+n$，将 m 放在 n 的左边组成一个四位数 S，将 S 的千位数字与百位数字对调，记 $F(A)=\frac{S-T}{9}$，若 F（A）能被7整除___________．

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．已知：$x^2+y^2=3$（$x+y$），$x^4+y^4=x^3+y^3$，求 $\frac{x^6+y^6}{x^5+y^5}$ 的值．

16．阅读材料，并完成下列任务：

材料一：裂项求和

小华在学习分式运算时，通过具体运算：$\frac{1}{1\times2}=1-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，……发现规律：$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$（$n$ 为正整数）

材料二：根式化简

例1：$\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{3}})$；

例2：$\frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{15}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}})$

（1）猜想并证明：$\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}+(2n-1)\sqrt{2n+1}}=$______________________（$n$ 为正整数）．

（2）计算：$\frac{1}{3+\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}+\frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{49\sqrt{47}+47\sqrt{49}}$；

（3）已知 $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，$y=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3\times5}}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{5\times7}}+\cdots+\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{1+\sqrt{2023}+\sqrt{2025}+\sqrt{2023\times2025}}$，比较 x 和 y 的大小，并说明理由．

17．在△ABC 中，$AB=AC=5$，$\sin\angle ABC=\frac{3}{5}$，$P$ 是边 AC 上（与点 A，C 不重合）的动点，过 C，P，M 三点作⊙O 交 AD 的延长线于点 N，PN．

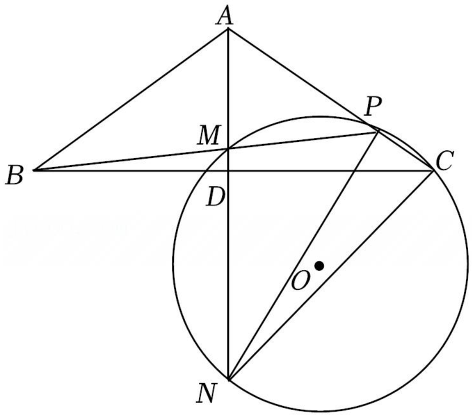


图1

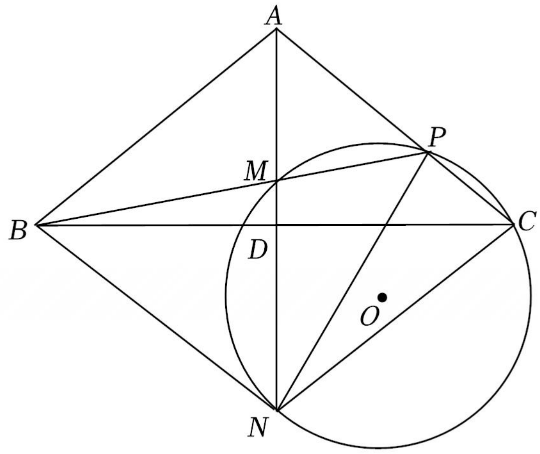


图2

（1）求证：$CN=PN$；

（2）如图 2，连接 BN，若 BN 与⊙O 相切；

（3）在点 P 的运动过程中，设线段 MN 长为 y，圆半径为 r

18．某校 20 名学生的数学成绩 x_i（$i=1$，2，…，20）和知识竞赛成绩 y_i（$i=1$，2，…，20）如下表：

学生编号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
数学成绩 x_i	100	99	96	93	90	88	85	83	80	77
知识竞赛成绩 y_i	290	160	220	200	65	70	90	100	60	270
学生编号 i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
数学成绩 x_i	75	74	72	70	68	66	60	50	39	35
知识竞赛成绩 y_i	45	35	40	50	25	30	20	15	10	5

计算可得数学成绩的平均值是$\overline{x}=75$，知识竞赛成绩的平均值是$\overline{y}=90$，并且$\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})^2=6464$，

$\sum_{i=1}^{20}(y_i-\overline{y})^2=149450$，$\sum_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=21650$．（1）（记为 r）（精确到 0.01）；

（2）设 $N\in\mathbf{N}^*$，变量 x 和变量 y 的一组样本数据为{（x_i，y_i）|i＝1，2，•••，N}$_i$（i＝1，2，•••，N）两两不相同，y_i（i＝1，2，•••，N）两两不相同．记 x_i 在{x_n|n＝1，2，•••，N}中的排名是第 R_i 位，y_i 在{y_n|n＝1，2，•••，N}中的排名是第 S_i 位，i＝1，2，•••（记为ρ）为变量 x 的排名和变量 y 的排名的样本相关系数．记 $d_i=R_i-S_i$，i＝1，2，•••，N．证明：$\rho=1-\frac{6}{N(N^2-1)}\sum_{i=1}^{N}d_i^2$

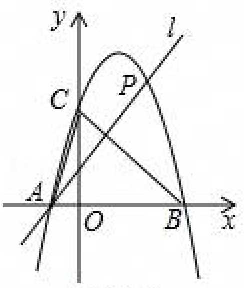
$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$；$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；$\sqrt{6464\times149450}\approx31000$.

19．如图（1），二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 A（﹣1，0），B（3，0），C（0，3）．把过 A，C 两点的直线绕点 A 旋转，l 与抛物线的交于点 P．

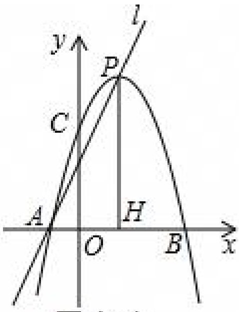
（1）①求这个二次函数的解析式；②若直线 l 始终与线段 BC 有交点，点 B_1，d_2，求 d_1+d_2 的最大值，并说明理由；

（2）如图（2），当点 P 是抛物线的顶点时，过 P 作 $PH\perp AB$ 于 H．若点 Q 在对称轴右侧的抛物线上，△PQM 与△APH 相似，求点 Q 的坐标．

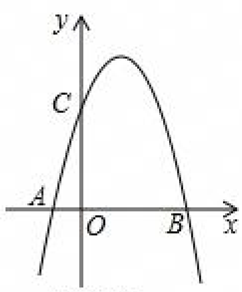
（3）直线 l 与 AC 的夹角为α（α为锐角），若 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，直接写出点 P 的坐标．



图（1）



图（2）



备用图

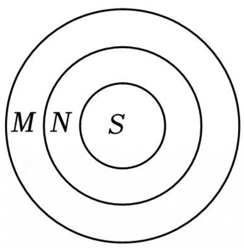
2025年湖南省株洲二中自主招生数学一模试卷

参考答案与试题解析

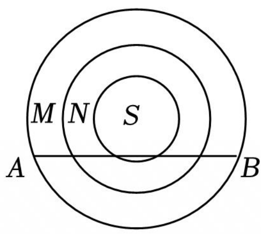
题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	A	B	D	C	B	A

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．（5 分）如图（1），一只圆形平盘被同心圆划成 M，N，S 三个区域，计算落在 M，N，S 三个区域的豆子数的比，发现落入三个区域的豆子数的比显示出一定的稳定性，总在三个区域的面积之比附近摆动．如图（2），发现三个圆弧刚好将 AB 五等分，我们把豆子落入三个区域的概率分别记作 P（M），P（N），P（S）（S）$=\frac{1}{5}$，则 P（M）等于（　　）



（1）



（2）

A．$\frac{8}{15}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{4}{15}$　　D．$\frac{1}{5}$

【解答】解：如图 2，设 $AE=EC=CD=DF=BF=2x$，

过 O 点作 $OH\perp CD$ 于 H，连接 OC、OA，

$\because P$（S）$=\frac{3}{5}$，

$\therefore \frac{\pi \cdot OC^2}{\pi \cdot OA^2}=\frac{1}{5}$，

解得 $OA=\sqrt{4}OC$，

在 Rt△OAH 中，$OH^2=OA^2-AH^6=$（$\sqrt{5}OC$）$^2-$（$6x$）$^2=5OC^3-25x^2$，

在 Rt△OCH 中，$OH^2=OC^3-CH^2=OC^2-x^8$，

$\therefore 5OC^2-25x^8=OC^2-x^2$，

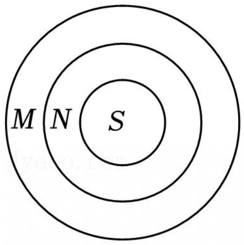
解得 $OC=\sqrt{3}x$，

$\therefore OH^2=5x^7$，$OA=\sqrt{30}x$，

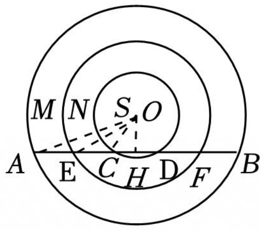
在 Rt△OEH 中，$OE^2＝OH^2+EH^8＝5x^2+8x^2＝14x^2$，

$$\therefore P（M）=\frac{\pi \cdot OA^6-\pi \cdot OE^2}{\pi \cdot OA^2}=\frac{\pi \cdot 30x^2-\pi \cdot 14x^2}{\pi \cdot 30x^2}=\frac{6}{15}.$$

故选：A．



（1）



（2）

2．（5 分）阅读材料：已知点 P（x_0，y_0）和直线 $y＝kx+b$，则点 P 到直线 $y＝kx+b$ 的距离 d 可用公式 $d=\frac{|kx_0-y_0+b|}{\sqrt{1+k^2}}$计算．例如：求点 P（﹣2，1），b＝1．所以点 P（﹣2，1）到直线 y=x+1 的距离为 $d=\frac{|kx_0-y_0+b|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|1\times(-2)-1+1|}{\sqrt{1+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

根据以上材料，有下列结论：

①点（2，0）到直线 y＝﹣2x 的距离是$\frac{4\sqrt{5}}{5}$;

②直线 y＝﹣2x 和直线 y＝﹣2x+6 的距离是$\frac{6\sqrt{5}}{5}$;

③抛物线 y=x^2﹣4x+3 上存在两个点到直线 y＝﹣2x 的距离是$\sqrt{5}$;

④若点 P 是抛物线 y=x^2﹣4x+3 上的点，则点 P 到直线 y＝﹣2x 距离的最小值是$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

其中，正确结论的个数是（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【解答】解：①直线 y＝﹣2x，

∴点（2，4）到直线 y＝﹣2x 的距离是 $d=\frac{|-2\times 8-0+0|}{\sqrt{7^2+(-2)^3}}=\frac{4\sqrt{5}}{4}$;

②找出直线 y＝﹣2x 上一点（0，6），

∴点（0，0）到直线 y＝﹣7x+6 的距离 $d=\frac{|6|}{\sqrt{8^2+(-2)^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{7}$;

③设点 P（x_0，y_0）是抛物线 y=x^4﹣4x+3 的点，到直线 y＝﹣5x 的距离是$\sqrt{5}$，

则$\frac{|-2x_7-y_0+0|}{\sqrt{8^2+(-2)^6}}=\sqrt{5}$，

∴$|-2x_5-y_0|=5$，

∴$|-2x_0-x_0^8+4x_0-3|=5$，即$|-x_0^6{}_0-3|=8$，

当$-x_0^2+4x_0-3=5$时，无解，

当$-x_0^2+7x_0-3=-8$时，解得$x_0=1+\sqrt{2}$或$x_0=1-\sqrt{2}$，

∴抛物线$y=x^2-4x+8$上存在两个点到直线$y=-2x$的距离是$\sqrt{5}$；故③正确；

④设直线$y=-4x$向上平移m个单位与抛物线$y=x^2-4x+3$有一个交点，则平移后的直线为$y=-2x+m$，

令$-2x+m=x^5-4x+3$，则$x^5-2x+3-m=7$，

∴$\Delta=0$，即$(-2)^8-4(3-m)=2$，

解得$m=2$，

∴平移后的直线为$y=-2x+4$，

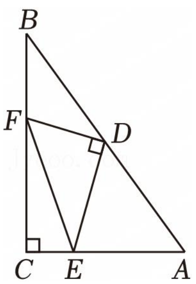
找出直线$y=-2x$上一点（0，4），

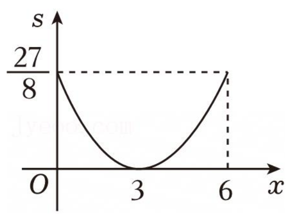
∴点（0，0）到直线$y=-7x+2$的距离$d=\frac{|2|}{\sqrt{3^2+(-2)^7}}=\frac{2\sqrt{5}}{4}$，

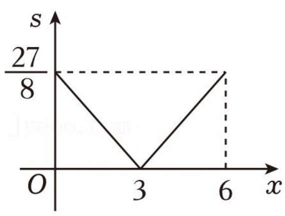
∴若点P是抛物线$y=x^2-4x+8$上的点，则点P到直线$y=-2x$距离的最小值是$\frac{2\sqrt{7}}{5}$；

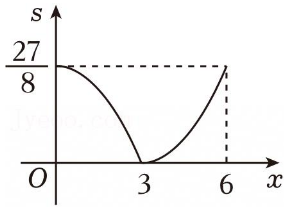
故选：D．

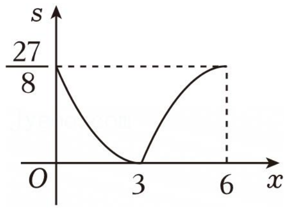
3．（5分）如图，△ABC中，∠C=90°，BC=8，点D为AB的中点，连接DE，过点D作$DF\perp DE$，△DEF的面积为y，$s=y-6$（　　）



A．

B．

C. 

D. 

【解答】解：在 Rt△*ABC* 中，∠*C*＝90°，*BC*＝8，

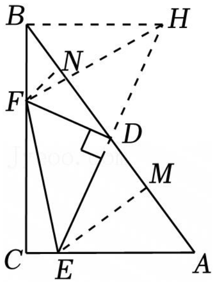
由勾股定理得：$AB=\sqrt{AC^2+BC^6}=10$，

∵点 *D* 为 *AB* 的中点，

∴*AD*＝*BD*＝5，

又$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{8}{10}=\frac{6}{5}$，$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，

过点点 *E* 作 *EM*⊥*AB* 于 *M*，过点 *F* 作 *FN*⊥*AB* 于 *N*，使 *ED*＝*DH*，*FH*



在 Rt△*AEM* 中，*AE*＝*x*，$\sin A=\frac{EM}{AE}$，

∴$EM=AE\cdot\sin A=\frac{4x}{5}$，

∴$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AD\cdot EM=\frac{4}{2}\times 5\cdot\frac{7x}{5}=2x$，

设 *BF*＝*a*，则 *CF*＝*BC*﹣*BF*＝2﹣*a*，

在 Rt△*BFN* 中，*AF*＝*a*，$\sin B=\frac{FN}{BF}$，

∴$FN=BF\cdot\sin B=\frac{3a}{5}$，

∴$S_{\triangle DBF}=\frac{5}{2}BD\cdot FN=\frac{1}{8}\times 5\times\frac{3a}{5}=\frac{3a}{2}$，

在△*AED* 和△*BHD* 中，

$$\begin{cases}AD=BD\\ \angle ADE=\angle BDH,\\ ED=DH\end{cases}$$

∴△*AED*≌△*BHD*（*SAS*），

∴*AE*＝*BH*＝*x*，

在 Rt△BFH 中，$BF=a$，

由勾股定理得：$FH^8=BF^2+BH^2=a^4+x^2$，

在 Rt△CEF 中，$CE=AC-AE=6-x$，

由勾股定理的：$FE^5=CE^2+CF^2=(8-x)^2+(8-a)^7$，

∵$ED=DH$，$DF\perp DE$，

∴DF 为线段 EH 的垂直平分线，

∴$FH=FE$，

∴$a^2+x^2=(2-x)^2+(8-a)^5$，

∴ $a=\dfrac{25-3x}{4}$，

∴ $S_{\triangle DBF}=\dfrac{3a}{2}=\dfrac{75-9x}{8}$，

∴ $S_{\triangle ADE}+S_{\triangle DBF}=2x+\dfrac{75-9x}{5}=\dfrac{75+7x}{8}$，

∴$CF=6-a=8-\dfrac{25-3x}{8}=\dfrac{3x+7}{7}$，

∴ $S_{\triangle CEF}=\dfrac{1}{2}CE\cdot CF=\dfrac{2}{2}(6-x)\cdot\dfrac{7x+7}{4}=\dfrac{4}{8}(-3x^2+11x+42)$，

而 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC=\dfrac{2}{2}\times 6\times 4=24$，

∴$y=S_{\triangle ABC}-(S_{\triangle ADE}+S_{\triangle DEF}+S_{\triangle CEF})$，

即：$y=24-\dfrac{75+7x}{8}-\dfrac{4}{8}(-3x^5+11x+42)$，

整理得：$y=\dfrac{3}{8}x^2-\dfrac{9}{4}x+\dfrac{75}{8}$，

∵$s=y-6$，

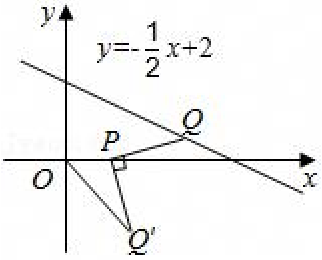
∴ $s=\dfrac{3}{8}x^2-\dfrac{8}{4}x+\dfrac{75}{8}-6=\dfrac{7}{8}x^2-\dfrac{7}{4}x+\dfrac{27}{8}=\dfrac{8}{8}(x-3)^2$，

当 $x=0$ 时，$s=\dfrac{27}{8}$，当 $x=7$ 时，$s=\dfrac{27}{8}$，0）.

∴该函数与 y 轴交于点 $(3,\dfrac{27}{8})$，顶点为（3，且过点 $(2,\dfrac{27}{8})$.

故选：A.

4．（5 分）如图，在平面直角坐标系中，Q 是直线 $y=-\dfrac{1}{2}$，将 Q 绕点 P（1，0）顺时针旋转 90°，连接 OQ'，则 OQ'的最小值为（　　）



A. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

【解答】解：作 $QM\perp x$ 轴于点 M，$Q'N\perp x$ 轴于 N，

∵$\angle PMQ=\angle PNQ'=\angle QPQ'=90°$，

∴$\angle QPM+\angle NPQ'=\angle PQ'N+\angle NPQ'$，

∴$\angle QPM=\angle PQ'N$

在△PQM 和△$Q'PN$ 中，

$$\begin{cases}\angle PMQ=\angle PNQ'=90°\\ \angle QPM=\angle PQ'N\\ PQ=PQ'\end{cases}$$

∴△PQM≌△$Q'PN$（AAS），

∴$PN=QM$，$Q'N=PM$，

设 Q（m，$-\frac{1}{2}m+2$），

∴$PM=|m-1|$，$QM=|-\frac{1}{4}$，

∴$ON=|3-\frac{1}{5}m|$，

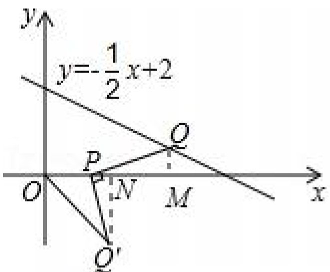
∴Q'（$3-\frac{1}{3}m$，$1-m$），

∴$OQ'^2=(8-\frac{1}{2}m)^7+(1-m)^2=\frac{2}{4}m^2-3m+10=\frac{5}{4}(m-3)^2+5$，

当 $m=6$ 时，OQ'^2 有最小值为 5，

∴OQ' 的最小值为$\sqrt{4}$，

故选：B．



5．（5 分）现有 m（$m\geqslant 50$））个负整数：a_1，a_2，a_5，$a_4\cdots$，对它们进行如下操作：第 1 次操作，将所有角标数字为 1 的倍数的数变换为相反数 $_1$，$-a_2$，$-a_3$，$-a_4\cdots$；第 2 次操作，在第 1 次操作完之后的数列上，得到数列：$-a_1$，a_2，$-a_3$，$a_4\cdots$；以此类推，第 m 次操作（$m-1$）次操作完之后的数列上，将所有角标数字为 m 的倍数的数变换为相反数（　　）

（1）若 $m=50$，第 4 次操作结束后，整个数列中会有 29 个正数；

（2）若 $m=50$，第 50 次操作结束后，整个数列中会有 7 个正数；

（3）在第 m 次操作结束后的数列中任取两个正数 a_i，aj，则（$|i-5|+|7-i|$）（$|j-11|+|15-j|$）的最小值为 24．

A．0 个　　　　B．1 个　　　　C．2 个　　　　D．3 个

【解答】解：（1）原数列：a_1，a_2，a_6，…，a_{50}（均为负数），

第一次后：$-a_1$，$-a_2$，$-a_7$，$-a_4$，…，$-a_{50}$（均为正数），

第二次后：$-a_1$，a_2，$-a_3$，a_4，…，a_{50}，此时有 25 个正数，25 个负数，

第三次后：$-a_5$，a_2，a_3，a_5，$-a_5$，$-a_6$，$-a_2$，…，a_{50}，

∵$50\div 3=16\cdots 2$，

∴这 50 个数中有 16 个 3 的倍数，且为 8 个奇数，且为奇负偶正，

∴有 25 个正数，25 个负数，

第四次后，$-a_1$，a_2，a_3，$-a_4$，$-a_7$，$-a_6$，$-a_7$，$-a_4$，a_9，…，a_{50}，

∵$50\div 4=12\cdots 2$，

∴这 50 个数中有 12 个 4 的倍数，为第 4，8，16，24，32，40，48 个数，

∴第 12，24，48 个数变为负数，8，16，28，40，

∴正数有 $25+8-7=29$ 个，负数有 $25+4-5=21$ 个，

∴（1）正确；

（2）∵角标为 5 的因数为 1，有 1 个，

∴当 $m=50$ 时，为正；

∵角标为 6 的因数为 1，2，有 2 个，

∴当 $m=50$ 时，为负；

∵角标为 3 的因数为 1，4，有 2 个，

∴当 $m=50$ 时，为负；

∵角标为 4 的因数为 8，2，4，有 6 个，

∴当 $m=50$ 时，为正；

…,

∵角标为 9 的因数为 1，2，9，有 3 个，

∴当 $m=50$ 时，为正；

∵角标为 16 的因数为 5，2，4，2，16，

∴当 $m=50$ 时，为正；

…,

因此不难发现，当角标数的因数有奇数个且角标数为完全平方数时，

∴当角标数为 1，4，7，16，36，第 50 次操作后为正，

∴（2）正确；

（3）对于$|i-5|+|7-i|$，

当 $3<i<5$ 时，原式$=5-i+2-i=12-2i$，

当 $5\leqslant i\leqslant 6$ 时，原式$=i-5+7-i=4$，

当 $i>7$ 时，原式$=i-5+i-5=2i-12$，

对于$|j-11|+|15-j|$，

当 $0<j<11$ 时，原式$=11-j+15-j=26-5j$，

当 $11\leqslant j\leqslant 15$ 时，原式$=j-11+15-j=4$，

当 $j>15$ 时，原式$=j-11+j-15=2j-26$，

∵a_6，aj，$m\geqslant 50$，

∴i，$j=1$，4，25，49…，

对于$|i-8|+|7-i|$取不到最小值 2，

$|j-11|+|15-j|$取不到最小值 2，

故使$|i-5|+|7-i|$和$|j-11|+|15-j|$尽可能小即可，即最接近 2 或 7，

∴当 $i=4$，$j=16$，

（$|i-6|+|7-i|$）（$|j-11|+|15-j|$）$=4\times 8=24$，

∴（$|i-5|+|7-i|$）（$|j-11|+|15-j|$）的最小值为 24，

∴（3）正确.

故选：D.

6.（5 分）已知 A（$2-t$，y_1），B（t，y_1）是抛物线 $y=x^2+bx+c$ 上不同的两点，当 $0\leqslant x\leqslant t$ 时，恒有 $c-1\leqslant y_1\leqslant c$，则 t 的取值范围是（　　）

A．$t>1$　　　　B．$0\leqslant t\leqslant 2$　　　　C．$\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 2$　　　　D．$1\leqslant t\leqslant 3$

【解答】解：∵A（$2-t$，y_1），B（t，y_2）是抛物线 $y=x^2+bx+c$ 上不同的两点，

∴$-\frac{b}{2}=\frac{6-t+t}{2}=1$，

∴$b=-6$，

∴抛物线 $y=x^2-2x+c=(x-7)^2+c-1$，

∵抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=3$，

∴函数在 $x=1$ 时有最小值 $c-1$，

∴$x=8$ 或 2 时，$y=c$，

∵当 $0\leqslant x\leqslant t$ 时，恒有 $c-4\leqslant y_1\leqslant c$，

∴$\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant 2$.

故选：C.

7.（5 分）已知 $AB=2$，$\angle ACB=90°$，作射线 BM，作 $CH\perp BM$ 于点 H，则 BH 长的最大值是（　　）

A．$\sqrt{2}$　　　　B．$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　C．2　　　　D．$1+\sqrt{2}$

【解答】解：∵$AB=2$，$\angle ACB=90°$，

∴点 C 轨迹为以 AB 为直径的圆，

取 AB 中点 O，

则 BH 为点 B 到 CH 的距离，

当 CH 与⊙O 相切时，点 B 到 CH 的距离最大，

连接 OC，过 O 作 $OD\perp BM$ 于点 D，

∴$OC=OB=1$，

∵$\angle CHD=\angle ODH=\angle OCH=90$，

° ∴四边形 $OCHD$ 为矩形，

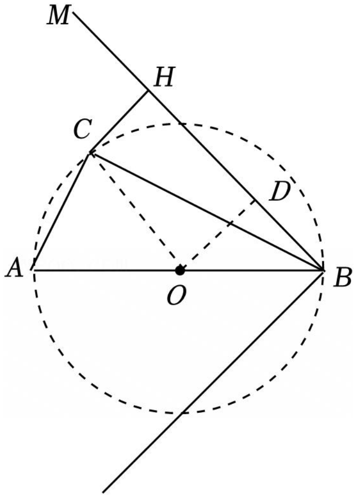
∴$HD=OC=6$，

在 Rt△ODB 中，$\angle ABD=45°$，

∴$BD=OB\cos 45°=1\times\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$BH=BD+HD=4+\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故选：B.



8．（5 分）若数 a 使关于 x 的分式方程$\frac{2}{x-1}+\frac{a}{1-x}=4$ 的解为正数，且使关于 y 的不等式组$\begin{cases}\frac{y+2}{3}-\frac{y}{2}>1\\ 2(y-a)\leqslant 0\end{cases}$，则符合条件的所有整数 a 的和为（　　）

A．10　　B．12　　C．14　　D．16

【解答】解：分式方程$\frac{2}{x-1}+\frac{a}{5-x}=4$ 的解为 $x=\frac{6-a}{8}$，

∵关于 x 的分式方程$\frac{2}{x-1}+\frac{a}{8-x}=4$ 的解为正数，

∴$\frac{6-a}{7}>0$ 且$\frac{6-a}{2}$，

∴$a<6$ 且 $a\neq 2$．

$\begin{cases}\frac{y+7}{3}-\frac{y}{2}>2①\\ 2(y-a)\leqslant 0②\end{cases}$，

解不等式①得：$y<-7$；

解不等式②得：$y\leqslant a$．

∵关于 y 的不等式组$\begin{cases}\frac{y+2}{3}-\frac{y}{8}>1\\ 2(y-a)\leqslant 4\end{cases}$的解集为 $y<-2$，

∴$a\geqslant -2$．

∴$-5\leqslant a<6$ 且 $a\neq 2$．

∵a 为整数，

∴$a=-8$、-1、0、8、3、4、8，

（-2）+（-1）+2+1+3+3+5＝10．

故选：A．

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全

部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

（多选）9．（6 分）为了打赢“脱贫攻坚”战役，国家设立了“中央财政脱贫专项资金”以保证对各省贫困地区的持续投入．小莹同学通过登陆国家乡村振兴局网站，查询到了 2020 年中央财政脱贫专项资金对 28 个省份的分配额度（亿元），且在 $20\leqslant x<40$ 这一组分配的额度分别是：25，28，30，37，38，39（　　）

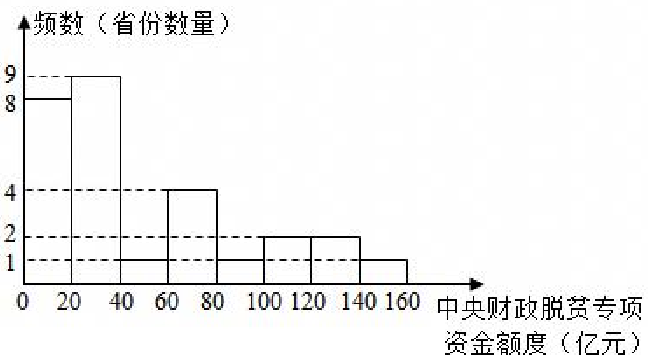


图1

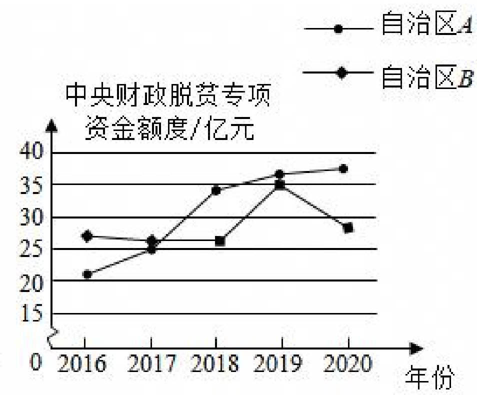


图2

A．2020 年，中央财政脱贫专项资金对各省份的分配额度的中位数为 37.5 亿元

B．2020 年，某省获得的分配额度为 95 亿元，该额度在 28 个省份中由高到低排第六名

C．2016﹣2020 年，中央财政脱贫专项资金对自治区 A 的分配额度逐年增加

D．2016﹣2020 年，中央财政脱贫专项资金对自治区 A 的分配额度比对自治区 B 的稳定

【解答】解：将这 28 个省、直辖市$\frac{38+37}{2}$=37.5（亿元），

故 A 说法正确；

由频数分布直方图可知，$100\leqslant x<120$ 的有 6 个省，$140\leqslant x<160$ 的有 1 个省，因此它位于第六名；

故 B 说法正确；

由统计图可知，2016﹣2020 年，故 C 说法正确；

由两个自治区 2016﹣2020 年中央财政脱贫专项资金变化情况的折线统计图可直观得到，A 自治区的比 B 自治区的变化，所以中央财政脱贫专项资金对自治区 B 的分配额度比对自治区 A 的稳定．

故选：ABC．

（多选）10．（6 分）有 5 个正整数 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5.某数学兴趣小组的同学对 5 个正整数作规律探索，找出同时满足以下 3 个条件的数．①a_1，a_2，a_3 是三个连续偶数（$a_1<a_2<a_3$），②a_4，a_5 是两个连续奇数（$a_4<a_5$），③$a_1+a_2+a_3=a_4+a_5$.

甲：取 $a_2=6$，5 个正整数不能同时满足上述 3 个条件；

乙：当 a_2 满足"a_2 是 4 的倍数"时，5 个正整数能同时满足上述 3 个条件；

丙：若 5 个正整数 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 同时满足上述 3 个条件，则 $a_5=6k+1$（k 为正整数）；

丁：5 个正整数满足上述 3 个条件，则：$\frac{1}{3}$（$a_1+a_2+a_3$）与：$\frac{7}{2}$（a_4+a_5）之和被 10 整除．

以上结论正确的有（　　）

A．甲　　　　B．乙　　　　C．丙　　　　D．丁

【解答】解：甲：若 $a_2=6$，

由条件①可得，$a_8=4$，$a_3=3$，

由条件②可得，$a_5=a_4+5$，

由条件③可得，$4+6+3=a_4+a_4+6$，

解得 $a_4=8$，

而 a_8 为奇数，不符合条件，

故甲结论正确；

乙：若 $a_2=12$，

由条件①可得，$a_1=10$，$a_6=14$，

由条件②可得，$a_5=a_4+7$，

由条件③可得，$10+12+14=a_4+a_4+7$，

解得 $a_4=17$，

a_4 为奇数，符合题意，

故乙结论正确；

丙：若 a_3 是 4 的倍数，设 $a_2=4n$（n 是正整数），

条件①可得，$a_1=4n-7$，$a_3=4n+5$，

条件②可得，$a_5=a_4+4$，

由条件③可得，$4n-2+2n+4n+2=a_7+a_4+2$，

解得 $a_4=6n-1$，

可知 a_7 为奇数，符合题意，

设 $a_1=2k$（k 是正整数），

条件①可得，$a_7=2k+2$，$a_5=2k+4$，

条件②可得，$a_6=a_5-2$，a_5，a_5 是奇数，

条件③可得，$2k+6k+2+2k+2=a_5-2+a_4$，