

2023~2024 学年度第一学期期末重点校联考

高二数学

第 I 卷（共 45 分）

一、选择题（本题共 9 小题，在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的，请将正确答案的序号填涂到答题卡上。）

1. 直线 $y = -\sqrt{3}x + 1$ 的倾斜角是（ ）

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】C

【解析】

【详解】试题分析：由题意，得 $\tan \alpha = -\sqrt{3}$ ， $\alpha \in [0, \pi)$ ，所以 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ，

故选 C.

考点：直线的倾斜角.

2. 向量 $\vec{a} = (1, 2x, 3)$ ， $\vec{b} = (-2y, 1, 9)$ ，若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则（ ）

- A. $x = -\frac{1}{6}, y = \frac{2}{3}$ B. $x = \frac{1}{6}, y = -\frac{3}{2}$
C. $x = -\frac{1}{6}, y = \frac{3}{2}$ D. $x = \frac{1}{6}, y = \frac{3}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据空间向量共线定理结合线性运算的坐标表示即可得解.

【详解】因为 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，所以存在唯一实数 λ ，使得 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ，

即 $(1, 2x, 3) = \lambda(-2y, 1, 9)$ ，

$$\text{所以 } \begin{cases} 1 = -2\lambda y \\ 2x = \lambda \\ 3 = 9\lambda \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{6} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

故选：B.

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_5 = 12$, $a_{17} = 3$, 则 $a_{11} =$ ()

- A. 3 B. 6 C. 3 或 -3 D. 6 或 -6

【答案】B

【解析】

【分析】根据等比中项求出 $a_{11} = \pm 6$, 再根据等比数列的奇数项同号即可确定 a_{11} 的值.

【详解】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 0)$,

$$\because a_5 = 12, a_{17} = 3,$$

$$\therefore a_{11}^2 = a_5 \cdot a_{17} = 36,$$

$$\therefore a_{11} = \pm 6,$$

$$\text{又} \because a_{11} = a_5 \cdot q^6 = 12q^6 > 0,$$

$$\therefore a_{11} = 6.$$

故选: B.

4. 三角形的三个顶点为 $A(3, -2), B(3, 4), C(-5, 4)$, D 为 AC 中点, 则 BD 的长为 ()

- A. 3 B. 5 C. 9 D. 25

【答案】B

【解析】

【分析】由中点坐标公式求得 $D(-1, 1)$, 应用两点间的距离公式求 BD 的长.

【详解】由题设 $D(-1, 1)$, 则 $|BD| = \sqrt{(3+1)^2 + (4-1)^2} = 5$.

故选: B

5. 已知圆 $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 12x + 10y + 61 - a^2 = 0 (a > 0)$ 相交, 则 a 的取值范围为

()

- A. (7, 13) B. (7, 12)
C. (6, 11) D. (6, 10)

【答案】A

【解析】

【分析】 先分别求出两圆的圆心 C_1, C_2 的坐标及半径 r_1, r_2 ，再根据两圆相交可得 $|r_1 - r_2| < |C_1 C_2| < r_1 + r_2$ ，即可得解.

【详解】 圆 $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ 化为标准方程得 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$ ，

则其圆心 $C_1(-2, 1)$ ，半径 $r_1 = 3$ ，

圆 $x^2 + y^2 - 12x + 10y + 61 - a^2 = 0 (a > 0)$ 化为标准方程得 $(x-6)^2 + (y+5)^2 = a^2$ ，

则其圆心 $C_2(6, -5)$ ，半径 $r_2 = a$ ，

因为两圆相交，所以 $|r_1 - r_2| < |C_1 C_2| < r_1 + r_2$ ，

即 $|3 - a| < \sqrt{(-2-6)^2 + (1+5)^2} < 3 + a$ ，解得 $7 < a < 13$ ，

所以 a 的取值范围为 $(7, 13)$.

故选：A.

6. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{3} = 1 (m > 0)$ 的离心率为 2，右焦点为 F ，动点 P 在双曲线右支上，点 $A(0, 2)$ ，

则 $|PF| - |PA|$ 最大值为 ()

A. $\sqrt{5}$

B. $\sqrt{5} - 2$

C. $2\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{2} - 2$

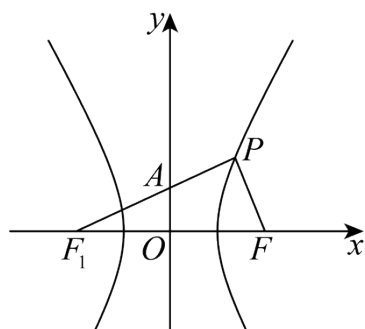
【答案】D

【解析】

【分析】 由双曲线的离心率得到 $m = 1$ ，左焦点 $F_1(-2, 0)$ ，根据双曲线的定义得到

$|PF| - |PA| = |PF_1| - |PA| - 2$ ，然后根据几何知识得到当 F_1, A, P 三点共线时 $|PF| - |PA|$ 最大，最后求最大值即可.

【详解】



因为双曲线的离心率为 2，所以 $\frac{\sqrt{m+3}}{\sqrt{m}} = 2$ ，解得 $m = 1$ ，

$\therefore a = 1$ ， $c = 2$ ，则左焦点 $F_1(-2, 0)$ ，

由双曲线的定义得 $|PF| - |PA| = |PF_1| - 2a - |PA| = |PF_1| - |PA| - 2$ ，

因为 $||PF_1| - |PA|| \leq |AF_1|$ ，即当 F_1 ， A ， P 三点共线时 $|PF| - |PA|$ 最大，

所以 $|PF| - |PA| \leq |AF_1| - 2 = \sqrt{(-2-0)^2 + (0-2)^2} - 2 = 2\sqrt{2} - 2$ ，

$|PF| - |PA|$ 最大值为 $2\sqrt{2} - 2$ 。

故选：D。

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = 2a_n + 3$ ，则 $a_9 =$ ()

A. $2^9 - 3$

B. $2^9 + 3$

C. $2^{10} - 3$

D. $2^{10} + 3$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意分析可知数列 $\{a_n + 3\}$ 是以首项为 4，公比为 2 的等比数列，结合等比数列通项公式运算求解。

【详解】因为 $a_{n+1} = 2a_n + 3$ ，则 $a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$ ，且 $a_1 + 3 = 4 \neq 0$ ，

可知数列 $\{a_n + 3\}$ 是以首项为 4，公比为 2 的等比数列，

所以 $a_n + 3 = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$ ，即 $a_n = 2^{n+1} - 3$ ，

所以 $a_9 = 2^{10} - 3$ 。

故选：C。

8. 已知 $a > b > 0$ ，椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，双曲线 C_2 的方程为 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ， C_1 与 C_2 的离心率之积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则 C_2 的渐近线方程为 ()

- A. $x \pm \sqrt{2}y = 0$ B. $\sqrt{2}x \pm y = 0$
C. $x \pm 2y = 0$ D. $x \pm y = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】求出椭圆与双曲线的离心率，根据离心率之积的值，然后推出 a, b 关系，即可求解双曲线的渐近线方程.

【详解】已知 $a > b > 0$ ，椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，则 C_1 的离心率为 $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ，

双曲线 C_2 的方程为 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ，则 C_2 的离心率为 $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ ，

$\because C_1$ 与 C_2 的离心率之积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\therefore \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\therefore a = \sqrt{2}b$ ，

则 C_2 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \sqrt{2}x$ ，即 $\sqrt{2}x \pm y = 0$ 。

故选：B.

9. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点， $AF \perp BF$ ，线段 AB

的中点为 M ，过点 M 作抛物线 C 的准线的垂线，垂足为 N ，则 $\frac{|AB|}{|MN|}$ 的最小值为 ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】由抛物线定义及勾股定理得到 $|AB| = \sqrt{m^2 + n^2}$ ， $|MN| = \frac{m+n}{2}$ ，由基本不等式求出最值.

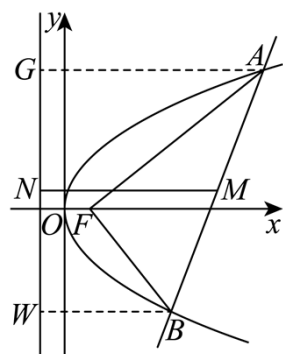
【详解】设 $|AF| = m, |BF| = n$ ，

因为 $AF \perp BF$ ，所以 $|AB| = \sqrt{m^2 + n^2}$ ，

过点 A, B 分别作 $AG, BW \perp$ 准线于点 G, W ，

由抛物线定义可知 $|AF| = |AG|, |BF| = |BW|$ ，

由梯形中位线可知 $|MN| = \frac{|AG| + |BW|}{2} = \frac{|AF| + |BF|}{2} = \frac{m + n}{2}$ ，



因为 $m^2 + n^2 \geq 2mn$ ，所以 $2(m^2 + n^2) \geq 2mn + m^2 + n^2 = (m + n)^2$ ，

当且仅当 $m = n$ 时，等号成立，

故 $|AB| = \sqrt{m^2 + n^2} \geq \frac{m + n}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|MN|$ ，

故 $\frac{|AB|}{|MN|} \geq \sqrt{2}$ ， $\frac{|AB|}{|MN|}$ 的最小值为 $\sqrt{2}$ 。

故选：B

第Ⅱ卷（非选择题）

二、填空题（本大题共 6 小题，请将正确的答案填写到答题纸上。）

10. 已知抛物线 $C: y^2 = -4x$ ，则抛物线 C 焦点坐标为_____。

【答案】 $(-1, 0)$

【解析】

【分析】根据抛物线方程确定开口方向和 p 的值即可写出焦点坐标。

【详解】根据抛物线方程可知抛物线的开口向左，且 $2p = 4$ ，即 $p = 2$ ，

$\therefore$ 焦点坐标为 $(-1, 0)$ 。

故答案为： $(-1, 0)$ 。

11. 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle BCA = 90^\circ$, D_1 , F_1 分别是 A_1B_1 , A_1C_1 的中点, $BC = CA = CC_1$, 则 AD_1 与 BF_1 所成角的余弦值是_____.

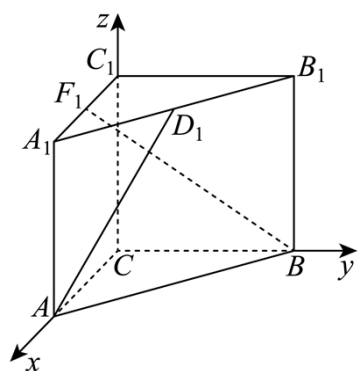
【答案】 $\frac{\sqrt{6}}{18}$

【解析】

【分析】 建立空间直角坐标系, 用向量法求异面直线所成的角.

【详解】 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$, 且 $\angle BCA = 90^\circ$,

∴ 以 C 为原点, 分别以 $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CC_1}$ 为 x 轴, y 轴, z 轴的正向, 建立如图所示的空间直角坐标系,



设 $BC = CA = CC_1 = 2$, 则 $A(2, 0, 0)$, $D_1(1, 1, 2)$, $B(0, 2, 0)$, $F_1(1, 0, 2)$,

∴ $\overrightarrow{AD_1} = (-1, 1, 2)$, $\overrightarrow{BF_1} = (1, -2, 2)$,

设直线 AD_1 与 BF_1 成的角为 θ $\left(\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$,

则 $\cos \theta = \left| \cos \overrightarrow{AD_1}, \overrightarrow{BF_1} \right| = \frac{|-1 - 2 + 4|}{\sqrt{6} \cdot 3} = \frac{\sqrt{6}}{18}$,

∴ 直线 AD_1 与 BF_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{18}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{6}}{18}$.

12. 已知等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n , T_n , 若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n}{2n+5}$, 则 $\frac{a_5}{b_5} =$ _____.

【答案】 $\frac{27}{23}$

【解析】

【分析】由已知关系，结合等差数列前 n 项和公式、等差中项性质即可求结果.

【详解】由 $\frac{S_9}{T_9} = \frac{\frac{9(a_1+a_9)}{2}}{\frac{9(b_1+b_9)}{2}} = \frac{9a_5}{9b_5} = \frac{3 \times 9}{2 \times 9 + 5} = \frac{27}{23}$ ，即 $\frac{a_5}{b_5} = \frac{27}{23}$.

故答案为: $\frac{27}{23}$

13. 若过点 $(0,1)$ 的直线 l 和圆 $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ 交于 A, B 两点，若弦长 $|AB| = 2\sqrt{3}$ ，则直线 l 的方程为_____.

【答案】 $x = 0$ 或 $3x - 4y + 4 = 0$

【解析】

【分析】先根据圆的弦长公式求出圆心到直线的距离，再分直线斜率是否存在讨论，结合点到直线的距离公式即可得解.

【详解】圆 $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ 化为标准方程得 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$ ，

则其圆心为 $(-1, -1)$ ，半径 $r = 2$ ，

设圆心 $(-1, -1)$ 到直线 l 的距离为 d ，

则 $2\sqrt{4-d^2} = 2\sqrt{3}$ ，解得 $d = 1$ ，

当直线 l 的斜率不存在时，方程为 $x = 0$ ，

此时圆心 $(-1, -1)$ 到直线 l 的距离为 1，符合题意；

当直线 l 的斜率存在时，设其方程为 $y = kx + 1$ ，即 $kx - y + 1 = 0$ ，

则 $\frac{|-k+1+1|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$ ，解得 $k = \frac{3}{4}$ ，

所以直线 l 的方程为 $3x - 4y + 4 = 0$ ，

综上所述直线 l 的方程为 $x = 0$ 或 $3x - 4y + 4 = 0$.

故答案为: $x = 0$ 或 $3x - 4y + 4 = 0$.

14. 在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_3 = 7$ ，若数列 $\log_2(a_n + 1)$ 为等差数列，则

$$S_n = \frac{1}{a_2 - a_1} + \frac{1}{a_3 - a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n+1} - a_n} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

【解析】

【分析】 设 $b_n = \log_2(a_n + 1)$ ，根据 $a_1 = 1$ ， $a_3 = 7$ 求出 b_1 和 b_3 ，得到 $\{b_n\}$ 的通项公式，进而得到 $\{a_n\}$ 的通项公式，最后利用等比数列求和公式求和即可。

【详解】 设 $b_n = \log_2(a_n + 1)$ ，则 $\{b_n\}$ 为等差数列，设 $\{b_n\}$ 的公差为 d ，

$$\because a_1 = 1, a_3 = 7, \therefore b_1 = \log_2(a_1 + 1) = 1, b_3 = \log_2(a_3 + 1) = 3,$$

$$\text{则 } 2d = b_3 - b_1 = 2, \therefore d = 1, \therefore b_n = n,$$

$$\text{则 } n = \log_2(a_n + 1), \therefore a_n = 2^n - 1,$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1} - a_n} = \frac{1}{(2^{n+1} - 1) - (2^n - 1)} = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\therefore S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

故答案为： $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

15. 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点 $F(-c, 0)$ 作圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的切线，切点为 M . 直线 FM

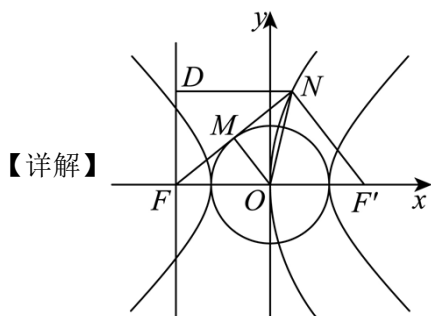
交抛物线 $y^2 = 4cx$ 于点 N ，若 $\vec{OF} + \vec{ON} = 2\vec{OM}$ (O 为坐标原点)，则双曲线的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】 先设双曲线的右焦点为 F' ，则 F' 的坐标为 $(c, 0)$ ，因为抛物线为 $y^2 = 4cx$ ，所以 F' 为抛物线的焦点， O 为 FF' 的中点，又可得 M 为 FN 的中点，所以 OM 为 $\triangle FNF'$ 的中位线，得到 $|NF| = 2b$ ，再设

$N(x, y)$, 过点 F 作 x 轴的垂线, 由勾股定理得出关于 a 和 c 的关系式, 最后求得离心率.



设双曲线的右焦点为 F' , 则 F' 的坐标为 $(c, 0)$,

Q 抛物线为 $y^2 = 4cx$, $\therefore F'$ 为抛物线的焦点, O 为 FF' 的中点,

Q $\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OM}$, $\therefore M$ 为 FN 的中点, $\therefore OM \parallel NF'$,

Q $|OM| = a$, $\therefore |NF'| = 2a$,

Q NF 切圆 O 于 M , $\therefore OM \perp NF$, $\therefore NF' \perp NF$,

Q $|FF'| = 2c$, $\therefore |NF| = 2b$,

过点 F 作 x 轴的垂线, 即抛物线的准线 $x = -c$,

根据抛物线的定义知, 点 N 到 $x = -c$ 的距离为 $|DN| = 2a$,

设 $N(x, y)$, 则 $x + c = 2a$, $\therefore x = 2a - c$,

在 $\text{Rt}\triangle NDF$ 中, $|DF|^2 + |DN|^2 = |NF|^2$,

即 $y^2 + 4a^2 = 4b^2$, $\therefore 4c(2a - c) + 4a^2 = 4(c^2 - a^2)$,

$\therefore e^2 - e - 1 = 0$, Q $e > 1$, $\therefore e = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

故答案为: $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

三、解答题 (本大题共 5 小题, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是直角梯形, 其中 $AD \parallel BC$,

$AB \perp AD$, $PA = 4$, $AB = AD = \frac{1}{2}BC = 2$, E 为棱 BC 上的点, 且 $BE = \frac{1}{4}BC$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/886022243024011030>