

齐次化妙解圆锥曲线

01

内容速览

题型 1 定点在原点的斜率问题

题型 2 定点在原点转化成斜率问题

题型 3 定点不在原点之齐次化基础运用

题型 4 定点不在原点的斜率问题

题型 5 定点不在原点转化为斜率问题

题型 6 定点不在原点之二级结论第三定义的使用

题型 7 齐次化妙解之等角问题

题型 8 点乘双根法的基础运用

题型 9 点乘双根法在解答题中的运用

02

重难点题型归纳

题型 1 定点在原点的斜率问题



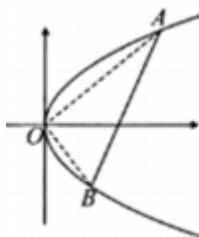
圆锥曲线的定义、定值、弦长、面积，很多都可以转化为斜率问题，当圆锥曲线遇到斜率之和或者斜率之积，以往我们的常用解法是设直线 $y = kx + b$ ，与圆锥曲线方程联立方程组，韦达定理，再将斜率之和或之积的式子通分后，将 $x_1 + x_2$ 和 $x_1 \cdot x_2$ 代入，得到关于 k 、 b 的式子。解法不难，计算量较为复杂。

如果采用齐次化解决，直接得到关于 k 的方程，会使题目计算量大大减少。

“齐次”即次数相等的意思，例如 $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ 称为二次齐式，即二次齐次式的意思，因为 $f(x, y)$ 中每一项都是关于 x 、 y 的二次项。

如果公共点在原点，不需要平移。

1 直线 $mx + ny = 1$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，求 $k_{OA} + k_{OB}$ ， $k_{OA} \cdot k_{OB}$ 。（用 m ， n 表示）

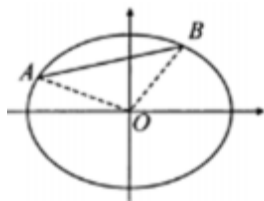


【解析】联立 $\begin{cases} mx + ny = 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ ，齐次化得 $y^2 = 4x(mx + ny)$ ，等式两边同时除以 x^2 ， $\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4n\left(\frac{y}{x}\right) - 4m = 0$ ，

$\therefore \because k_{OA} + k_{OB} = \frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} = 4n$ ， $k_{OA}k_{OB} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -4m$ 。

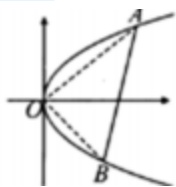


题目 1 直线 $mx + ny = 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 求 $k_{OA} \cdot k_{OB}$ (用 m, n 表示).



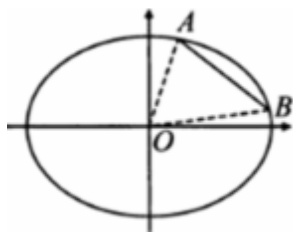
【解析】 $\begin{cases} mx + ny = 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 齐次化联立得: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = (mx + ny)^2$, 等式两边同时除以 x^2 , $(12n^2 - 4)(\frac{y}{x})^2 + 24mn(\frac{y}{x}) + 12m^2 - 3 = 0$, $\therefore k_{OA} \cdot k_{OB} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = \frac{12m^2 - 3}{12n^2 - 4}$.

题目 2 抛物线 $y^2 = 4x$, 直线 l 交抛物线于 A, B 两点, 且 $OA \perp OB$, 求证: 直线 l 过定点.



【解析】 设直线 AB 方程为 $mx + ny = 1$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\begin{cases} mx + ny = 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 联立得 $(\frac{y}{x})^2 - 4n(\frac{y}{x}) - 4m = 0$, $\therefore k_{OA}k_{OB} = \frac{y_1y_2}{x_1x_2}$, $\therefore -4m = -1$, $\therefore m = \frac{1}{4}$, $\therefore$ 直线 $AB: \frac{1}{4}x + ny = 1$ 过定点 $(4, 0)$.

题目 3 不过原点的动直线交椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 于 A, B 两点, 直线 OA, AB, OB 的斜率成等比数列, 求证: 直线 l 的斜率为定值.



【解析】 设直线 AB 方程为 $mx + ny = 1$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\begin{cases} mx + ny = 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 联立得 $(12n^2 - 4)(\frac{y}{x})^2 + 24mn(\frac{y}{x}) + 12m^2 - 3 = 0$, 于是 $k_{OA}k_{OB} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = \frac{12m^2 - 3}{12n^2 - 4}$, 又 $k_{AB} = -\frac{m}{n}$, $\therefore \frac{12m^2 - 3}{12n^2 - 4} = \frac{m^2}{n^2}$, 得 $k_{AB} = -\frac{m}{n} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

题目 4 已知直线 $y = kx + 4$ 交椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 于 A, B 两点, O 为坐标原点, 若 $k_{OA} + k_{OB} = 2$, 求该直线方程.

【解析】 法一 (齐次化解法): 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

步骤 1: 构建关于 x, y 的齐次式:

将直线变形为 $\frac{y - kx}{4} = 1$ 代入 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 进行“1”的代换得 $\frac{x^2}{4} + y^2 = (\frac{y - kx}{4})^2$,

整理得 $15y^2 + 2kxy + (4 - k^2)x^2 = 0$;

步骤 2: 构建关于斜率 $k = \frac{y}{x}$ 的方程:

因为 $x \neq 0$, 方程两边同除以 x^2 , 得 $15\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2k\left(\frac{y}{x}\right) + (4 - k^2) = 0$;

步骤3: 利用韦达定理转化目标:

易知 $k_{OA} = \frac{y_1}{x_1}$ 和 $k_{OB} = \frac{y_2}{x_2}$ 是方程 $15\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2k\left(\frac{y}{x}\right) + (4 - k^2) = 0$ 的两个根, 由韦达定理得 $k_{OA} + k_{OB} = \frac{-2k}{15}$

$= 2$, 即 $k = -15$, 故所求直线方程为 $y = -15x + 4$.

法二 (常规解法):

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 联立 $\begin{cases} y = kx + 4 & ① \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 & ② \end{cases}$, ①代入②消去 y 得

$$(4k^2 + 1)x^2 + 32kx + 60 = 0,$$

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则

$$x_1 + x_2 = -\frac{32k}{4k^2 + 1}, \quad x_1 x_2 = -\frac{60}{4k^2 + 1},$$

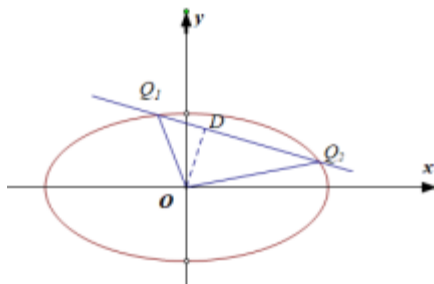
所以

$$k_{OA} + k_{OB} = \frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} = \frac{kx_1 + 4}{x_1} + \frac{kx_2 + 4}{x_2} = 2k + \frac{4(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = 2k + \frac{32k}{15} = 2,$$

解得 $k = -15$, 故所求直线方程为 $y = -15x + 4$.

【方法小结】本题属于曲线上的两个点与原点连线的斜率之和为定值 (斜率之积为定值也可以用本法) 问题, 通过对直线变形, 采取“1”的巧用, 一般二次方不变, 一次方项直接乘以“1”, 常数项乘以“1”的平方, 从而构建关于 x, y 的二元二次的齐次方程, 再两边同时除以 x^2 得到一个是以原点与曲线上连线的斜率 k 为根的一元二次方程, 再借助韦达定理使得问题运算得到简化, 我们把这种操作手法称之为“齐次化”.

题目 5 设 Q_1, Q_2 为椭圆 $\frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上两个动点, 且 $OQ_1 \perp OQ_2$, 过原点 O 作直线 Q_1Q_2 的垂线 OD , 求 D 的轨迹方程.



【解析】法一: (常规方法)

设 $Q_1(x_1, y_1)$, $Q_2(x_2, y_2)$, $D(x_0, y_0)$, 设直线 Q_1Q_2 方程为 $y = kx + m$, 联立 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ 化简可得: $(2b^2k^2 + b^2)x^2 + 4kmb^2x + 2b^2(m^2 - b^2) = 0$,

$$x^2 + 4kmb^2x + 2b^2(m^2 - b^2) = 0,$$

$$\text{所以 } x_1 x_2 = \frac{2b^2(m^2 - b^2)}{2b^2k^2 + b^2}, \quad y_1 y_2 = \frac{b^2(m^2 - 2b^2k^2)}{2b^2k^2 + b^2},$$

因为 $OQ_1 \perp OQ_2$, 所以

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{2b^2(m^2 - b^2)}{2b^2k^2 + b^2} + \frac{b^2(m^2 - 2b^2k^2)}{2b^2k^2 + b^2} = \frac{2(m^2 - b^2)}{2k^2 + 1} + \frac{m^2 - 2b^2k^2}{2k^2 + 1} = 0,$$

$$\therefore 3m^2 = 2b^2(1 + k^2) \quad ①$$

又因为直线 Q_1Q_2 方程等价于为 $y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$, 即 $y = -\frac{x_0}{y_0}x + \frac{x_0^2}{y_0} + y_0$,

对比于 $y = kx + m$, 则 $\begin{cases} -\frac{x_0}{y_0} = k \\ \frac{x_0^2}{y_0^2} + y_0 = m \end{cases}$ 代入①中, 化简可得: $x_0^2 + y_0^2 = \frac{2}{3}b^2$.

法二: (齐次化解法)

设直线 Q_1Q_2 方程为 $mx + ny = 1$, 联立 $\begin{cases} mx + ny = 1 \\ \frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$, 可得 $\begin{cases} mx + ny = 1 \\ \frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases}$,

所以 $\frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} - (mx + ny)^2 = 0$, 化简可得 $\frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} - m^2x^2 - n^2y^2 - 2mnxy = 0$,

整理成关于 x, y 的齐次式: $(2 - 2b^2n^2)y^2 + (1 - 2m^2b^2)x^2 - 4mnb^2xy = 0$,

进而两边同时除以 x^2 , 则 $(2 - 2b^2n^2)\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4mnb^2\frac{y}{x} + 1 - 2m^2b^2 = 0$,

记 OQ_1, OQ_2 的斜率分别为 k_1, k_2 , 则 k_1, k_2 为方程 $(2 - 2b^2n^2)\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4mnb^2\frac{y}{x} + 1 - 2m^2b^2 = 0$ 的两个根, 由

韦达定理得 $k_1k_2 = \frac{1 - 2m^2b^2}{2 - 2b^2n^2}$,

因为 $OQ_1 \perp OQ_2$, 所以 $k_1k_2 = -1$,

$$\frac{1 - 2m^2b^2}{2 - 2b^2n^2} = -1$$

$\therefore 3m^2 = 2b^2(1 + k^2)$ ①

又因为直线 Q_1Q_2 方程等价于 $y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$, 即 $y = -\frac{x_0}{y_0}x + \frac{x_0^2}{y_0} + y_0$,

对比于 $y = kx + m$, 则 $\begin{cases} -\frac{x_0}{y_0} = k \\ \frac{x_0^2}{y_0^2} + y_0 = m \end{cases}$, 代入①中, 化简可得: $x_0^2 + y_0^2 = \frac{2}{3}b^2$.

题型2 定点在原点转化成斜率问题



圆锥曲线齐次化原理是: 过程中为了式子整齐好记, 所以将它齐次化。齐次化是常见的代数处理技巧, 圆锥曲线中用齐次化的方法解决和斜率相关的定值定点。

齐次化法简化计算适用范围: 圆锥曲线中处理斜率之和与斜率之积类型问题。

以圆锥曲线中椭圆为例, 先介绍齐次化解题的基本特征与一般步骤:

(一) 基本特征

1. 椭圆上有定点 $P(x_0, y_0)$ 和动弦 AB ;
2. 题设或结论中涉及 PA, PB 的斜率之积或斜率之和等情况. 如 $k_1 \cdot k_2, k_1 + k_2, \dots$

(二) 解题步骤

1. 设直线方程为 $m(x - x_0) + n(y - y_0) = 1$, 其中点 (x_0, y_0) 为两相关直线的交点 (这样设直线方程的形式, 右边为 1 对联立齐次化较为方便);
2. 椭圆方程变形为
3. 椭圆变形方程与直线方程联立齐次化:
4. 由韦达定理得 $k_1 + k_2, k_1 \cdot k_2$;

5. 根据题设进一步求解。

注意：过一定点作两条直线

且两直线间存在斜率关系（显性或隐性）如果你发现题目出现了以上情况那这个题目八成可用齐次化来简化但要注意叙述的严谨性和完整性否则易被老师扣去过程分

1 已知抛物线 C 的方程为 $y^2 = 2px$, 若直线 $y = kx + b$ 与抛物线 C 相交于 A, B 两点, 且以 AB 为直径的圆过坐标原点, 证明直线 $y = kx + b$ 过定点.

【证明】因为以 AB 为直径的圆过坐标原点, 所以 $OA \perp OB$, 即 $k_{OA} \cdot k_{OB} = -1$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $k_{OA} = \frac{y_1}{x_1}, k_{OB} = \frac{y_2}{x_2}$.

将直线 $y = kx + b$ 变形得 $\frac{y}{b} - \frac{kx}{b} = 1$, 记 $m = \frac{1}{b}, n = -\frac{k}{b}$, 则直线可化为 $my + nx = 1$,

将“1”代入抛物线 C 的方程得 $y^2 = 2px(my + nx)$, 整理得 $y^2 - 2pmxy - 2pnx^2 = 0$,

因为 $x \neq 0$, 方程两边同除以 x^2 , 得 $\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2pm\frac{y}{x} - 2pn = 0$,

易知 $k_{OA} = \frac{y_1}{x_1}$ 和 $k_{OB} = \frac{y_2}{x_2}$ 是方程 $\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2pm\frac{y}{x} - 2pn = 0$ 的两个根,

由韦达定理得 $k_{OA} \cdot k_{OB} = -2pn = -1$, 即 $n = \frac{1}{2p}$,

代入求直线方程 $my + nx = 1$ 得 $my + \frac{1}{2p}x = 1$, 即 $x = 2pmy + 2p$,

当 $y = 0$ 时, $x = 2p$, 故直线恒过点 $(2p, 0)$.

题目 1 直线 $x + 2y - 3 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + x - 6y + c = 0$ 相交于 P, Q , 且 $OP \perp OQ$, 求 c 的值.

类型识别: $OP \perp OQ$, 所以 $k_{OP} \cdot k_{OQ} = -1$, 适合用齐次化来处理.

【解析】设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 将直线变形为 $\frac{x + 2y}{3} = 1$,

代入圆 $x^2 + y^2 + x - 6y + c = 0$ 得 $x^2 + y^2 + (x - 6y) \cdot \frac{x + 2y}{3} + c\left(\frac{x + 2y}{3}\right)^2 = 0$,

化简得 $(4c - 27)y^2 + (4c - 12)xy + (c + 12)x^2 = 0$,

等式两边同除以 x^2 得 $(4c - 27)\left(\frac{y}{x}\right)^2 + (4c - 12)\frac{y}{x} + (c + 12) = 0$,

注意到 $k_{OP} = \frac{y_1}{x_1}, k_{OQ} = \frac{y_2}{x_2}$, 所以 k_{OP} 和 k_{OQ} 方程 $(4c - 27)\left(\frac{y}{x}\right)^2 + (4c - 12)\frac{y}{x} + (c + 12) = 0$ 的两个根, 所以

$k_{OP} \cdot k_{OQ} = \frac{c + 12}{4c - 27} = -1$, 计算可得 $c = 3$.

题目 2 (2021 重庆期末) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点 $A(2, a)$ 到其焦点的距离为 3.

(I) 求抛物线 C 的方程;

(II) 过点 $(4, 0)$ 的直线与抛物线 C 交于 P, Q 两点, O 为坐标原点, 证明: $\angle POQ = 90^\circ$.

【解析】解法 1: (I) 由题意知: $2 - \left(-\frac{p}{2}\right) = 3 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow y^2 = 4x$.

(II) 证明: 设该直线为 $my = x - 4$, P, Q 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

联立方程有: $\begin{cases} my = x - 4 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow y^2 - 4my - 16 = 0$,

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} + y_1y_2 = \frac{1}{16} \times (-16)^2 - 16 = 0, \therefore \angle POQ = 90^\circ$.

解法 2: 要证明 $\angle POQ = 90^\circ$, 即证 $k_{PO} \cdot k_{QO} = -1$,

设 $PQ: mx + ny = 1$, 过 $(4, 0)$, $\therefore 4m = 1$, $m = \frac{1}{4}$, $y^2 = 4x(mx + ny)$, $y^2 - 4nxy - 4mx^2 = 0$,
同除以 x^2 得 $\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4n\frac{y}{x} - 4m = 0$, $k_1 \cdot k_2 = -4m$, $\therefore m = \frac{1}{4}$, $\therefore k_1 \cdot k_2 = -1$ 即 $\angle POQ = 90^\circ$.

题目 | 3 (2022 连云港期末) 已知直线 l 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点.

(1) 若直线 l 的斜率为 -1 ，且经过抛物线 C 的焦点，求线段 AB 的长；

(2) 若点 O 为坐标原点，且 $OA \perp OB$ ，求证：直线 l 过定点.

【答案】(1)8

(2) 证明见解析

【分析】(1) 联立直线与抛物线的方程，根据抛物线的焦点弦公式结合韦达定理即可得解；

(2) 直线 AB 方程为： $x=my+n$ ，由向量数量积公式结合韦达定理可得 n 的值，进而可得结果.

【详解】(1) 抛物线为 $y^2=4x$,

$\therefore$ 焦点坐标为 $(1, 0)$ ，直线 AB 斜率为 -1 ，则直线 AB 方程为： $y=-x+1$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ，由 $\begin{cases} y = -x + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 得： $x^2 - 6x + 1 = 0$ ，可得 $x_1 + x_2 = 6$,

由抛物线定义可得 $|AB| = x_1 + x_2 + 2$,

$\therefore |AB| = 8$.

(2) 设直线 AB 方程为： $x=my+n$ ，设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$\therefore OA \perp OB$, $\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, $\therefore x_1x_2 + y_1y_2 = 0$,

由 $\begin{cases} x = my + n \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 得： $y^2 - 4my - 4n = 0$,

$\therefore y_1y_2 = -4n$; $x_1x_2 = n^2$; $\therefore n^2 - 4n = 0$ ，解得 $n = 0$ 或 $n = 4$,

当 $n = 0$ 时，直线 AB 过原点，不满足题意；当 $n = 4$ 时，直线 AB 过点 $(4, 0)$.

故当 $OA \perp OB$ 时，直线 AB 过定点 $(4, 0)$.

题型 3 定点不在原点之齐次化基础运用



$y-n$ 型怎么采用齐次化运算解决，平移是关键

如果不在原点，先平移图形，将公共点平移到原点，无论如何平移，直线斜率是不变的. 注意平移口诀是“左加右减，上加下加”，你没有看错，“上减下加”，因为是在等式与 y 同侧进行加减，我们以往记的“上加下减”都是在等式与 y 的异侧进行的.

例： $y = kx + b$ 向上平移 1 个单位，变为 $y = kx + b + 1$ ，即 $y - 1 = kx + b$,

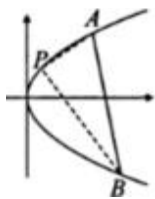
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 向上平移 1 个单位，变为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$.

设平移后的直线为 $mx + ny = 1$ (为什么这样设？ $\therefore$ 这样齐次化更加方便，相当于“1”的妙用)，与平移后的圆锥联立，一次项乘以 $mx + ny$ ，常数项乘以 $(mx + ny)^2$ ，构造 $ay^2 + bxy + cx^2 = 0$ ，然后等式两边同时除以 x^2 (前面注明 x 不等于 0)，得到 $a \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 + b \cdot \frac{y}{x} + c = 0$ ，可以直接利用韦达定理得出斜率之和或者斜率之积， $\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} = -\frac{b}{a}$, $\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = \frac{c}{a}$ ，即可得出答案. 如果是过定点题目，还需要还原，之前如何平移，现在反平移回去.

总结解法为：①平移；②联立并齐次化；③同除以 x^2 ；④韦达定理. 证明完毕，若过定点，还需要还原.

优点：大大减小计算量，提高准确率！缺点： $mx+ny=1$ 不能表示过原点的直线，少量题目需要讨论.

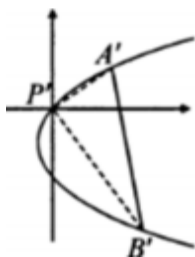
抛物线 $y^2=4x$, $P(1, 2)$, 直线 l 交抛物线于 A 、 B 两点, $PA \perp PB$, 求证: 直线 l 过定点.



【解析】法 1: (推荐)

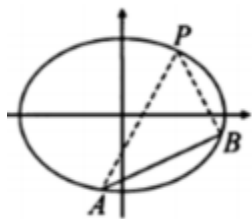
设直线 $l: m(x-1) + n(y-2) = 1$, 抛物线变形: $(y-2+2)^2 = 4(x-1+1)$, 化简得: $(y-2)^2 + 4(y-2) + 4 = 4x - 1 + 4$, 即 $(y-2)^2 + 4(y-2) = 4x - 1$, 一次项化成二次项得: $(y-2)^2 + 4(y-2)[m(x-1) + n(y-2)] = 4x - 1[(x-1) + n(y-2)]$, 即 $(1+4n)\left(\frac{y-2}{x-1}\right)^2 + (4m-4n)\left(\frac{y-2}{x-1}\right) - 4m = 0$, $k_{PA}k_{PB} = \frac{-4m}{1+4n} = -1$, 整理得 $4m - 4n = 1$, 直线 $l: (5, -2)$

法 2: 将图形向左平移 1 个单位, 向下平移 2 个单位, 平移后的抛物线方程为 $y^2 = 4(x+1)$, 整理得 $y^2 + 4y - 4x = 0$. 设平移后直线 $A'B'$ 方程为 $mx + ny = 1$, $A'(x_1, y_1)$, $B'(x_2, y_2)$, $\begin{cases} mx + ny = 1 \\ y^2 + 4y - 4x = 0 \end{cases}$ 联立得 $(1+4n)\left(\frac{y}{x}\right)^2 + (4m-4n)\left(\frac{y}{x}\right) - 4m = 0$, 于是 $k_{PA'}k_{PB'} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = \frac{-4m}{1+4n} = -1$, 整理得 $4m - 4n = 1$, $\therefore mx + ny = 1$ 过定点 $(4, -4)$, 右移 1 个, 上移 2 个, 直线 AB 过定点 $(5, -2)$.



椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 点 $P(1, \frac{3}{2})$, A, B 为椭圆上两点, $k_{PA} + k_{PB} = 0$. 求证: 直线 AB 斜率为定值.

题目 1



【解析】解法一: 将图形向左平移 1 个单位, 向下平移 $\frac{3}{2}$ 个单位, 平移后的椭圆为 $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+\frac{3}{2})^2}{3} = 1$, 整理得 $4y^2 + 3x^2 + 6x + 12y = 0$, 设平移后直线 $A'B'$ 方程为 $mx + ny = 1$, $A'(x_1, y_1)$, $B'(x_2, y_2)$,

$$\begin{cases} mx + ny = 1 \\ 4y^2 + 3x^2 + 6x + 12y = 0 \end{cases}, \text{联立得 } 4y^2 + 3x^2 + (6x + 12y) - (mx + ny) = 0,$$

$$(12n + 4)\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 6(2m + n)\left(\frac{y}{x}\right) + (6m + 3) = 0, \text{同时除以 } x^2, (12n + 4)\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 6(2m + n)\left(\frac{y}{x}\right) + (6m + 3) = 0,$$

$$k_{PA'} + k_{PB'} = \frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} = \frac{-6(2m+n)}{12n+4} = 0, -6(2m+n) = 0, mx + ny = 1 \text{ 的斜率 } -\frac{m}{n} = \frac{1}{2}.$$

解法二 (换元法): 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 即化为 $\frac{y_1 - \frac{3}{2}}{x_1 - 1} \cdot \frac{y_2 - \frac{3}{2}}{x_2 - 1} = 0$, 即建立以 $\frac{y - \frac{3}{2}}{x - 1}$ 为未知数的一元

二次方程 $A\left(\frac{y - \frac{3}{2}}{x - 1}\right)^2 + B \cdot \frac{y - \frac{3}{2}}{x - 1} + C = 0$, 即可解答. 为了方便运算设 $x - 1 = s$, $y - \frac{3}{2} = t$, 代入椭圆 $\frac{x^2}{4}$

$+\frac{y^2}{3}=1$, 得 $3s^2+4t^2+6t+12t=0$, $\therefore$ 设直线 $ms+nt=6$ 可方便运算, $3s^2+4t^2+t(ms+nt)+2t(ms+nt)$
 $=0$, 化简得: $(4+2n)(\frac{t}{s})^2+(2m+n)(\frac{t}{s})+(3+m)=0$, $\therefore \frac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1} \cdot \frac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1} = \frac{t_1}{s_1} \cdot \frac{t_2}{s_2} = \frac{2m+n}{4+2n}=0$, $x-$
 $1=s, y-\frac{3}{2}=t, n=-2m$ 代入 $ms+nt=6$, 得 $m(x-1)-2m(y-\frac{3}{2})=6$, $\therefore$ 直线 AB 的斜率是 $\frac{1}{2}$.

题目 2 双曲线 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$, $P(2,0)$, A, B 为双曲线上两点, 且 $k_{PA}+k_{PB}=0$. AB 不与 x 轴垂直, 求证: 直线 AB 过定点.



【解析】将图形左平移 2 个单位, 平移后的双曲线为 $\frac{(x+2)^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$, 整理得 $y^2-x^2-4x-2=0$,

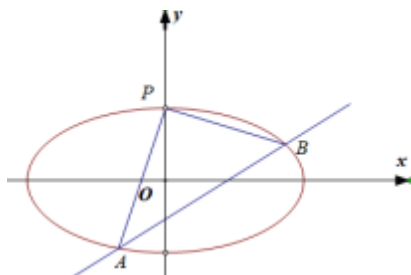
设平移后直线 $A'B'$ 方程为 $mx+ny=1$, $A'(x_1, y_1)$, $B'(x_2, y_2)$, $\begin{cases} mx+ny=1 \\ y^2-x^2-4x-2=0 \end{cases}$,

联立得 $y^2-x^2-4x-(mx+ny-1)^2=0$, $(1-2n^2)y^2-(4n+4mn)xy-(2m^2+4m+1)x^2=0$,

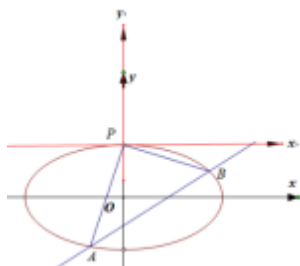
同时除以 x^2 , $(1-2n^2)(\frac{y}{x})^2-(4n+4mn)(\frac{y}{x})-(2m^2+4m+1)=0$, $k_{PA'}+k_{PB'}=\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}=\frac{4n+4mn}{1-2n^2}=0$,

$4n+4mn=4n(m+1)=0$, $n=0$ 或 $m=-1$, AB 不与 x 轴垂直, $n \neq 0$, $\therefore m=-1$, $-x+ny=1$ 过 $(-1,0)$, 右移 2 个单位, 原直线过 $(1,0)$.

题目 3 已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, 设直线 l 不经过点 $P(0,1)$ 的直线交椭圆于 A, B 两点, 若直线 PA, PB 的斜率之和为 -1 , 证明: 直线 l 恒过定点.



【解析】(1) 当直线 l 的斜率存在时, 以点 P 为坐标原点, 建立新的直角坐标系 $(x'|y')$, 如图所示:



旧坐标 新坐标

$(x, y) \rightarrow (x', y')$

即 $(0, 1) \rightarrow (0, 0)$

所以 $\begin{cases} x'=x \\ y'=y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \rightarrow A \\ B \rightarrow B \end{cases}$, 则 $k_{PA}+k_{PB}=-1$, 即 $\frac{y_1-1}{x_1} + \frac{y_2-1}{x_2} = -1$,

在新坐标中转换为: $\frac{y'_1}{x'_1} + \frac{y'_2}{x'_2} = -1$, 即 $k'_1+k'_2=-1$.

设直线 l 方程为: $mx'+ny'=1$.

原方程: $x^2+4y^2=4$ 则转换到新坐标就成为: $x'^2+4(y'+1)^2=4$.

展开得: $x'^2+4y'^2+8y'=0$

构造齐次式: $x'^2+4y'^2+8y' (mx'+ny')=0$

整理为: $(4+8n)y'^2+8mx'y'+x'^2=0$

两边同时除以 x'^2 , 则 $(4+8n)k'^2+8mk'+1=0$

所以 $k'_1+k'_2=-\frac{8m}{4+8n}=-1$, 所以 $2m-2n=1 \Rightarrow m=n+\frac{1}{2}$ 代入 $mx'+ny'=1$,

整理得 $n(x'+y') + \frac{x'}{2} - 1 = 0$, 对于任意 n 都成立.

则 $\begin{cases} x'+y'=0 \\ \frac{x'}{2} - 1 = 0 \end{cases}$, 解之得 $\begin{cases} x'=2 \\ y'=-2 \end{cases}$, 故原坐标系地应点坐标为 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$, 所以过定点 $(2, -1)$;

(2) 当直线 l 的斜率不存在时, 设 $l: x=a$, 则 $A(a, \sqrt{1-\frac{a^2}{4}})$, $B(a, -\sqrt{1-\frac{a^2}{4}})$,

所以 $=\frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}-1}{a} - \frac{-\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}-1}{a} = 1 \Rightarrow a=2$, 直线 $l: x=2$, 过定点 $(2, -1)$.

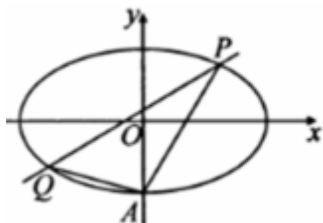
综上, 直线 l 恒过定点 $(2, -1)$

题型 4 定点不在原点的斜率问题

1 如图, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ (经过点 $A(0, -1)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$).

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 经过点 $(1, 1)$, 且斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 P, Q (均异于点 A), 证明: 直线 AP 与 AQ 斜率之和为 2.



【解析】解法 1: (I) 由题设知, $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=1$, 结合 $a^2=b^2+c^2$, 解得 $a=\sqrt{2}$, $\therefore \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(II) 证明: 由题意设直线 PQ 的方程为 $y=k(x-1)+1 (k \neq 0)$, 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$,

可得 $(1+2k^2)x^2-4k(k-1)x+2k(k-2)=0$, 由已知得 $(1, 1)$ 在椭圆外,

设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $x_1x_2 \neq 0$, 则 $x_1+x_2 = \frac{4k(k-1)}{1+2k^2}$, $x_1x_2 = \frac{2k(k-2)}{1+2k^2}$,

且 $\Delta = 16k^2(k-1)^2 - 8k(k-2)(1+2k^2) > 0$, 解得 $k > 0$ 或 $k < -2$.

则有直线 AP , AQ 的斜率之和为

$$k_{AP} + k_{AQ} = \frac{y_1+1}{x_1} + \frac{y_2+1}{x_2} = \frac{kx_1+2-k}{x_1} + \frac{kx_2+2-k}{x_2} = 2k + (2-k)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = 2k + (2-k) \cdot \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/886021040034010225>