

第四章 概率与统计

4.2 随机变量

4.2.3 二项分布与超几何分布

知识梳理

一.独立重复试验

在相同条件下重复做 n 次伯努利试验时，人们总是约定这 n 次试验是互相独立的，此时这 n 次伯努利试验也常称为 n 次独立重复试验.

二.二项分布

一般地，如果一次伯努利试验中，出现“成功”的概率为 p ，记 $q=1-p$ ，且 n 次独立重复试验中出现“成功”的次数为 X ，则 X 的取值范围是 $\{0, 1, 2, \dots, k, \dots, n\}$ ，而且 $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ， $k=0, 1, 2, \dots, n$ ， X 的分布列为：

	0	1	L	k	L	n
P	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	L	$C_n^k p^k q^{n-k}$	L	$C_n^n p^n q^0$

X 的分布列第二行中的概率值都是二项展开式中对应项的值，

$(p+q)^n = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + \text{L} + C_n^k p^k q^{n-k} + \text{L} + C_n^n p^n q^0$ 因此称 X 服从参数为 n, p 的二项分布，记作 $X \sim B(n, p)$

三. 超几何分布

1.定义:一般地，若有总数为 N 件的甲、乙两类物品，其中甲类有 M 件($M < N$)，从所有物品中随机取出 n 件($n \leq N$)，则这 n 件中所含甲类物品数 X 是一个离散型随机变量， X 能取不小于 t 且不大于 s 的所有自然数，其中 s 是 M 与 n 中的较小者， t 在 n 不大于乙类物品件数(即 $n \leq N-M$)时取 0，否则 t

取 n 减乙类物品件数之差(即 $t=n-(N-M)$)，而且 $P(X=k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ ， $k=t, t+1, \dots, s$ ，这里的 X 称

为服从参数 N, n, M 的超几何分布，记作 $X \sim H(N, n, M)$.

如果 $X \sim H(N, n, M)$ 且 $n+M-N \leq 0$, 则 X 能取所有不大于 s 的自然数, 此时 X 的分布列如下表:

	0	1	L	k	L	s
P	$\frac{C_M^0 C_{N-M}^n}{C_M^n}$	$\frac{C_M^1 C_{N-M}^{n-1}}{C_M^n}$	L	$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_M^n}$	L	$\frac{C_M^s C_{N-M}^{n-s}}{C_M^n}$

常见考点

考点一 二项分布的概率

典例 1. 已知随机变量 X 服从二项分布 $X \sim B(4, \frac{1}{2})$, 则 $P(X=2) = (\quad)$

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{3}{16}$

【答案】C

【分析】

利用二项分布概率计算公式, 计算出正确选项.

【详解】

$$P(X=2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}.$$

故选: C

变式 1-1. 设 $X \sim B(4, p)$, 其中 $0 < p < \frac{1}{2}$, 且 $P(X=2) = \frac{8}{27}$, 那么 $P(X=1) = (\quad)$

- A. $\frac{8}{81}$ B. $\frac{16}{81}$ C. $\frac{8}{27}$ D. $\frac{32}{81}$

【答案】D

【分析】

根据二项分布概率公式求得 $p = \frac{1}{3}$, 再根据二项分布概率公式求解即可.

【详解】

解: 根据题意得 $P(X=2) = C_4^2 p^2 (1-p)^2 = \frac{8}{27}$, 即 $p^2 (1-p)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$,

解得 $p = \frac{1}{3}$ 或 $p = \frac{2}{3}$ (舍去),

故 $P(X=1) = C_4^1 p(1-p)^3 = \frac{32}{81}$.

故选: D

变式 1-2. 设随机变量 $X \sim B(2, p)$, 若 $P(X \geq 1) = \frac{5}{9}$, 则 p 的值为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. D. $\frac{4}{9}$

【答案】A

【分析】

利用二项分布求解即可

【详解】

$X \sim B(2, p)$

$$\therefore P(X=0) = (1-p)^2$$

$$\therefore P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (1-p)^2 = \frac{5}{9}$$

解得 $p = \frac{1}{3}$

故选: A

变式 1-3. 有 8 件产品, 其中 4 件是次品, 从中有放回地取 3 次 (每次 1 件), 若 X 表示取得次品的次数, 则 $P(X \leq 2) =$

- A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{13}{14}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{7}{8}$

【答案】D

【分析】

首先把取一次取得次品的概率算出来, 再根据离散型随机变量的概率即可算出.

【详解】

因为是有放回地取产品, 所以每次取产品取到次品的概率为 $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. 从中取 3 次, 为取得次品的次数, 则

$$X: B\left(3, \frac{1}{2}\right),$$

$$P(X \leq 2) = P(X=2) + P(X=1) + P(X=0) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} + C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}, \text{选择 D 答案.}$$

【点睛】

本题考查离散型随机变量的概率,解题时要注意二项分布公式的灵活运用.属于基础题.

考点二 二项分布的应用

典例 2. 某盏吊灯上并联着3个灯泡,如果在某段时间内每个灯泡能正常照明的概率都是0.7.设能正常照明的灯泡个数为,求:

(1) 能正常照明的灯泡个数的分布列;

(2) 这段时间内吊灯能照明的概率.

【答案】(1) 分布列见解析;(2) 0.973.

【分析】

(1) 由题意可知 $X \sim B(3, 0.7)$, 利用二项分布可得出随机变量的分布列;

(2) 利用独立事件的概率乘法公式和对立事件的概率公式可求得所求事件的概率.

【详解】

(1) 由题意可知 $X \sim B(3, 0.7)$, 所以, $P(X=0)=0.3^3=0.027$,

$$P(X=1)=C_3^1 \times 0.7 \times 0.3^2 = 0.189, \quad P(X=2)=C_3^2 \times 0.7^2 \times 0.3 = 0.441,$$

$$P(X=3)=0.7^3 = 0.343,$$

所以, 随机变量的分布列如下表所示:

	0	1	2	3
P	0.027	0.189	0.441	0.343

(2) 这段时间内吊灯能照明的概率为 $1-0.3^3=0.973$.

变式 2-1. 已知计算机网络的服务器采用的时“一用两备”(即一台正常设备, 两台备用设备)的配置, 这三台设备中, 只要有一台能正常工作, 计算机网络就不会断掉, 如果三台设备各自能正常工作的概率都为 0.9, 它们之间互不影响, 其中能正常工作的设备数为 X .

(1) 写出 X 的分布列;

(2) 求出计算机网络不会断掉的概率.

【答案】

(1) 分布列见解析

(2) 0.999

【分析】

(1) 根据题意，得到三台设备正常工作的设备数 $X: B(3,0.9)$ ，结合二项分布，即可求解；

(2) 根据题意，要求能正常工作的设备至少有一台，结合对立事件的概率，即可求解.

(1)

解：由题意，台设备各自能正常工作的概率都为 0.9，它们之间互不影响，

可得三台设备正常工作的设备数服从二项分布，即 $X: B(3,0.9)$ ，

可得 $P(X=0)=C_3^0 \times 0.9^0 \times (1-0.9)^3 = 0.001$ ， $P(X=1)=C_3^1 \times 0.9^1 \times (1-0.9)^2 = 0.027$ ，

$P(X=2)=C_3^2 \times 0.9^2 \times (1-0.9)^1 = 0.243$ ， $P(X=3)=C_3^3 \times 0.9^3 \times (1-0.9)^0 = 0.729$ ，

从而 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	0.001	0.027	0.243	0.729

(2) 解：要使得计算机网络不会断掉，也就是要求能正常工作的设备至少有一台，即 $X \geq 1$ ，

因此所求概率为 $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.001 = 0.999$.

变式 2-2. 某单位举办 2020 年杭州亚运会知识宣传活动，进行现场抽奖，盒中装有 9 张大小相同的精美卡片，卡片上分别印有“亚运会会徽”或“五环”图案；抽奖规则是：参加者从盒中抽取卡片两张，若抽到两张都是“五环”卡即可获奖，否则，均为不获奖.卡片用后放回盒子，下一位参加者继续重复进行.

(I) 活动开始后，一位参加者问：盒中有几张“五环”卡？主持人答：我只知道，从盒中抽取两张都是“会徽”卡的概率是 $\frac{5}{18}$ ，求抽奖者获奖的概率；

(II) 现有甲、乙、丙、丁四人依次抽奖，用 ξ 表示获奖的人数，求 ξ 的分布列.

【答案】(I) $\frac{1}{6}$; (II) 见解析

【分析】

(I) 设“会徽”卡有 n 张，利用从盒中抽取两张都是“会徽”卡的概率是 $\frac{5}{18}$ ，可以求出 n ，也可以求出“五环”图案卡片的张数，然后求出抽奖者获奖的概率；

(II) 由题意可知 ξ 服从二项分布，根据二项分布的概率公式，列出 ξ 的分布列，.

【详解】

(I) 设“会徽”卡有 n 张，因为从盒中抽取两张都是“会徽”卡的概率是 $\frac{5}{18}$ ，所以有 $\frac{C_n^2}{C_9^2} = \frac{5}{18}$ ， $n=5$ ，所以“五环”图案卡片的张数为4，故抽奖者获奖的概率为 $\frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{1}{6}$ ；

(II) 由题意可知本题中的离散型随机变量 ξ 服从二项分布，即 $\xi \sim B\left(4, \frac{1}{6}\right)$ ，

$$P(\xi=0)=C_4^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{625}{1296}, \quad P(\xi=1)=C_4^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{250}{648},$$

$$P(\xi=2)=C_4^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{216}, \quad P(\xi=3)=C_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{5}{324},$$

$$P(\xi=4)=C_4^4\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{1296}, \quad \xi \text{ 的分布列为:}$$

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{625}{1296}$	$\frac{250}{648}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{324}$	

【点睛】

本题考查了古典概型、离散型随机变量分布列、以及期望，由题意分析出 ξ 服从二项分布是解题的关键.

变式 2-3. 很多新手拿到驾驶证后开车上路，如果不遵守交通规则，将会面临扣分的处罚，为了让广大新手了解驾驶证扣分新规定，某市交警部门结合机动车驾驶人有违法行为一次记 12 分、6 分、3 分、2 分的新规定设置了一份试卷（满分 100 分），发放给新手解答，从中随机抽取了 12 名新手的

成绩，成绩以茎叶图表示如图所示，并规定成绩低于 95 分的为不合格，需要加强学习，成绩不低于 95 分的为合格.

(1) 求这 12 名新手的平均成绩与方差；

(2) 将频率视为概率，根据样本估计总体的思想，若从该市新手中任选 4 名参加座谈会，用 X 表示成绩合格的人数，求 X 的分布列.

【答案】

(1) 平均数 92 分，方差 $\frac{320}{3}$

(2) 分布列答案见解析，

【分析】

(1) 先读出 12 个数据，直接套公式求平均值和方差；

(2) X 服从二项分布，直接求出分布列.

(1)

这 12 名新手的成绩分别为 68, 72, 88, 95, 95, 96, 96, 97, 98, 99, 100, 100，则平均成绩为，

$$\begin{aligned} \text{其方差为} & \frac{1}{12} \left[(92-68)^2 + (92-72)^2 + (92-88)^2 + 2 \times (92-95)^2 + 2 \times (92-96)^2 + (92-97)^2 + \right. \\ & \left. (92-98)^2 + (92-99)^2 + 2 \times (92-100)^2 \right] \\ & = \frac{1}{12} (24^2 + 20^2 + 4^2 + 2 \times 3^2 + 2 \times 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 2 \times 8^2) \\ & = \frac{320}{3}. \end{aligned}$$

(2)

抽取的 12 名新手中，成绩低于 95 分的有 3 个，成绩不低于 95 分的有 9 个，故抽取的 12 名新手中合格的频率为 $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ ，故从该市新手中任选 1 名合格的概率为 $\frac{3}{4}$.

X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4, 则 $P(X=0)=C_4^0\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(1-\frac{3}{4}\right)^4=\frac{1}{256}$,

$$P(X=1)=C_4^1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(1-\frac{3}{4}\right)^3=\frac{12}{256}=\frac{3}{64}, \quad P(X=2)=C_4^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(1-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{54}{256}=\frac{27}{128},$$

$$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(1-\frac{3}{4}\right)^1=\frac{108}{256}=\frac{27}{64}, \quad P(X=4)=C_4^4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(1-\frac{3}{4}\right)^0=\frac{81}{256}.$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{256}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{81}{256}$

考点三 超几何分布的概率

典例 3. 50 个乒乓球中, 合格品为 45 个, 次品为 5 个, 从这 50 个乒乓球中任取 3 个, 出现次品的概率是 ()

- A. $\frac{C_5^2}{C_{50}^3}$ B. $\frac{C_5^1+C_5^2+C_5^3}{C_{50}^3}$ C. $1-\frac{C_{45}^3}{C_{50}^3}$ D. $\frac{C_5^1C_{45}^2}{C_{50}^3}$

【答案】C

【分析】

先求都是合格品的概率, 再根据对立事件的概率求解即可.

【详解】

出现次品, 可以是一个, 两个或是三个, 与其对立的是都是合格品,

这 50 个乒乓球中任取 3 个, 出现都是合格品的概率是 $\frac{C_{45}^3}{C_{50}^3}$,

故有次品的概率是 $1-\frac{C_{45}^3}{C_{50}^3}$.

故选: C

变式 3-1. 某校从学生会中的 10 名女生干部与 5 名男生干部中随机选取 6 名学生干部组成 “

文明校园督察队”，则组成 4 女 2 男的 “文明校园督察队” 的概率为（ ）

A. $\frac{C_{15}^6}{A_{15}^6}$

B. $\frac{C_{10}^3 C_5^3}{C_{15}^6}$

C. $\frac{C_{10}^4 C_5^2}{C_{15}^6}$

D. $\frac{C_{10}^4 A_5^2}{A_{15}^6}$

【答案】 C

【分析】

利用超几何概率计算公式即可求解.

【详解】

组成 4 女 2 男的 “文明校园督察队” 的概率为 $P = \frac{C_{10}^4 C_5^2}{C_{15}^6}$.

故选：C

变式 3-2. 盒中有 10 只螺丝钉，其中有 2 只是坏的，现从盒中随机地抽取 4 只，那么恰好有 2 只是坏的的概率为（ ）

A. $\frac{1}{210}$

B. $\frac{1}{45}$

C. $\frac{2}{15}$

D. $\frac{1}{15}$

【答案】 C

【分析】

利用超几何分布概率公式计算概率.

【详解】

解: 设 $X=k$ 表示取出的螺丝钉恰有 k 只是坏的, 则 $P(X=k) = \frac{C_2^k C_8^{4-k}}{C_{10}^4} (k=0,1,2)$.

$$\therefore P(X=2) = \frac{C_2^2 C_8^2}{C_{10}^4} = \frac{2}{15}.$$

故选：C.

变式 3-3. 袋中共有 10 个除了颜色外完全相同的球, 其中有 6 个白球, 4 个红球. 从袋中任取 3 个球, 所取的 3 个球中至少有 1 个红球的概率为 ()

A. $\frac{12}{125}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{98}{125}$

D. $\frac{5}{6}$

【答案】D

【分析】

根据题意，该问题符合超几何分布，利用超几何分布概率公式计算所取的 3 个球中没有 1 个红球的概率，进而可得答案.

【详解】

根据题意，该问题符合超几何分布，其基本事件总数为 C_{10}^3 ，

其中所取的 3 个球中没有 1 个红球的基本事件为 C_6^3 ，

所求概率为 $1 - \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

故选:D.

考点四 超几何分布的应用

典例 4. 某同学会做老师给出的 6 道题中的 4 道.现从这 6 道题中选 3 道让该同学做，规定至少做出 2 道才能及格，试求：

(1) 选做的 3 题中该同学会做的题目数的分布列；

(2) 该同学能及格的概率.

【答案】

(1) 具体见解析

(2) $\frac{4}{5}$

【分析】

(1) 根据题意，该同学会做的题目数为 1,2,3，则根据超几何分布求概率的方法求出对应的概率，最后写出分布列即可；

(2) 根据 (1) 即可求得答案.

(1)

记该同学会做的题目数为，由题意， $X=1,2,3$ ，

$$P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}, \quad P(X=2)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}, \quad P(X=3)=\frac{C_4^3C_2^0}{C_6^3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5},$$

所以该同学会做的题目数的分布列为：

	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

(2) 由(1)，该同学能及格的概率为： $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ 。

变式 4-1. 一个袋中装有 6 个形状大小完全相同的小球，其中红球有 3 个，编号为 1, 2, 3；黑球有 2 个，编号为 1, 2；白球有 1 个，编号为 1. 现从袋中次随机抽取 3 个球.

(1) 求取出的 3 个球的颜色都不相同的概率；

(2) 记取得 1 号球的个数为随机变量，求随机变量的分布列.

【答案】

(1) $\frac{3}{10}$

(2) 答案见解析

【分析】

(1) 利用古典概型的概率公式求解即可，

(2) 由题意可得 $X=0, 1, 2, 3$ ，然后求出其对应的概率，从而可得分布列

(1)

从袋中一次随机抽取 3 个球，基本事件总数 $n=C_6^3=20$ ，取出的 3 个球的颜色都不相同包含的基本事件的个数为 $C_3^1C_2^1C_1^1=6$ ，

所以取出的 3 个球的颜色都不相同的概率 $P=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$ 。

(2)

由题意知 $X=0, 1, 2, 3$ 。

$$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20},$$

$$P(X=1)=\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20},$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\frac{9}{20},$$

$$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}.$$

所以的分布列为

	0	1	2	3
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

变式 4-2. 从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛，用 X 表示所选 3 人中女生的人数.

(1) 求 X 的分布列;

(2) 求 $P(X \leq 1)$.

【答案】

(1) 分布列见解析

(2) $\frac{4}{5}$

【分析】

(1) 由题意的可能取值为 0, 1, 2, 分别求出相应的概率, 由此能求出的分布列.

(2) 依题意可得 $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$, 从而计算可得;

(1)

解: 从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛,

设随机变量表示所选 3 人中女生的人数,

$\therefore X$ 的可能取值为 0, 1, 2,

$$P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}, \quad P(X=1)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}, \quad P(X=2)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5},$$

∴ X 的分布列为：

	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

(2) 解： $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{C_4^3}{C_6^3} + \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$

变式 4-3. 某校高二年级某班的物理课外活动小组有 5 名男生，4 名女生，从中选出 3 人参加物理竞赛考试，用 X 表示其中男生的人数。

(1) 请列出 X 的分布列；

(2) 求选出的 3 人中至少有 2 名男生的概率。

【答案】(1) 分布列见解析；(2) $\frac{25}{42}$ 。

【分析】

(1) 依题意，得随机变量 X 服从参数为 9, 3, 5 的超几何分布， X 的可能取值为 0, 1, 2, 3，然后利用超几何分布的概率公式求出对应的概率，从而可列出 X 的分布列；

(2) 由 (1) 的分布列求解即可

【详解】

(1) 依题意，得随机变量 X 服从参数为 9, 3, 5 的超几何分布，即 $X \sim H(9, 3, 5)$ ，

因此 $P(X=0) = \frac{C_5^3 C_4^0}{C_9^3} = \frac{1}{21}$ ， $P(X=1) = \frac{C_5^1 C_4^2}{C_9^3} = \frac{5}{14}$ ， $P(X=2) = \frac{C_5^2 C_4^1}{C_9^3} = \frac{10}{21}$ ， $P(X=3) = \frac{C_5^3 C_4^0}{C_9^3} = \frac{5}{42}$ 。

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$

(2) 由 (1) 中分布列可知 $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{10}{21} + \frac{5}{42} = \frac{25}{42}$ ，

故选出的 3 人中至少有 2 名男生的概率是 $\frac{25}{42}$ 。

考点五 二项分布与超几何分布的区别

典例 5. 分别指出下列随机变量服从什么分布：

(1) 即将出生的 100 个新生儿中，男婴的个数 X ;

(2) 已知某幼儿园有 125 个孩子，其中男孩有 62 个，从这些孩子中随机抽取 10 个，设抽到男孩的个数为 X .

【答案】

(1) 二项分布

(2) 超几何分布

【分析】

(1) 利用二项分布的特征求解，(2) 利用超几何分布特点求解

(1)

(1) X 的可能取值为 $0, 1, 2, \dots, 100$ ，且每个新生儿的性别相互独立，故男婴的个数 X 服从二项分布

(2)

(2) X 的可能取值为 $0, 1, 2, \dots, 10$ ，且是不放回抽样，故抽到男孩的个数为 X 服从超几何分布

变式 5-1. 袋中有 8 个白球、2 个黑球，从中随机地连续抽取 3 次，每次取 1 个球.

(1) 若每次抽取后都放回，设取到黑球的个数为 X ，求 X 的分布列；

(2) 若每次抽取后都不放回，设取到黑球的个数为 Y ，求 Y 的分布列.

【答案】

(1) 分布列见解析

(2) 分布列见解析

【分析】

(1) 有放回抽样时，取到黑球的次数 $X: B\left(3, \frac{1}{5}\right)$ ，可能的取值为 0, 1, 2, 3，分别求出对应的概率，即可得分布列。

(2) 不放回抽样时，取到的黑球个数 $Y \sim H(10, 3, 2)$ ，可能的取值为 0, 1, 2，分别求出对应的概率，即可得 Y 的分布列。

(1)

解：若每次抽取后都放回，则每次抽到黑球的概率均为。

而 3 次取球可以看成 3 次独立重复试验，因此 $X: B\left(3, \frac{1}{5}\right)$ ，所以

$$P(X=0) = C_3^0 \times \left(\frac{1}{5}\right)^0 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}, \quad P(X=1) = C_3^1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{12}{125}, \quad P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^0 = \frac{1}{125}.$$

因此 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

(2) 解：若每次抽取后都不放回，则随机抽取 3 次可看成随机抽取 1 次，但 1 次抽取了 3 个，

因此黑球数 Y 服从参数为 10, 3, 2 的超几何分布，即 $Y \sim H(10, 3, 2)$ ，

$$\text{因此 } P(Y=0) = \frac{C_2^0 C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}, \quad P(Y=1) = \frac{C_2^1 C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}, \quad P(Y=2) = \frac{C_2^2 C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{15}.$$

因此， Y 的分布列为：

Y	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

变式 5-2. 某食品厂为了检查一条自动包装流水线的生产情况，对该流水线上的产品进行简单随机抽样，获得数据如下表：

分组区间(单位: 克)	(490,495]	(495,500]	(500,505]	(505,510]	(510,515]
产品件数	3	4	7	5	1

包装质量在 (495,510] 克的产品为一等品，其余为二等品

- (1) 估计从该流水线任取一件产品为一等品的概率；
- (2) 从上述抽取的样本产品中任取 2 件，设 X 为一等品的产品数量，求 X 的分布列；
- (3) 从该流水线上任取 2 件产品，设 Y 为一等品的产品数量，求 Y 的分布列；

【答案】(1) $\frac{4}{5}$ ；(2) 分布列见解析；(3) 分布列见解析，

【分析】

- (1) 直接利用古典概型的概率公式计算可得；
- (2) 依题意的可能取值为 0、1、2，求出所对应的概率，列出分布列；
- (3) 依题意 $Y \sim B\left(2, \frac{4}{5}\right)$ ，即可求出 Y 的分布列，再求出数学期望，即可得解；

【详解】

解：(1) 样本中一共有 $3+4+7+5+1=20$ 件产品，包装质量在 (495,510] 克的产品有 $4+7+5=16$ 件，

故从该流水线任取一件产品为一等品的概率 $P = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

- (2) 依题意的可能取值为 0、1、2；

$$P(X=2) = \frac{C_{16}^2}{C_{20}^2} = \frac{12}{19}, \quad P(X=1) = \frac{C_{16}^1 C_4^1}{C_{20}^2} = \frac{32}{95}, \quad P(X=0) = \frac{C_4^2}{C_{20}^2} = \frac{3}{95}$$

故的分布列为：

	0	1	2
P	$\frac{3}{95}$	$\frac{32}{95}$	$\frac{12}{19}$

- (3) 由 (2) 可得 $E(X) = 2 \times \frac{12}{19} + 1 \times \frac{32}{95} + 0 \times \frac{3}{95} = \frac{8}{5}$

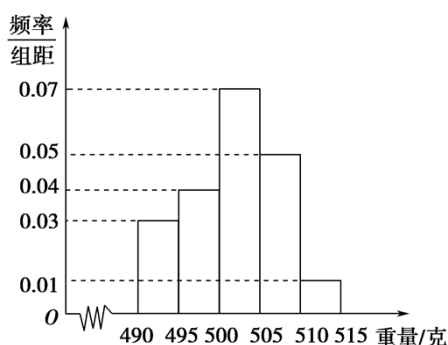
依题意 $Y \sim B\left(2, \frac{4}{5}\right)$ ，则 Y 的可能取值为 0，1，2

$$P(Y=2)=\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}, \quad P(X=1)=C_2^1 \times \left(1-\frac{4}{5}\right) \times \frac{4}{5}=\frac{8}{25}, \quad P(X=0)=\left(1-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$$

故 Y 的分布列为：

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{16}{25}$

变式 5-3. 某食品厂为了检查一条自动包装流水线的生产情况，随机抽取该流水线上的 40 件产品作为样本称出它们的质量(单位：克)，质量的分组区间为(490, 495], (495, 500], ..., (510, 515]。由此得到样本的频率分布直方图如图。



- (1) 根据频率分布直方图，求质量超过 505 克的产品数量；
- (2) 在上述抽取的 40 件产品中任取 2 件，设 X 为质量超过 505 克的产品数量，求 X 的分布列；
- (3) 从该流水线上任取 2 件产品，设 Y 为质量超过 505 克的产品数量，求 Y 的分布列。

【答案】(1) 12 件；(2) 答案见解析；(3) 答案见解析。

【分析】

- (1) 结合频率分布直方图求解(1)；
- (2) 结合超几何分布及古典概型求 X 的分布列；
- (3) 先分析 Y 服从二项分布，再利用公式求解。

【详解】

- (1) 质量超过 505 克的产品的频率为 $5 \times 0.05 + 5 \times 0.01 = 0.3$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/886143134011011031>