

2024-2025 学年四川省成都市高三上学期开学考试数学检测试题

(一)

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1. “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 1 > 0$ ”的否定是 ()

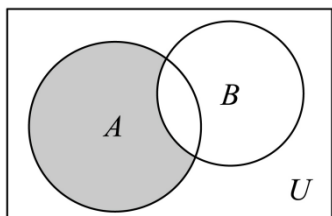
A. $\exists x_0 \in \mathbf{R},$ 使得 $x_0^2 + 2x_0 + 1 \leq 0$

B. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 1 < 0$

C. $\exists x_0 \in \mathbf{R},$ 使得 $x_0^2 + 2x_0 + 1 < 0$

D. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 1 \leq 0$

2. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 则图中阴影部分表示的集合的子集个数为 ()



A. 2

B. 4

C. 8

D. 16

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 前 n 项和为 S_n , 则“ $d \geq 0$ ”是“ $\{S_n\}$ 是递增数列”的 ()

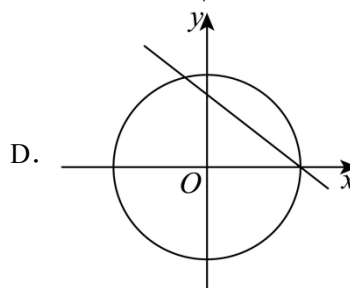
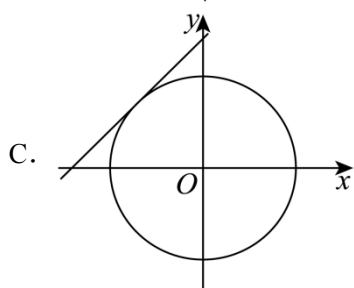
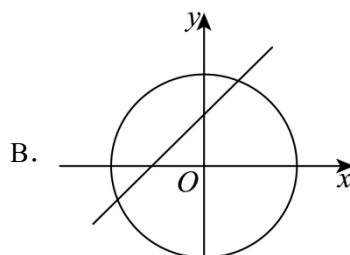
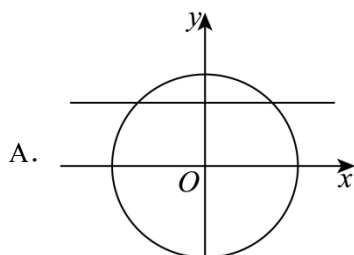
A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 在同一平面直角坐标系中, 直线 $mx - y + 1 = 0 (m \in \mathbf{R})$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 的位置不可能为 ()



5. 一堆苹果中大果与小果的比例为9:1，现用一台水果分选机进行筛选．已知这台分选机把大果筛选为小果的概率为5%，把小果筛选为大果的概率为2%．经过一轮筛选后，现在从这台分选机筛选出来的“大果”里面随机抽取一个，则这个“大果”是真是大果的概率为（ ）

- A. $\frac{855}{857}$ B. $\frac{857}{1000}$ C. $\frac{171}{200}$ D. $\frac{9}{10}$

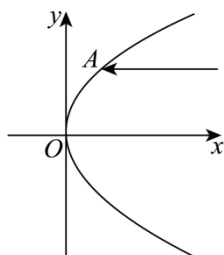
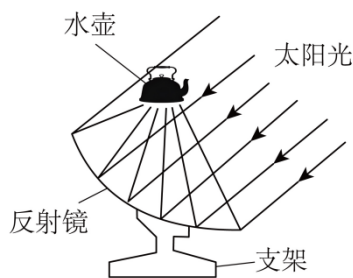
6. 某省高考改革试点方案规定：2023 年高考总成绩由语文、数学、外语三门统考科目和思想政治、历史、地理、物理、化学、生物六门选考科目组成，将每门选考科目的考生原始成绩从高到低划分为 A，B+，B，C+，C，D+，D，E 共 8 个等级，参照正态分布原则，确定各等级人数所占比例分别为 3%，7%，16%，24%，24%，16%，7%，3%，选考科目成绩计入考生总成绩时，将 A 至 E 等级内的考生原始成绩，依照等比例转换法则，分别转换到 [91,100]，[81,90]，[71,80]，[61,70]，[51,60]，[41,50]，[31,40]，[21,30] 八个分数区间，得到考生的等级成绩，如果该省某次高考模拟考试物理科目的原始成绩 $X \sim N(50,256)$ ，那么 B+ 等级的原始分最低大约为（ ）

参考数据：对任何一个正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 来说，通过 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ 转化为标准正态分布 $Z \sim N(0,1)$ ，从而查标准正态分布表得到 $P(X \leq X_1) = P(Z \leq Z_0)$ ．可供查阅的（部分）标准正态分布表：

Z_0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
$P(Z \leq Z_0)$	0.8643	0.8849	0.9032	0.9192	0.9332	0.9452	0.9554	0.9641	0.9713
Z_0	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8
$P(Z \leq Z_0)$	0.9772	0.9821	0.9861	0.9893	0.9918	0.9938	0.9953	0.9965	0.9974

- A. 57 B. 64 C. 71 D. 77

7. 抛物线绕它的对称轴旋转所得到的曲面叫抛物面，用于加热水和水壶食物的太阳灶应用了抛物线的光学性质：一束平行于抛物线对称轴的光线，经过抛物面的反射后，集中于它的焦点．已知一束平行于 x 轴的入射光线的一束光线与抛物线 $y^2 = 2px$ 的交点为 $A(4,4)$ ，则反射光线所在直线被抛物线截得的弦长为（ ）



- A. $\frac{27}{4}$ B. $\frac{21}{4}$ C. $\frac{25}{4}$ D. $\frac{29}{4}$

8. 若对任意的 $x_1, x_2 \in [-1, 0), x_1 < x_2$, $\frac{x_2 e^{x_1} - x_1 e^{x_2}}{x_1 - x_2} < a$ 恒成立, 则 a 的最小值为 ()

- A. $-\frac{1}{e^2}$ B. $-\frac{1}{e}$ C. $-\frac{2}{e^2}$ D. $-\frac{2}{e}$

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 某科技企业为了对一种新研制的专利产品进行合理定价，将该产品按事先拟定的价格进行试销，得到如下数据：

单价 x (元)	40	50	60	70	80	90
销量 y (件)	50	44	43	m	35	28

由表中数据，求得线性回归方程为 $\hat{y} = -0.4x + 66$ ，则下列说法正确的是 ()

- A. 产品的销量与单价成负相关
 B. 为了获得最大的销售额 (销售额 = 单价 $\times$ 销量)，单价应定为 70 元或 80 元
 C. $m = 40$
 D. 若在这些样本点中任取一点，则它在线性回归直线左下方的概率为 $\frac{1}{3}$

10. 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$ ，则下列结论正确的是 ()

- A. 若 $a > b > 0$ ，则 $\frac{b}{a} < \frac{b+c}{a+c}$ B. 若 $ac^2 > bc^2$ ，则 $a > b$
 C. 若 $a > b > 0$ ， $\frac{a+b}{a+2\sqrt{2ab}} \geq \frac{1}{2}$ D. $\frac{2a^2+3}{\sqrt{a^2+1}}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$

11. 伯努利双纽线最早于 1694 年被瑞士数学家雅各布·伯努利用来描述他所发现的曲线. 在平面直角坐标系 xOy 中，把到定点 $F_1(-a, 0)$ ， $F_2(a, 0)$ 距离之积等于 a^2 ($a > 0$) 的点的轨迹称为双纽线.

已知点 $P(x, y)$ 是 $a=1$ 的双纽线 C 上一点，下列说法正确的是 ()

A. 若直线 F_1F_2 交双曲线 C 于 A, B, O 三点 (O 为坐标原点), 则 $|AB| = 2\sqrt{2}$

B. 双曲线 C 上满足 $|PF_1| = |PF_2|$ 的点有 2 个

C. $\triangle PF_1F_2$ 的面积的最大值为 $\frac{1}{2}$

D. $\triangle PF_1F_2$ 的周长的取值范围为 $(4, 2+2\sqrt{2})$

三、填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共计 15 分.

12. 若 $(x-2)^4 = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, 则 $a_0 =$ _____; $\frac{a_1 + a_3}{a_0 + a_2 + a_4} =$ _____.

13. 若不等式 $|x-3| \leq a$ 成立的一个充分不必要条件是 $-1 \leq x \leq 7$, 则实数 a 的取值范围为 _____.

14. 设函数 $f(x) = x^3 - x$, 正实数 a, b 满足 $f(a) + f(b) = -2b$, 若 $a^2 + \lambda b^2 \leq 1$, 则实数 λ 的最大值为 _____.

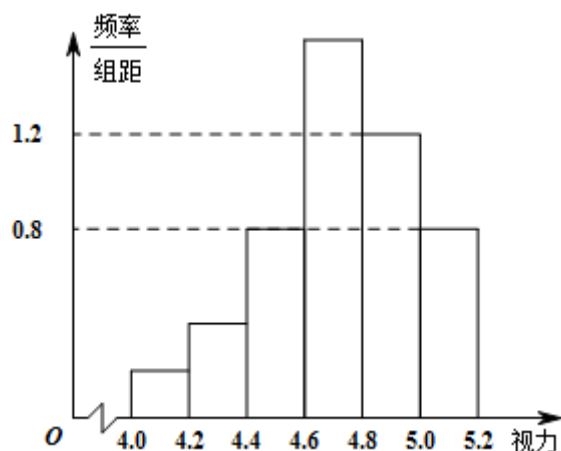
四、解答题: 共 77 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. 已知函数 $f(x) = x+1, g(x) = x^2 - 1$.

(1) 若 $a \in \mathbf{R}$, 求不等式 $af(x) + g(x) < 0$ 的解集;

(2) 若 $b \leq 3$, 对 $\forall x_1 \in [1, 2], \exists x_2 \in [4, 5]$, 使得 $bf(x_1) + f(x_2) = g(x_1) + b + 8$ 成立, 求 b 的取值范围.

16. 2021 届高三体检工作即将开展, 为了了解高三学生的视力情况, 某校医务室提前对本校的高三学生视力情况进行调查, 在高三年级 1000 名学生中随机抽取了 100 名学生的体检数据, 并得到如下图的频率分布直方图.



年级名次	1~100	101~1000
------	-------	----------

是否近视		
近视	40	30
不近视	10	20

(1) 若直方图中前四组的频数依次成等比数列，试估计全年级高三学生视力的中位数（精确到 0.01）；

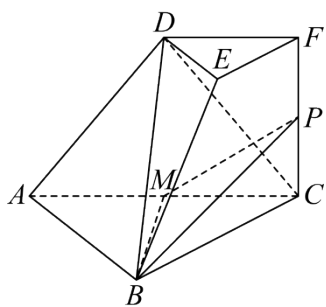
(2) 该校医务室发现，学习成绩突出的学生，近视的比较多，为了研究学生的视力与学习成绩是否有关系，对抽取的 100 名学生名次在 1~100 名和 101~1000 名的学生的体检数据进行了统计，得到表中数据，根据表中的数据，能否在犯错的概率不超过 0.05 的前提下认为视力与学习成绩有关系？

(3) 在 (2) 中调查的不近视的学生中按照分层抽样抽取了 6 人，进一步调查他们良好的护眼习惯，求在这 6 人中任取 2 人，至少有 1 人的年级名次在 1~100 名的概率。

$P(K^2 \geq k)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
k	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a+b+c+d.$$

17. 在三棱台 $DEF-ABC$ 中， $CF \perp$ 平面 ABC ， $AB \perp BC$ ，且 $BA = BC$ ， $AC = 2DF$ ， M 为 AC 的中点， P 是 CF 上一点，且 $\frac{CF}{DF} = \frac{MC}{CP} = \lambda$ ($\lambda > 1$)。



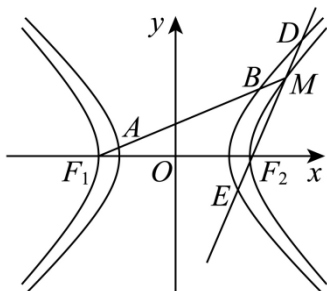
(1) 求证： $CD \perp$ 平面 PBM ；

(2) 已知 $CP = 1$ ，且直线 BC 与平面 PBM 的所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时，求平面 EFM 与平面 PBM 所成夹角的余弦值。

18. 如图，双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点 F_1, F_2 分别为双曲线 $C_2: \frac{x^2}{4a^2} - \frac{y^2}{4b^2} = 1$

的左、右顶点，过点 F_1 的直线分别交双曲线 C_1 的左、右两支于 A, B 两点，交双曲线 C_2

的右支于点 M (与点 F_2 不重合), 且 $\triangle BF_1F_2$ 与 $\triangle ABF_2$ 的周长之差为 2.



(1)求双曲线 C_1 的方程;

(2)若直线 MF_2 交双曲线 C_1 的右支于 D, E 两点.

①记直线 AB 的斜率为 k_1 , 直线 DE 的斜率为 k_2 , 求 k_1k_2 的值;

②试探究: $|DE| - |AB|$ 是否为定值? 并说明理由.

19. 设实系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ①, 有两根 x_1, x_2 ,

则方程可变形为 $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$, 展开得 $ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = 0$ ②,

比较①②可以得到
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 = \frac{c}{a}, \end{cases}$$

这表明, 任何一个一元二次方程的根与系数的关系为: 两个根的和等于一次项系数与二次项系数的比的相反数, 两个根的积等于常数项与二次项系数的比. 这就是我们熟知的一元二次方程的韦达定理.

事实上, 与二次方程类似, 一元三次方程也有韦达定理.

设方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ 有三个根 x_1, x_2, x_3 , 则有
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases} \text{③}$$

(1)证明公式③, 即一元三次方程的韦达定理;

(2)已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + x + 1 (a < 0)$ 恰有两个零点.

(i) 求证: $f(x)$ 的其中一个零点大于 0, 另一个零点大于 -2 且小于 0;

(ii) 求 $a + b$ 的取值范围.

1. A

【分析】根据含有一个量词的否定判断即可.

【详解】“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 1 > 0$ ”的否定是“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $x_0^2 + 2x_0 + 1 \leq 0$ ”,

故选: A.

2. B

【分析】先求出集合 $A \cap B = \{3, 4, 5\}$, 再求出图中阴影部分表示的集合 $\complement_A(A \cap B) = \{1, 2\}$; 最后利用集合的子集个数公式即可求解.

【详解】由图可知: 阴影部分表示的集合为 $\complement_A(A \cap B)$.

因为集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$

所以 $A \cap B = \{3, 4, 5\}$,

则 $\complement_A(A \cap B) = \{1, 2\}$,

所以阴影部分表示的集合的子集个数为 $2^2 = 4$.

故选: B.

3. B

【分析】利用特殊值说明充分性不成立, 根据单调性得到 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} > 0$, 即可说明必要性成立, 从而得解.

【详解】当 $a_n = -2$, 满足 $d \geq 0$, 但是 $S_n = -2n$, 显然 $\{S_n\}$ 是递减数列, 故充分性不成立,

当 $\{S_n\}$ 是递增数列, 则 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} > 0$,

若 $d < 0$, 则 $\{a_n\}$ 单调递减, 显然 $a_{n+1} > 0$ 不恒成立,

所以 $d \geq 0$, 所以必要性成立,

所以“ $d \geq 0$ ”是“ $\{S_n\}$ 是递增数列”的必要不充分条件.

故选: B

4. C

【分析】由圆的位置和直线所过定点, 判断直线与圆的位置关系.

【详解】圆 $x^2 + y^2 = 2$ 的圆心坐标为 $(0, 0)$, 半径为 $\sqrt{2}$,

直线 $mx - y + 1 = 0 (m \in \mathbf{R})$ 过圆内定点 $(0, 1)$, 斜率可正可负可为 0,

ABD 选项都有可能, C 选项不可能.

故选: C.

5. A

【分析】记事件 A_1 : 放入水果分选机的苹果为大果, 事件 A_2 : 放入水果分选机的苹果为小果,

记事件 B : 水果分选机筛选的苹果为“大果”, 利用全概率公式计算出 $P(B)$ 的值, 再利用贝叶斯公式可求得所求事件的概率.

【详解】记事件 A_1 : 放入水果分选机的苹果为大果, 事件 A_2 : 放入水果分选机的苹果为小果,

记事件 B : 水果分选机筛选的苹果为“大果”,

$$\text{则 } P(A_1) = \frac{9}{10}, \quad P(A_2) = \frac{1}{10}, \quad P(B|A_1) = \frac{19}{20}, \quad P(B|A_2) = \frac{1}{50},$$

$$\text{由全概率公式可得 } P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) = \frac{9}{10} \times \frac{19}{20} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{50} = \frac{857}{1000},$$

$$P(A_1 B) = P(A_1) P(B|A_1) = \frac{9}{10} \times \frac{19}{20} = \frac{855}{1000},$$

$$\text{因此, } P(A_1|B) = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} = \frac{855}{1000} \times \frac{1000}{857} = \frac{855}{857}.$$

故选: A.

6. C

【分析】首先计算排在 $B+$ 等级最低分后面的学生约为学生总数的 90%, 结合 $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$, 以

及当 $Y: N(0, 1)$ 时, $P(Y \leq 1.3) \approx 0.9$, 可得到 $\frac{X - 50}{16} \leq 1.3$, 计算即可得到答案.

【详解】由题意可得, 将学生成绩从高到低排名, 排在 $B+$ 等级最低分后面的学生约为学生总数的 90%.

因为原始成绩 $X: N(50, 256)$, 所以 $\mu = 50, \sigma = 16$.

令 $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$, 则 $Y: N(0, 1)$; 又当 $Y: N(0, 1)$ 时, $P(Y \leq 1.3) \approx 0.9$,

所以 $\frac{X - 50}{16} \leq 1.3$, 解得 $X \leq 70.8$, 所以 $B+$ 等级的原始分最低大约为 71.

故选: C.

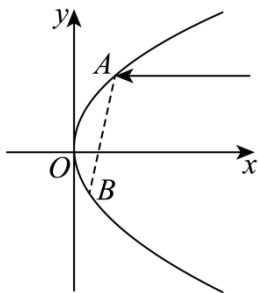
7. C

【分析】由题意可求得抛物线方程，再根据光线的反射性质求出反射光线的方程，即可求出反射光线与抛物线的交点坐标，再利用两点间的距离公式即可求得结果.

【详解】因为点 $A(4,4)$ 在抛物线上，所以 $16=8p$ ，解得 $p=2$ ，

所以抛物线的方程为 $y^2=4x$ ，则焦点为 $F(1,0)$ ，

又因为反射光线经过点 $A(4,4)$ 及焦点 $F(1,0)$ ， $k_{AB}=k_{AF}=\frac{4-0}{4-1}=\frac{4}{3}$ ，



所以反射光线 AB 的方程为 $y=\frac{4}{3}(x-1)$ ，

联立抛物线方程得 $\begin{cases} y^2=4x \\ y=\frac{4}{3}(x-1) \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=-1 \end{cases}$ ，

所以反射光线 AB 与抛物线的交点为 $B(\frac{1}{4}, -1)$ ，

由两点间距离公式可得 $|AB|=\sqrt{(4-\frac{1}{4})^2+(4+1)^2}=\frac{25}{4}$ ，

所以反射光线所在直线被抛物线截得的弦长为 $\frac{25}{4}$ 。

故选：C.

8. D

【分析】将已知变形为 $\frac{e^{x_1}}{x_1} + \frac{a}{x_1} > \frac{e^{x_2}}{x_2} + \frac{a}{x_2}$ ，然后构造函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{a}{x}$ ，将问题转化为 $f'(x) \leq 0$

在 $[-1, 0)$ 上恒成立，转化为 $g(x) = e^x(x-1)$ 的最大值问题，利用导数求解可得.

【详解】因为 $x_1 < x_2$ ，所以 $x_1 - x_2 < 0$ ，则 $\frac{x_2 e^{x_1} - x_1 e^{x_2}}{x_1 - x_2} < a$ 可化为 $x_2 e^{x_1} - x_1 e^{x_2} > a(x_1 - x_2)$ ，

整理得 $x_2 e^{x_1} + ax_2 > x_1 e^{x_2} + ax_1$ ，

因为 $x_1 x_2 > 0$ ，所以 $\frac{e^{x_1}}{x_1} + \frac{a}{x_1} > \frac{e^{x_2}}{x_2} + \frac{a}{x_2}$ ，

令 $f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{a}{x}$ ，则函数 $f(x)$ 在 $[-1, 0)$ 上单调递减，

则 $f'(x) = \frac{e^x(x-1)-a}{x^2} \leq 0$ 在 $[-1,0)$ 上恒成立,

所以 $e^x(x-1) \leq a$ 在 $[-1,0)$ 上恒成立,

令 $g(x) = e^x(x-1)$, 则 $g'(x) = e^x(x-1) + e^x = xe^x < 0$ 在 $[-1,0)$ 上恒成立,

则 $g(x) = e^x(x-1)$ 在 $[-1,0)$ 上单调递减,

所以 $g(x) \leq g(-1) = -\frac{2}{e}$, 故 $a \geq -\frac{2}{e}$,

所以 a 得最小值为 $-\frac{2}{e}$.

故选: D.

关键点睛: 本题解题关键在于对 $\frac{x_2 e^{x_1} - x_1 e^{x_2}}{x_1 - x_2} < a$ 进行合理变形, 通过构造函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{a}{x}$,

将问题转化为 $f'(x) \leq 0$ 在 $[-1,0)$ 上恒成立, 然后可解.

9. ACD

【分析】利用相关系数的正负判断出相关性的正负判断 A; 利用二次函数计算出最大销售额时的单价判断 B; 利用单价和销量的均值落在回归线上计算出 m 的值判断 C; 将 $x = 40, 50, 60, 70, 80, 90$ 分别代入线性回归方程 $\hat{y} = -0.4x + 66$, 得到的预测值分别为 $50, 46, 42, 38, 34, 30$, 从而求解出在线性回归直线左下方的概率判断 D.

【详解】对 A, 由线性回归方程 $\hat{y} = -0.4x + 66$ 中的回归系数 $-0.4 < 0$, 可知产品的销量与单价成负相关, 故 A 正确;

对 B, 由 $\hat{y} = -0.4x + 66$, 得 $\hat{a} = 40 + 65 \times 0.4 = 66$,

则销售额 $z = x(-0.4x + 66) = -0.4(x - 82.5)^2 + 2722.5$,

为了获得最大的销售额, 单价应定为 82.5 元, 故 B 错误;

对 C, 由表中数据得 $\bar{x} = \frac{40+50+60+70+80+90}{6} = 65$,

$\bar{y} = \frac{50+44+43+m+35+28}{6} = \frac{200+m}{6}$,

可得样本点的中心的坐标为 $\left(65, \frac{200+m}{6}\right)$, 则该回归直线过点 $\left(65, \frac{200+m}{6}\right)$,

代入 $\hat{y} = -0.4x + 66$, 得 $m = 40$, 故 C 正确;

对 D, 将 $x = 40, 50, 60, 70, 80, 90$ 分别代入线性回归方程 $\hat{y} = -0.4x + 66$,

得到的预测值分别为 $50, 46, 42, 38, 34, 30$,

由 $44 < 46, 28 < 30$ ，故 $(50, 44)$ 和 $(90, 28)$ 在线性回归直线的左下方，满足条件的样本点只有 2 个，故所求概率为 $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ，故 D 正确。

故选：ACD.

10. BC

【分析】利用特征值判断 A，根据不等式的性质判断 B，利用基本不等式判断 C，根据对勾函数的性质判断 D.

【详解】对于 A，当 $c=0$ 时 $\frac{b}{a} = \frac{b+c}{a+c}$ ，故 A 错误；

对于 B，若 $ac^2 > bc^2$ ，则 $c^2 \neq 0$ ，即 $c^2 > 0$ ，所以 $a > b$ ，故 B 正确；

对于 C，因为 $a > b > 0$ ，所以 $a + 2b \geq 2\sqrt{2ab}$ ，当且仅当 $a = 2b$ 时取等号，

所以 $2a + 2b \geq a + 2\sqrt{2ab}$ ，显然 $a + 2\sqrt{2ab} > 0$ ，

所以 $\frac{a+b}{a+2\sqrt{2ab}} \geq \frac{1}{2}$ ，当且仅当 $a = 2b$ 时取等号，故 C 正确；

对于 D，因为 $\frac{2a^2+3}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{2(\sqrt{a^2+1})^2+1}{\sqrt{a^2+1}} = 2\sqrt{a^2+1} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ ，

令 $t = \sqrt{a^2+1}$ ，则 $t \geq 1$ ，令 $f(t) = 2t + \frac{1}{t} (t \geq 1)$ ，

由对勾函数的性质可知，函数 $f(t) = 2t + \frac{1}{t} = 2 \left(t + \frac{\frac{1}{2}}{t} \right)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(t)_{\min} = f(1) = 3$ ，

所以 $2\sqrt{a^2+1} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \geq 3$ ，当且仅当 $a = 0$ 时取等号，故 D 错误。

故选：BC

11. ACD

【分析】由已知 $|PF_1| \cdot |PF_2| = a^2$ ，代入坐标整理即可得出方程，即可判断 A，令 $x = 0$ ，求出

y ，即可判断 B，根据面积公式判断 C，首先根据余弦定理，以及向量可推得 $|PO| \leq \sqrt{2}a$ ，再

结合三角型三边关系判断 D.

【详解】由双曲线的定义可得： $|PF_1| \cdot |PF_2| = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = a^2$ ，

即 $[(x+a)^2 + y^2] \cdot [(x-a)^2 + y^2] = a^4$ ，化简得： $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ ，

当 $a=1$ 时, 点 P 的轨迹方程为 $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$,

令 $y=0$, 解得 $x=\pm\sqrt{2}$ 或 $x=0$, 所以 $|AB|=2\sqrt{2}$, 故 A 正确;

因为 $F_1(-a,0)$, $F_2(a,0)$, 若满足 $|PF_1|=|PF_2|$, 则点 P 在 y 轴上,

在方程中 $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ 令 $x=0$, 解得 $y=0$,

所以满足 $|PF_1|=|PF_2|$ 的点 P 为 $P(0,0)$, 只有一个, 故 B 错误;

$S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\angle F_1PF_2 = \frac{1}{2}\sin\angle F_1PF_2 \leq \frac{1}{2}$, 故 C 正确;

因为 $C_{\triangle PF_1F_2} = |PF_1| + |PF_2| + |F_1F_2| = 2 + |PF_1| + |PF_2|$,

又 $|PF_1||PF_2|=1$, 且 $|PF_1| + |PF_2| > |F_1F_2|=2$,

所以 $C_{\triangle PF_1F_2} = 2 + |PF_1| + |PF_2| > 4$,

接下来先证明 $|PO| \leq \sqrt{2}a$:

在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由余弦定理可得 $|F_1F_2|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \cos\angle F_1PF_2$,

所以 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 4a^2 + 2a^2 \cos\angle F_1PF_2$.

又因为 $2\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}$, 所以 $(2\overrightarrow{PO})^2 = (\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2})^2$

$$= |\overrightarrow{PF_1}|^2 + |\overrightarrow{PF_2}|^2 + 2\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cos\angle F_1PF_2.$$

所以 $(2|PO|)^2 + |F_1F_2|^2$

$$= |PF_1|^2 + |PF_2|^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cos\angle F_1PF_2 + |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cos\angle F_1PF_2$$

$$= 2(|PF_1|^2 + |PF_2|^2),$$

$$\text{即 } 4|PO|^2 + 4a^2 = 2 \times (4a^2 + 2a^2 \cos\angle F_1PF_2),$$

整理可得 $|PO|^2 = a^2 + a^2 \cos\angle F_1PF_2 \leq 2a^2$, 所以 $|PO| \leq \sqrt{2}a$;

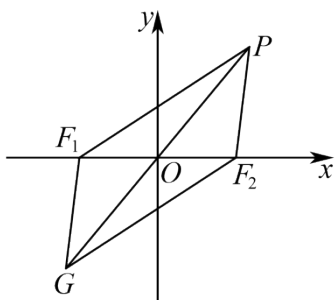
所以 $|PO| \leq \sqrt{2}$,

如图以 PF_1 、 PF_2 为邻边作平行四边形 PF_1GF_2 ,

则 $|GF_1|=|PF_2|$, 所以 $|PF_1| + |PF_2| = |PF_1| + |GF_1| < |PG| = 2|PO| \leq 2\sqrt{2}$,

所以 $C_{VPF_1F_2} = 2 + |PF_1| + |PF_2| < 2 + 2\sqrt{2}$,

即 $\triangle VPF_1F_2$ 的周长的取值范围为 $(4, 2 + 2\sqrt{2})$, 故 D 正确.



故选: ACD

12. 16 $-\frac{40}{41}$

【分析】借助赋值法, 分别令 $x=0$ 、 $x=1$ 、 $x=-1$ 计算即可得.

【详解】令 $x=0$, 可得 $(0-2)^4 = a_0$, 即 $a_0 = 2^4 = 16$,

令 $x=1$, 可得 $(1-2)^4 = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$, 即 $a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = (-1)^4 = 1$,

令 $x=-1$, 可得 $(-1-2)^4 = a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$, 即 $a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = (-3)^4 = 81$,

则 $(a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) + (a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0) = 2(a_4 + a_2 + a_0) = 1 + 81 = 82$,

即 $\boxed{\text{ }} \text{ , 则 } a_1 + a_3 = 1 - (a_4 + a_2 + a_0) = 1 - 41 = -40$,

故 $\frac{a_1 + a_3}{a_0 + a_2 + a_4} = -\frac{40}{41}$.

故 $16; -\frac{40}{41}$.

13. $(4, +\infty)$

【分析】根据绝对值不等式的解法, 结合充分不必要条件的性质进行求解即可.

【详解】由 $|x-3| \leq a \Rightarrow 3-a \leq x \leq 3+a$,

因为不等式 $|x-3| \leq a$ 成立的一个充分不必要条件是 $-1 \leq x \leq 7$,

所以有 $\begin{cases} 3+a \geq 7 \\ 3-a \leq -1 \end{cases}$, 等号不同时成立, $a \geq 4$,

当 $a=4$ 时, $-1 \leq x \leq 7$ 是不等式 $|x-3| \leq a$ 成立的充要条件, 不符合题意,

所以 $a > 4$, 实数 a 的取值范围为 $(4, +\infty)$.

故答案为 $(4, +\infty)$

14. $2+2\sqrt{2}$

【分析】根据给定条件可得 $a^2 + \lambda b^2 \leq \frac{a^3 + b^3}{a-b}$ ，再整理并分离参数，利用基本不等式求出最小值即可.

【详解】函数 $f(x) = x^3 - x$ ，则 $f(a) = a^3 - a$, $f(b) = b^3 - b$ ，而 $f(a) + f(b) = -2b$ ，

即 $a^3 - a + b^3 - b = -2b$ ，整理得 $a^3 + b^3 = a - b$ ，由 $a > 0, b > 0$ ，得 $a^3 + b^3 > 0$ ，则 $a > b > 0$ ，

因此 $\frac{a^3 + b^3}{a-b} = 1$ ，而 $a^2 + \lambda b^2 \leq 1$ ，于是 $a^2 + \lambda b^2 \leq \frac{a^3 + b^3}{a-b}$ ，整理得 $\lambda b^2 \leq \frac{b^3 + a^2 b}{a-b}$ ，即

$$\lambda \leq \frac{1 + (\frac{a}{b})^2}{\frac{a}{b} - 1},$$

$$\text{令 } t = \frac{a}{b} > 1, \text{ 则 } \frac{1 + (\frac{a}{b})^2}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{1 + t^2}{t - 1} = \frac{t^2 - 1 + 2}{t - 1} = t + 1 + \frac{2}{t - 1}$$

$$= (t - 1) + \frac{2}{t - 1} + 2 \geq 2\sqrt{(t - 1) \cdot \frac{2}{t - 1}} + 2 = 2 + 2\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } t - 1 = \frac{2}{t - 1}, \text{ 即 } t = \sqrt{2} + 1 \text{ 时取等号,}$$

因此 $(\frac{b^2 + a^2}{ab - b^2})_{\min} = 2(\sqrt{2} + 1)$ ，则 $\lambda \leq 2 + 2\sqrt{2}$ ，所以实数 λ 的最大值为 $2 + 2\sqrt{2}$.

故 $2 + 2\sqrt{2}$

15. (1) 答案见解析;

$$(2) [\frac{5}{2}, 2\sqrt{2}].$$

【分析】(1) 利用分类讨论的思想求解含有参数的不等式的解集.

(2) 利用函数的思想构造函数 $G(x) = x^2 - bx + 6$ ，借助二次函数分类讨论求函数的值域，进而列出不等式组求解即得.

【详解】(1) 令 $F(x) = af(x) + g(x) = x^2 + ax + a - 1 = (x + 1)(x + a - 1) = 0$ ，解得 $x = -1$ 或 $1 - a$ ，

① 当 $a < 2$ 时， $-1 < 1 - a$ ，不等式的解集为 $\{x | -1 < x < 1 - a\}$ ，

② 当 $a = 2$ 时， $-1 = 1 - a$ ，不等式的解集为 $\emptyset$ ，

③ 当 $a > 2$ 时， $-1 > 1 - a$ ，不等式的解集为 $\{x | 1 - a < x < -1\}$ ，

所以当 $a < 2$ 时，不等式的解集为 $\{x | -1 < x < 1 - a\}$ ，

当 $a=2$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$;

$a>2$ 时, 不等式的解集为 $\{x|1-a < x < -1\}$.

(2) 由 $bf(x_1)+f(x_2)=g(x_1)+b+8$, 得 $x_2=x_1^2-bx_1+6$,

令 $G(x)=x^2-bx+6=(x-\frac{b}{2})^2+6-\frac{b^2}{4}$, 依题意, $\forall x \in [1,2]$, $G(x)$ 取值集合包含于 $[4,5]$,

而 $b \leq 3$, 当 $\frac{b}{2} \leq 1$, 即 $b \leq 2$ 时, $G(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增, 则 $\begin{cases} b \leq 2 \\ 7-b \geq 4 \\ 10-2b \leq 5 \end{cases}$, 无解;

当 $1 < \frac{b}{2} \leq \frac{3}{2}$, 即 $2 < b \leq 3$ 时, 则 $\begin{cases} 2 < b \leq 3 \\ 6-\frac{b^2}{4} \geq 4 \\ 7-b \leq 5 \\ 10-2b \leq 5 \end{cases}$, 解得 $\frac{5}{2} \leq b \leq 2\sqrt{2}$,

所以实数 b 的取值范围是 $[\frac{5}{2}, 2\sqrt{2}]$.

16. (1) 4.74; (2) 能; (3) $\frac{3}{5}$.

(1) 根据题中所给的频率分布直方图中对应的数据, 可以求得第三组、第六组、第五组的频数以及前四组的频数和, 结合前四组的频数成等比数列, 得出相应的数据, 利用中位数的特征, 两边各占一半, 求得结果;

(2) 利用题中所给的列联表, 求得 K^2 的值, 与表中所给的临界值比较, 得到结论;

(3) 根据题意, 求出满足条件的基本事件数和总的基本事件数, 利用古典概型概率公式求解即可.

【详解】(1) 由图可知, 第三组和第六组的频数为 $100 \times 0.8 \times 0.2 = 16$ 人

第五组的频数为 $100 \times 1.2 \times 0.2 = 24$ 人

所以前四组的频数和为 $100 - (24 + 16) = 60$ 人

而前四组的频数依次成等比数列

故第一组的频数为 4 人, 第二组的频数为 8 人, 第四组的频数为 32 人

所以中位数落在第四组, 设为 x ,

因此有 $\frac{x-4.6}{0.2} = \frac{50-(4+8+16)}{32}$ (或 $1.6(x-4.6) = 0.22$)

解得 $x = 4.7375$

所以中位数是 4.74

$$(2) \text{ 因为 } K^2 = \frac{100 \times (40 \times 20 - 30 \times 10)^2}{50 \times 50 \times 70 \times 30}$$

$$\text{所以 } K^2 = \frac{100}{21} \approx 4.762$$

$$\text{所以 } K^2 > 3.841$$

因此在犯错的概率不超过 0.05 的前提下认为视力与学习成绩有关系

(3) 依题意按照分层抽样在不近视的学生中抽取了 6 人中年级名次在 1~100 名和 101~1000 名的分别有 2 人和 4 人

从 6 人中任意抽取 2 人的基本事件共 15 个

至少有 1 人来自于 1~100 名的基本事件有 9 个

$$\text{所以至少有 1 人的年级名次在 1~100 名的概率为 } P = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

方法点睛：该题考查的是有关概率与统计的问题，解题方法如下：

(1) 根据频率分布直方图中所给的数据求相应的量，利用中位数的定义求得结果；

(2) 利用公式求得 K^2 的值，结合临界值得到结果；

(3) 利用古典概型概率公式求得概率.

17. (1) 证明见解析

$$(2) \frac{2\sqrt{30}}{15}$$

【分析】(1) 由题意首先证明 $BM \perp$ 平面 $ACFD$ ，即 $DC \perp BM$ ，进一步由平面几何知识证明 $DC \perp PM$ 即可得证.

(2) 建立适当的空间直角坐标系，首先由 $\left| \cos \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ 确定参数 λ 的值，进

一步求出两平面的法向量，由夹角余弦公式即可得解.

【详解】(1) $\because BA = BC$ ，且 M 是 AC 的中点，则 $BM \perp AC$.

$\because CF \perp$ 平面 ABC ， $BM \subset$ 平面 ABC ， $\therefore CF \perp BM$.

又 $CF \cap AC = C$ ， $CF, AC \subset$ 平面 $ACFD$ ， $\therefore BM \perp$ 平面 $ACFD$ ，

因为 $DC \subset$ 平面 $ACFD$ ，

$\therefore DC \perp BM$. ①

$$\because \frac{CF}{DF} = \frac{MC}{CP}, \angle CFD = \angle MCP = \frac{\pi}{2},$$

$\therefore \triangle CFD \sim \triangle MCP$ ，则 $\angle PMC = \angle FCD$.

$$\because \angle ACD + \angle FCD = \frac{\pi}{2}, \therefore \angle PMC + \angle ACD = \frac{\pi}{2},$$

$\therefore$ 在平面 $ACFD$ 中 $DC \perp PM$. ②

$\because BM \perp PM = M, BM, PM \subset$ 平面 PBM ,

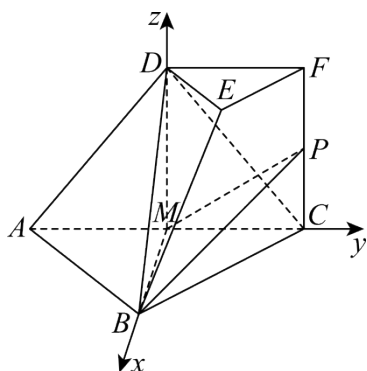
$\therefore$ 由①②知 $DC \perp$ 平面 PBM .

(2) 由题意得 $DM \parallel CF$, $CF \perp$ 平面 ABC ,

$\therefore DM \perp$ 平面 ABC .

由 (1) 可知 $BM \perp AC$, 故 M 为坐标原点.

如图, 以 MB , MC , MD 所在直线分别为 x , y , z 轴, 建立空间直角坐标系.



$$\because \frac{CF}{DF} = \frac{DF}{CP} = \lambda, \quad CP = 1$$

$$\therefore CM = DF = \lambda, \quad DM = CF = \lambda^2.$$

$$\therefore M(0,0,0), \quad B(\lambda,0,0), \quad C(0,\lambda,0), \quad D(0,0,\lambda^2).$$

$$\because AC = 2DF,$$

$$\therefore \text{由棱台的性质得 } \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BC} = (-\lambda, \lambda, 0),$$

$$\therefore \overrightarrow{ME} = \left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \lambda^2 \right).$$

由 (1) 可知平面 PBM 的一个法向量为 $\overrightarrow{CD}$, 且 $\overrightarrow{CD} = (0, -\lambda, \lambda^2)$.

Q 直线 BC 与平面 PBM 的所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$,

$$\therefore \left| \cos \angle BC, \overrightarrow{CD} \right| = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{\sqrt{6}}{6} \quad (\lambda > 0),$$

$$\text{即 } \frac{|\lambda^2|}{\lambda\sqrt{2} \cdot \lambda\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{\sqrt{6}}{6}, \text{ 解得 } \lambda = \sqrt{2}.$$

$\therefore$ 平面 PBM 的一个法向量为 $\overrightarrow{CD}$, 且 $\overrightarrow{CD} = (0, -\sqrt{2}, 2)$.

平面 EFM 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$.

$$\therefore \vec{ME} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 \right), \quad \vec{MF} = (0, \sqrt{2}, 2),$$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{ME} = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 2z = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{MF} = \sqrt{2}y + 2z = 0 \end{cases}, \quad \text{即} \begin{cases} y = -\sqrt{2}z \\ x = -\sqrt{2}z \end{cases},$$

当 $z = -1$ 时, $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$.

$\therefore$ 平面 MEF 的一个法向量为 $\vec{n} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1)$.

$$\left| \cos \angle(\vec{n}, \vec{CD}) \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{CD}|}{|\vec{n}| |\vec{CD}|} = \frac{2+2}{\sqrt{6} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{30}}{15}.$$

$\therefore$ 平面 EFM 与平面 PBM 所成夹角的余弦值 $\frac{2\sqrt{30}}{15}$.

18. (1) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

(2) ① 3; ② $|DE| - |AB|$ 为定值 4, 理由见解析

【分析】(1) 设 $|F_1F_2| = 2c$, 根据题意, 得到 $2c - 2a = 2$, 且 $c = 2a$, 联立方程组, 求得 a, b, c 的值, 即可求解;

(2) ① 设 $M(x_0, y_0)$, 求得 $y_0^2 = 3(x_0^2 - 4)$, 结合 $k_1 \cdot k_2 = \frac{y_0^2}{x_0^2 - 4}$, 即可求解;

② 由 (1) 得直线 AB 的方程为 $y = k_1(x+2)$, 联立方程组, 得到 $x_1 + x_2, x_1x_2$, 结合弦长公式,

求得 $|AB| = \frac{6(1+k_1^2)}{3-k_1^2}$ 和 $|DE| = \frac{2(9+k_1^2)}{3-k_1^2}$, 进而化简得到 $|DE| - |AB|$ 为定值.

【详解】(1) 解: 设 $|F_1F_2| = 2c$, 因为 $\triangle BF_1F_2$ 与 $\triangle ABF_2$ 的周长之差为 2,

所以 $|BF_1| + |F_1F_2| - |AB| - |AF_2| = 2$, 即 $2c - 2a = 2$,

又因为 F_1, F_2 分别为双曲线 $C_2: \frac{x^2}{4a^2} - \frac{y^2}{4b^2} = 1$ 的左、右顶点, 所以 $c = 2a$,

联立方程组 $\begin{cases} c - a = 1 \\ c = 2a \end{cases}$, 解得 $a = 1, c = 2$, 所以 $b^2 = c^2 - a^2 = 1$,

故双曲线 C_1 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 解: ①由 (1) 知, 双曲线 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1, F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$,

设 $M(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{4} - \frac{y_0^2}{12} = 1$, 可得 $y_0^2 = 3(x_0^2 - 4)$,

$$\text{则 } k_1 \cdot k_2 = \frac{y_0}{x_0 + 2} \cdot \frac{y_0}{x_0 - 2} = \frac{y_0^2}{x_0^2 - 4} = 3.$$

② $|DE| - |AB|$ 为定值 4.

理由如下:

由 (1) 得直线 AB 的方程为 $y = k_1(x + 2)$,

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} y = k_1(x + 2) \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 整理得 } (3 - k_1^2)x^2 - 4k_1^2x - 4k_1^2 - 3 = 0,$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1 + x_2 = \frac{4k_1^2}{3 - k_1^2}, x_1x_2 = \frac{-4k_1^2 - 3}{3 - k_1^2},$$

因为 A, B 位于双曲线的左、右两支, 所以 $x_1x_2 = \frac{-4k_1^2 - 3}{3 - k_1^2} < 0$, 即 $k_1^2 < 3$,

$$\text{可得 } |AB| = \sqrt{(1 + k_1^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]} = \sqrt{\frac{36(1 + k_1^2)^2}{(3 - k_1^2)^2}} = \frac{6(1 + k_1^2)}{3 - k_1^2},$$

又因为 $k_1 \cdot k_2 = 3$, 所以直线 DE 的方程为 $y = \frac{3}{k_1}(x - 2)$,

$$\text{根据双曲线的对称性, 同理可得 } |DE| = \frac{6 \left[1 + \left(\frac{3}{k_1} \right)^2 \right]}{\left| 3 - \left(\frac{3}{k_1} \right)^2 \right|} = \frac{2(9 + k_1^2)}{3 - k_1^2},$$

$$\text{所以 } |DE| - |AB| = \frac{2(9 + k_1^2)}{3 - k_1^2} - \frac{6(1 + k_1^2)}{3 - k_1^2} = 4, \text{ 故 } |DE| - |AB| \text{ 为定值 } 4.$$

方法知识总结: 解答圆锥曲线的定点、定值问题的策略:

1、参数法: 参数解决定点问题的思路: ①引进动点的坐标或动直线中的参数表示变化量, 即确定题目中核心变量 (通常为变量 k); ②利用条件找到 k 过定点的曲线 $F(x, y) = 0$ 之间的关系, 得到关于 k 与 x, y 的等式, 再研究变化量与参数何时没有关系, 得出定点的坐标;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/886012243013011102>