遍历过程 与 马尔科夫链

内 容 复 习

严平稳过程

一. **定义1** 随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ ，如果对任意 n 维分布函数,任意实数 ε ,满足:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

$$= F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1+\varepsilon, t_2+\varepsilon, \cdots, t_n+\varepsilon) \quad n = 1, 2, \cdots$$

则称 $X(t)$ 为严平稳过程,或称狭义平稳过程.

广义平稳过程

(一) 广义平稳过程的定义

定义2　设随机过程 $X(t)$,对于任意 $t \in T$,满足:

(1) $E[X^2(t)]$存在且有限;

(2) $E[X(t)] = \mu_X$是常数;

(3) $E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$仅依赖于 τ,而与 t无关,

则称 $X(t)$为广义平稳过程,或称宽平稳过程,简称平稳过程.

严平稳过程与广义平稳过程的关系

推论 存在二阶矩的严平稳过程必定是广义平稳过程.

1.广义平稳过程,不一定是严平稳过程.

2.严平稳过程,(如果二阶矩不存在),不一定是广义平稳过程

正态平稳过程

定义 如果随机过程 $X(t)$,对任意正整数n,

$\forall t_1,t_2,\cdots,t_n \in T,(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$ 服从正态分布

则称$X(t)$ 为正态过程.

设 $\{X(t),t\in T\}$ 是正态过程, $X(t)$ 服从正态分布,则

$\Psi_X^2(t)=E[X^2(t)]$必存在,即二阶矩存在.

二. 正态平稳过程

定义 如果正态过程 $X(t)$ 又是(广义)平稳过程,则称$X(t)$为正态平稳过程.

定理二：设 $X(t)$ 是正态过程.

则 $X(t)$ 为严平稳过程 $\Leftrightarrow$ $X(t)$ 为广义平稳过程.

例2 设 $X(t)$ 是正态平稳过程,且 $E[X(t)]=\mu_X(t)=0,$

令 $$Y(t)=\begin{cases}1, 当X(t)<0\\0, 当X(t)\geq 0\end{cases}$$

证明: $Y(t)$是平稳过程.

解 $D(X(t))=R_X(0)\quad \mu_X(t)=0, \rho=\dfrac{R_X(t_2-t_1)}{R_X(0)}$

$X(t)$的一维分布为$N(0,R_X(0))$,密度与t无关

二维分布为$N(0,R_X(0),0,R_X(0),\rho)$,密度是$t_2-t_1$的函数

故 $E(Y(t))=P(X(t)<0)$与t无关

$E(Y(t_1)Y(t_2))=P(X(t_1)<0,X(t_2)<0)$只与$t_2-t_1$有关。

第四节 遍历过程(历经过程)

一. 时间均值和时间相关函数

设随机过程$\{X(t), t \in T = (-\infty, +\infty)\}$，任固定$e \in S$,样本函数 $X(e,t) = x(t)$, 样本函数$x(t)$ 在区间$[-l, l](l > 0)$上的函数平均值定义为 $\overline{x(t)} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} x(t)dt.$

$x(t)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上的函数平均值定义为

$$\overline{x(t)} = \lim_{l \to +\infty} \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} x(t)dt$$

当e 变化时，$\overline{X(t)} = \overline{X(e,t)} = \lim_{l \to +\infty} \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} X(e,t)dt$

定义6 $\overline{X(t)}=\overline{X(e,t)}=\lim\limits_{l\to+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}X(e,t)dt$ 称为随机过程 $X(t)$ 对于参数 t 的平均值,通常称为随机过程 $X(t)$ 的时间均值.

显然 $\overline{X(t)}=\overline{X(e,t)}=\lim\limits_{l\to+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}X(e,t)dt$ 是一个随机变量.

在任意 t 处, 给任意实数 τ， 过程在 t 和 $t+\tau$ 的两个

状态的乘积 $X(e,t)X(e,t+\tau)$, 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的平均值,

记为

$$\overline{X(t)X(t+\tau)} = \overline{X(e,t)X(e,t+\tau)} = \lim_{l\to+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} X(e,t)X(e,t+\tau)dt$$

定义7

$$\overline{X(t)X(t+\tau)} = \overline{X(e,t)X(e,t+\tau)} = \lim_{l\to+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} X(e,t)X(e,t+\tau)dt$$

称为随机过程 $X(t)$ 的**时间相关函数**.

(显然它是一个随机过程.)

对随机过程 $\{X(t), t \in T = [0, +\infty)\}$ 定义,

时间均值 $\overline{X(t)} = \lim_{l\to+\infty}\frac{1}{l}\int_{0}^{l} X(e,t)dt$

时间相关函数

$$\overline{X(t)X(t+\tau)} = \overline{X(e,t)X(e,t+\tau)} = \lim_{l\to+\infty}\frac{1}{l}\int_0^l X(e,t)X(e,t+\tau)dt$$

例1 **求随机相位正弦波** $X(t) = a\cos(\omega t + \Theta)$

的时间均 值和时间相关函数.

(记住这个例题的结论,以后要用)

$$\overline{X(t)} = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} X(t)dt =$$

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\frac{a}{\omega}\left[\sin(\omega l + \Theta) - \sin(-\omega l + \Theta)\right]$$

$$= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\frac{a}{\omega}\cos(\Theta)\sin(\omega l) = 0$$

$$\overline{X(t)X(t+\tau)} = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} X(t)X(t+\tau)dt$$

$$= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} a^2\cos(wt + \Theta)\cos[w(t+\tau) + \Theta]dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\cos(\omega\tau)$$

二. 各态遍历性

定义8 设 $X(t)$ 是一个平稳过程 $(T=(-\infty,+\infty)$ 或

$T=[0,+\infty))$ $\{$即, $E[X(t)]=\mu_X, E[X^2(t)]=\Psi_X^2$ 为常

数, 且 $\boldsymbol{E[X(t)X(t+\tau)]=R_X(\tau)}\}$

(1) 如果 $P\{\overline{X(t)}=E[X(t)]=\mu_X\}=1$, 则称过程 $X(t)$

的均值具有各态遍历性;

注: $\boldsymbol{X(t)}$具有遍历性, 则$\overline{\boldsymbol{X(t)}}$退化为常数$\boldsymbol{u_X}$。

(2) 如果 $P\{\overline{X(t)X(t+\tau)}=E[X(t)X(t+\tau)]=R_X(\tau)\}=1$

则称过程 $X(t)$ 的自相关函数具有各态遍历性.

(3) 均值和自相关函数都具有各态遍历性的平稳过程称为遍历过程,或说,该平稳过程具有遍历性.

(三) 遍历过程的例子

例1 设 $X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$, $t\in(-\infty,+\infty)$ ，其中 $a,\omega(\neq 0)$ 是实常数,

Θ 服从区间 $(0,2\pi)$上的均匀分布，讨论

$X(t)$ 的各态遍历性.

解 由 $E(X(t))=0$, $R(\tau)=\dfrac{a^2}{2}\cos(\omega\tau)$ 及例1结论，

知X(t)具有遍历性

不具各态遍历性的例子：

例2 设 $X(t)=Y$, Y 是一个随机变量,且 $DY \neq 0$

则 (1) $X(t)$ 是平稳过程;

(2) $X(t)$ 的均值不具有各态遍历性.

四. 平稳过程具有各态遍历性的判别定理

引理 设$\{X(t),-\infty < t < +\infty\}$是一个平稳过程,则它的时间均值的数学期望和方差分别为

$$E[\overline{X(t)}] = \mu_X = E[X(t)]$$

$$D[\overline{X(t)}] = \lim_{l\to+\infty}\frac{1}{l}\int_0^{2l}(1-\frac{\tau}{2l})[R_X(\tau)-\mu_X^2]d\tau$$

定理三 (均值各态遍历定理)平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$

的均值具有各态遍历性的充要条件是

$$D[\overline{X(t)}] = \lim_{l \to +\infty} \frac{1}{l} \int_0^{2l} (1 - \frac{\tau}{2l})[R_X(\tau) - \mu_X^2] d\tau = 0$$

五：引入遍历过程的目的,应用意义

近似计算 μ_X 提供依据.