

新疆维吾尔自治区喀什第二中学 2023-2024 学年数学高三上期末教学质量检测模拟试 题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = \ln x + \ln(3-x)$ ，则 ()

- A. 函数 $f(x)$ 在 $(0,3)$ 上单调递增 B. 函数 $f(x)$ 在 $(0,3)$ 上单调递减
- C. 函数 $f(x)$ 图像关于 $x = \frac{3}{2}$ 对称 D. 函数 $f(x)$ 图像关于 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 对称

2. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ ，若函数 $y = f(x+2)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 对任意 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$)，都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ ，若 $f(a) \leq f(3a+1)$ ，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ B. $[-2, -1]$ C. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ D. $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

3. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， O 为对角线的交点，点 P 为平行四边形外一点，且 $AP \perp OB$ ， $BP \perp OA$ ，则 $\overrightarrow{DP} =$ ()



- A. $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DC}$ B. $\frac{3}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$
- C. $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ D. $\frac{3}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

4. 下列命题为真命题的个数是 () (其中 π ， e 为无理数)

- ① $\sqrt{e} > \frac{3}{2}$ ；② $\ln \pi < \frac{2}{3}$ ；③ $\ln 3 < \frac{3}{e}$.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x, & x > 0 \\ x^2 + \frac{3}{2}x, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图像上有且仅有四个不同的关于直线 $y = -1$ 对称的点在 $g(x) = kx - 1$ 的图像

上, 则 k 的取值范围是()

- A. $(\frac{1}{3}, \frac{3}{4})$ B. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ C. $(\frac{1}{3}, 1)$ D. $(\frac{1}{2}, 1)$

6. 已知 F_1 、 F_2 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点, 过 F_1 的直线 l 交 C 于 A 、 B 两点, O

为坐标原点, 若 $OA \perp BF_1$, $|AF_2| = |BF_2|$, 则 C 的离心率为 ()

- A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{6}$ D. $\sqrt{7}$

7. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的所有三个元素的子集记为 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n, n \in N^*$. 记 b_i 为集合 B_i 中的最大元素,

则 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n =$ ()

- A. 45 B. 105 C. 150 D. 210

8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的焦距为 $2c$. 点 A 为双曲线 C 的右顶点, 若点 A 到双曲线 C 的渐近

线的距离为 $\frac{1}{2}c$, 则双曲线 C 的离心率是 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

9. 已知不同直线 l 、 m 与不同平面 α 、 β , 且 $l \subset \alpha$, $m \subset \beta$, 则下列说法中正确的是 ()

A. 若 $\alpha // \beta$, 则 $l // m$ B. 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $l \perp m$

C. 若 $l \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$ D. 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $m \perp \alpha$

10. 已知向量 $\vec{a} = (-1, 2)$, $\vec{b} = (x, x-1)$, 若 $(\vec{b} - 2\vec{a}) // \vec{a}$, 则 $x =$ ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 1 D. 3

11. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 、 Q 分别为 AB 、 AD 的中点, 过点 D 作平面 α 使 $B_1P //$ 平面 α , $A_1Q //$

平面 α 若直线 $B_1D_1 \cap$ 平面 $\alpha = M$, 则 $\frac{MD_1}{MB_1}$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

12. 设 M 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上任意一点, N 为 AM 的中点, 若 $\vec{AN} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 过直线 $y = kx + 7$ 上一动点 $M(x, y)$ 向圆 $C: x^2 + y^2 + 2y = 0$ 引两条切线 MA, MB ，切点为 A, B ，若 $k \in [1, 4]$ ，则四边形 $MACB$ 的最小面积 $S \in [\sqrt{3}, \sqrt{7}]$ 的概率为_____.

14. 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中， S_n 为其前 n 项和，若 $a_3 = 1$ ，且 $S_5 = S_2 + 2$ ，则公比 q 的值为_____.

15. 已知双曲线的一条渐近线为 $y = 2x$ ，且经过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点，则双曲线的标准方程为_____.

16. 设集合 $A = \{1, 3\}$ ， $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ，则 $A \cap B =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l_1 的倾斜角为 30° ，且经过点 $A(2, 1)$ 。以坐标原点 O 为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 $l_2: \rho \cos \theta = 3$ ，从原点 O 作射线交 l_2 于点 M ，点 N 为射线 OM 上的点，满足 $|OM| \cdot |ON| = 12$ ，记点 N 的轨迹为曲线 C 。

(I) 求出直线 l_1 的参数方程和曲线 C 的直角坐标方程；

(II) 设直线 l_1 与曲线 C 交于 P, Q 两点，求 $|AP| \cdot |AQ|$ 的值。

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = x + a(1 - e^x)$ ， $a \in R$ 。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 当 $a \geq 1$ 时，证明： $f(x) - a \ln a + a \leq 1$ 。

19. (12 分) 设函数 $f(x) = \ln x - ax$ ， $a \in R$ ， $a \neq 0$ 。

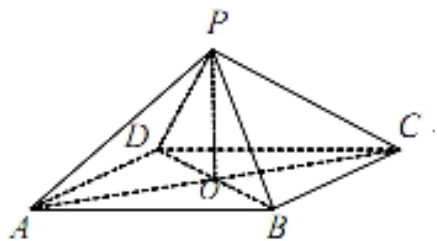
(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若函数 $f(x) = 0$ 有两个零点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)。

(i) 求 a 的取值范围；

(ii) 求证： $x_1 \cdot x_2$ 随着 $\frac{x_2}{x_1}$ 的增大而增大。

20. (12 分) 如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面正方形的对角线 AC, BD 交于点 O 且 $OP = \frac{1}{2} AB$ 。



(1) 求直线 BP 与平面 PCD 所成角的正弦值;

(2) 求锐二面角 $B-PD-C$ 的大小.

21. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + 2n - 1 (n \geq 2)$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = a_n + 2n + 3$.

(I) 求证数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(II) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

22. (10 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \neq 0, a_1 = 1$ 且 $a_{n+1} - a_n + 3a_{n+1}a_n = 0$.

(1) 证明: 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n \cdot a_{n+1}\}$ 的前 n 项和 S_n .

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

依题意可得 $f(3-x) = f(x)$, 即函数图像关于 $x = \frac{3}{2}$ 对称, 再求出函数的导函数, 即可判断函数的单调性;

【详解】

解: 由 $f(3-x) = \ln(3-x) + \ln[3-(3-x)] = \ln(3-x) + \ln x = f(x)$,

$\therefore f(3-x) = f(x)$, 所以函数图像关于 $x = \frac{3}{2}$ 对称,

又 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3-x} = \frac{2x-3}{x(x-3)}$, $f(x)$ 在 $(0,3)$ 上不单调.

故正确的只有 C,

故选: C

【点睛】

本题考查函数的对称性的判定, 利用导数判断函数的单调性, 属于基础题.

2、A

【解析】

根据题意, 分析可得函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称且在 $[2, +\infty)$ 上为减函数, 则不等式 $f(a) \leq f(3a+1)$ 等价于

$|a-2| \geq |3a-1|$, 解得 a 的取值范围, 即可得答案.

【详解】

解: 因为函数 $y=f(x+2)$ 为偶函数,

所以函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称,

因为 $f(x)$ 对任意 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上为减函数,

则 $f(a) \leq f(3a+1) \Leftrightarrow f(|a-2|) \leq f(|3a+1-2|) \Leftrightarrow |a-2| \geq |3a-1|$,

解得: $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{4}$.

即实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

故选: A.

【点睛】

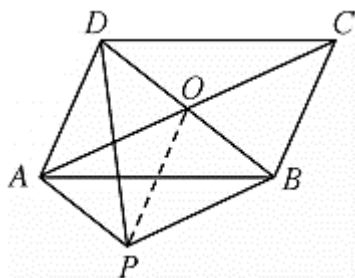
本题考查函数的对称性与单调性的综合应用, 涉及不等式的解法, 属于综合题.

3、D

【解析】

连接 OP , 根据题目, 证明出四边形 $APOD$ 为平行四边形, 然后, 利用向量的线性运算即可求出答案

【详解】



连接 OP ，由 $AP \parallel OB$ ， $BP \parallel OA$ 知，四边形 $APBO$ 为平行四边形，可得四边形 $APOD$ 为平行四边形，所以

$$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}.$$

【点睛】

本题考查向量的线性运算问题，属于基础题

4、C

【解析】

对于①中，根据指数幂的运算性质和不等式的性质，可判定值正确的；对于②中，构造新函数

$f(x) = \ln x - \frac{2}{3}, x > 0$ ，利用导数得到函数为单调递增函数，进而得到 $f(\pi) > f(e)$ ，即可判定是错误的；对于③中，

构造新函数 $f(x) = e \ln x - x, x > 0$ ，利用导数求得函数的最大值为 $f(e) = 0$ ，进而得到 $f(3) < 0$ ，即可判定是正确的。

【详解】

由题意，对于①中，由 $(\sqrt{e})^2 = e, (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} = 2.25$ ，可得 $e > 2.25$ ，根据不等式的性质，可得 $\sqrt{e} > \frac{3}{2}$ 成立，所以是正确的；

对于②中，设函数 $f(x) = \ln x - \frac{2}{3}, x > 0$ ，则 $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ ，所以函数为单调递增函数，

因为 $\pi > e$ ，则 $f(\pi) > f(e)$

又由 $f(e) = \ln e - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} > 0$ ，所以 $f(\pi) > 0$ ，即 $\ln \pi > \frac{2}{3}$ ，所以②不正确；

对于③中，设函数 $f(x) = e \ln x - x, x > 0$ ，则 $f'(x) = \frac{e}{x} - 1 = \frac{e-x}{x}$ ，

当 $x \in (0, e)$ 时， $f'(x) > 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递增，

当 $x \in (e, +\infty)$ 时， $f'(x) < 0$ ，函数 $f(x)$ 单调递减，

所以当 $x = e$ 时，函数取得最大值，最大值为 $f(e) = e \ln e - e = 0$ ，

所以 $f(3) = e \ln 3 - 3 < 0$ ，即 $e \ln 3 < 3$ ，即 $\ln 3 < \frac{3}{e}$ ，所以是正确的。

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了不等式的性质，以及导数在函数中的综合应用，其中解答中根据题意，合理构造新函数，利用导数求得函数的单调性和最值是解答的关键，着重考查了构造思想，以及推理与运算能力，属于中档试题.

5、D

【解析】

根据对称关系可将问题转化为 $f(x)$ 与 $y = -kx - 1$ 有且仅有四个不同的交点；利用导数研究 $f(x)$ 的单调性从而得到 $f(x)$ 的图象；由直线 $y = -kx - 1$ 恒过定点 $A(0, -1)$ ，通过数形结合的方式可确定 $-k \in (k_{AC}, k_{AB})$ ；利用过某一点曲线切线斜率的求解方法可求得 k_{AC} 和 k_{AB} ，进而得到结果.

【详解】

$g(x) = kx - 1$ 关于直线 $y = -1$ 对称的直线方程为： $y = -kx - 1$

$\therefore$ 原题等价于 $f(x)$ 与 $y = -kx - 1$ 有且仅有四个不同的交点

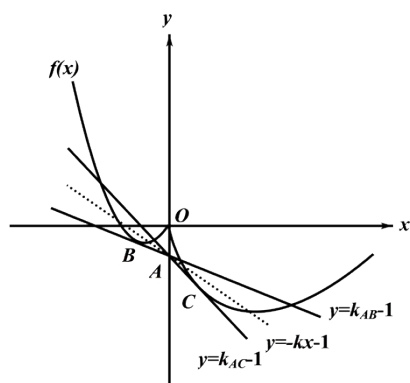
由 $y = -kx - 1$ 可知，直线恒过点 $A(0, -1)$

当 $x > 0$ 时， $f'(x) = \ln x + 1 - 2 = \ln x - 1$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递减；在 $(e, +\infty)$ 上单调递增

由此可得 $f(x)$ 图象如下图所示：

其中 AB 、 AC 为过 A 点的曲线的两条切线，切点分别为 B, C



由图象可知，当 $-k \in (k_{AC}, k_{AB})$ 时， $f(x)$ 与 $y = -kx - 1$ 有且仅有四个不同的交点

设 $C(m, m \ln m - 2m)$ ， $m > 0$ ， 则 $k_{AC} = \ln m - 1 = \frac{m \ln m - 2m + 1}{m - 0}$ ， 解得： $m = 1$

$\therefore k_{AC} = -1$

设 $B\left(n, n^2 + \frac{3}{2}n\right)$, $n \leq 0$, 则 $k_{AB} = 2n + \frac{3}{2} = \frac{n^2 + \frac{3}{2}n + 1}{n - 0}$, 解得: $n = -1$

$$\therefore k_{AB} = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore -k \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right), \text{ 则 } k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

本题正确选项: D

【点睛】

本题考查根据直线与曲线交点个数确定参数范围的问题; 涉及到过某一点的曲线切线斜率的求解问题; 解题关键是能够通过对称性将问题转化为直线与曲线交点个数的问题, 通过确定直线恒过的定点, 采用数形结合的方式来进行求解.

6、D

【解析】

作出图象, 取 AB 中点 E , 连接 EF_2 , 设 $F_1A = x$, 根据双曲线定义可得 $x = 2a$, 再由勾股定理可得到 $c^2 = 7a^2$, 进而得到 e 的值

【详解】

解: 取 AB 中点 E , 连接 EF_2 , 则由已知可得 $BF_1 \perp EF_2$, $F_1A = AE = EB$,

设 $F_1A = x$, 则由双曲线定义可得 $AF_2 = 2a + x$, $BF_1 - BF_2 = 3x - 2a - x = 2a$,

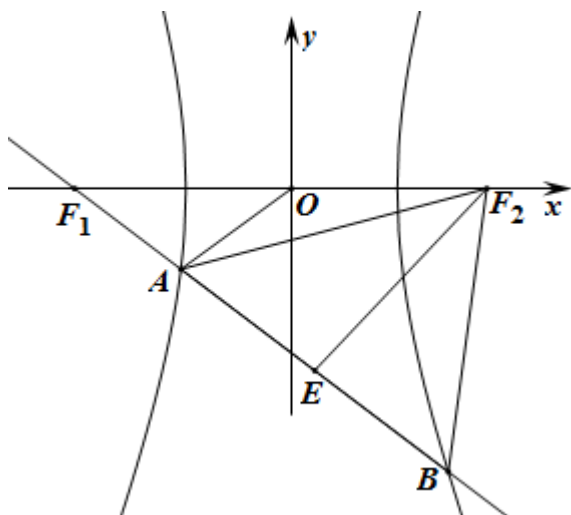
所以 $x = 2a$, 则 $EF_2 = 2\sqrt{3}a$,

由勾股定理可得 $(4a)^2 + (2\sqrt{3}a)^2 = (2c)^2$,

所以 $c^2 = 7a^2$,

$$\text{则 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{7}$$

故选: D.



【点睛】

本题考查双曲线定义的应用，考查离心率的求法，数形结合思想，属于中档题．对于圆锥曲线中求离心率的问题，关键是列出含有 a, b, c 中两个量的方程，有时还要结合椭圆、双曲线的定义对方程进行整理，从而求出离心率．

7、B

【解析】

分类讨论，分别求出最大元素为 3,4,5,6 的三个元素子集的个数，即可得解．

【详解】

集合 M 含有 3 个元素的子集共有 $C_6^3 = 20$ ，所以 $k = 20$ ．

在集合 $B_i (i = 1, 2, 3, \dots, k)$ 中：

最大元素为 3 的集合有 $C_2^2 = 1$ 个；

最大元素为 4 的集合有 $C_3^2 = 3$ ；

最大元素为 5 的集合有 $C_4^2 = 6$ ；

最大元素为 6 的集合有 $C_5^2 = 10$ ；

所以 $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 3 \times 1 + 4 \times 3 + 5 \times 6 + 6 \times 10 = 105$ ．

故选：B．

【点睛】

此题考查集合相关的新定义问题，其本质在于弄清计数原理，分类讨论，分别求解．

8、A

【解析】

由点到直线距离公式建立 a, b, c 的等式，变形后可求得离心率．

【详解】

由题意 $A(a, 0)$ ，一条渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$ ，即 $bx - ay = 0$ ， $\therefore d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{2}c$ ，

$\frac{a^2 b^2}{c^2} = \frac{1}{4}c^2$ ，即 $\frac{a^2(c^2 - a^2)}{c^2} = \frac{1}{4}c^2$ ， $e^4 - 4e^2 + 4 = 0$ ， $e = \sqrt{2}$ ．

故选：A．

【点睛】

本题考查求双曲线的离心率，掌握渐近线方程与点到直线距离公式是解题基础．

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/886134151011010105>