

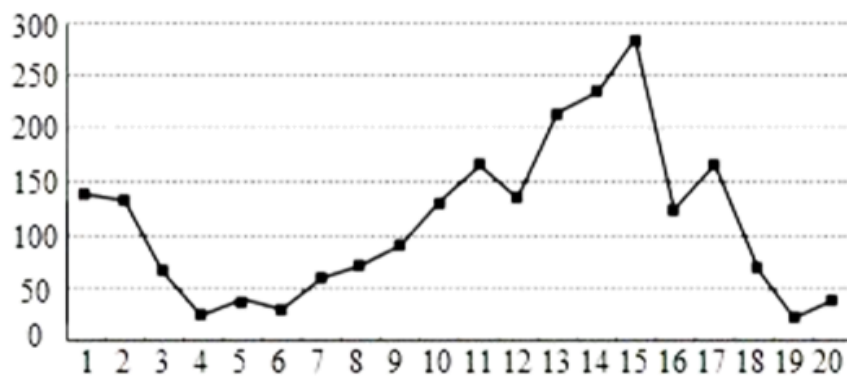
2023-2024 学年广东省梅州市蕉岭中学高三 3 月“线上教育”学习情况调查数学试题

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足： $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, |\vec{c}| = 1, |\vec{a} - \vec{c}| = |\vec{b} - \vec{c}| = 5$ ，则 $|\vec{a} - \vec{b}|$ 的最小值为()
 A. 5 B. 6 C. 7 D. 8
2. 已知 $A(-\sqrt{3}, 0), B(\sqrt{3}, 0)$ ， P 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的动点， $\vec{AP} = \vec{PQ}$ ，过点 P 作与 AP 垂直的直线 l 交直线 QB 于点 M ，若点 M 的横坐标为 x ，则 $|x|$ 的取值范围是 ()
 A. $|x| \geq 1$ B. $|x| > 1$ C. $|x| \geq 2$ D. $|x| \geq \sqrt{2}$
3. 已知实数集 $\mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | 1 < x < 3\}$ ，集合 $B = \left\{x | y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}\right\}$ ，则 $A \cap (C_{\mathbf{R}} B) =$ ()
 A. $\{x | 1 < x \leq 2\}$ B. $\{x | 1 < x < 3\}$ C. $\{x | 2 \leq x < 3\}$ D. $\{x | 1 < x < 2\}$
4. 空气质量指数 AQI 是反映空气状况的指数， AQI 指数值趋小，表明空气质量越好，下图是某市 10 月 1 日-20 日 AQI 指数变化趋势，下列叙述错误的是 ()



- A. 这 20 天中 AQI 指数值的中位数略高于 100
- B. 这 20 天中的中度污染及以上 (AQI 指数 > 150) 的天数占 $\frac{1}{4}$
- C. 该市 10 月的前半个月的空气质量越来越好
- D. 总体来说，该市 10 月上旬的空气质量比中旬的空气质量好

5. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点与圆 $M: (x-2)^2 + y^2 = 5$ 的圆心重合, 且圆 M 被双曲线的一条渐近线截得的弦长为 $2\sqrt{2}$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 3

6. 设 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点, O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 交于 P, Q 两点. 若 $|PQ| = |OF|$, 则 C 的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$
C. 2 D. $\sqrt{5}$

7. 《周易》历来被人们视作儒家群经之首, 它表现了古代中华民族对万事万物的深刻而又朴素的认识, 是中华人文文化的基础, 它反映出中国古代的二进制计数的思想方法. 我们用近代术语解释为: 把阳爻“—”当作数字“1”, 把阴爻“--”当作数字“0”, 则八卦所代表的数表示如下:

卦名	符号	表示的二进制数	表示的十进制数
坤		000	0
震		001	1
坎		010	2
兑		011	3

依此类推, 则六十四卦中的“屯”卦, 符号“ ”表示的十进制数是 ()

- A. 18 B. 17 C. 16 D. 15

8. 函数 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象为 C , 以下结论中正确的是 ()

- ① 图象 C 关于直线 $x = \frac{5}{12}\pi$ 对称;
② 图象 C 关于点 $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称;
③ 由 $y = 2\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度可以得到图象 C .

- A. ① B. ①② C. ②③ D. ①②③

9. 已知条件 $p: a = -1$, 条件 q : 直线 $x - ay + 1 = 0$ 与直线 $x + a^2y - 1 = 0$ 平行, 则 p 是 q 的()

A. 充要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件

10. 某装饰公司制作一种扇形板状装饰品, 其圆心角为 120° , 并在扇形弧上正面等距安装 7 个发彩色光的小灯泡且在背面用导线相连(弧的两端各一个, 导线接头忽略不计), 已知扇形的半径为 30 厘米, 则连接导线最小大致需要的长度为()

A. 58 厘米 B. 63 厘米 C. 69 厘米 D. 76 厘米

11. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(4) = 17$, 设 $f(x_0) = y_0$, 则“ $y_0 = 17$ ”是“ $x_0 = 4$ ”的()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

12. 已知不等式组 $\begin{cases} y \leq x \\ y \geq -x \\ x \leq a \end{cases}$ 表示的平面区域 S 的面积为 9, 若点 $P(x, y) \in S$, 则 $z = 2x + y$ 的最大值为()

A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若复数 z 满足 $2z + \bar{z} = 3 + i$, 其中 i 是虚数单位, $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数, 则 $z =$ _____.

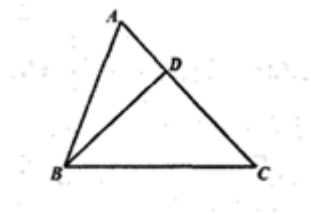
14. 若函数 $f(x) = e^x - ax > 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

15. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 2$, $S_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)a_{n+1}$, $b_n = \log_2 a_n$, 则数列 $\left\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n =$ _____.

16. 函数 $f(x) = x \cos x + \sin x$ 在 $x = \pi$ 处的切线方程是_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图, D 是在 $\triangle ABC$ 边 AC 上的一点, $\triangle BCD$ 面积是 $\triangle ABD$ 面积的 2 倍, $\angle CBD = 2\angle ABD = 2\theta$.



(I) 若 $\theta = \frac{\pi}{6}$, 求 $\frac{\sin A}{\sin C}$ 的值;

(II) 若 $BC = 4$, $AB = 2\sqrt{2}$, 求边 AC 的长.

18. (12 分) 已知圆 $O_1: (x+1)^2 + y^2 = 8$ 上有一动点 Q , 点 O_2 的坐标为 $(1, 0)$, 四边形 QO_1O_2R 为平行四边形, 线段 O_1R 的垂直平分线交 O_2R 于点 P .

(I) 求点 P 的轨迹 C 的方程;

(II) 过点 O_2 作直线与曲线 C 交于 A, B 两点, 点 K 的坐标为 $(2, 1)$, 直线 KA, KB 与 y 轴分别交于 M, N 两点, 求证: 线段 MN 的中点为定点, 并求出 $\triangle KMN$ 面积的最大值.

19. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$, (t 为参数). 以坐标原点为极点, x 轴的正半

轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho \cos \theta - 8 = 0$.

(1) 求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若点 P 是直线 l 的一点, 过点 P 作曲线 C 的切线, 切点为 Q , 求 $|PQ|$ 的最小值.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = a + 2\ln x$, $f(x) \leq ax$.

(1) 求 a 的值;

(2) 令 $g(x) = \frac{xf(x)}{x-a}$ 在 $(a, +\infty)$ 上最小值为 m , 证明: $6 < f(m) < 7$.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = x \cdot \cos x - \sin x$.

(I) 判断函数 $g(x)$ 在区间 $(0, 3\pi)$ 上零点的个数, 并证明;

(II) 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 3\pi)$ 上的极值点从小到大分别为 x_1, x_2 , 证明: $f(x_1) + f(x_2) < 0$

22. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 其中 $a < c$, $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} = \frac{-\cos(B+C)}{\sin C \cos C}$.

(1) 求角 C 的值;

(2) 若 $c = 45$, $a = 27\sqrt{2}$, D 为 AC 边上的任意一点, 求 $AD + 2BD$ 的最小值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

建立平面直角坐标系, 将已知条件转化为所设未知量的关系式, 再将 $\left| \frac{1}{a-b} \right|$

的最小值转化为用该关系式表达的算式，利用基本不等式求得最小值.

【详解】

建立平面直角坐标系如下图所示，设 $\vec{c} = (\cos \theta, \sin \theta)$ ， $\vec{OA} = \vec{a}$ ， $\vec{OB} = \vec{b}$ ，且 $A(m, 0)$ ， $B(0, n)$ ，由于

$$|\vec{a} - \vec{c}| = |\vec{b} - \vec{c}| = 5, \text{ 所以 } m, n \in [4, 6].$$

$$\vec{a} - \vec{c} = (m - \cos \theta, -\sin \theta), \vec{b} - \vec{c} = (-\cos \theta, n - \sin \theta). \text{ 所以}$$

$$\begin{cases} m^2 - 2m \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 25 \\ n^2 - 2n \sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 25 \end{cases}, \text{ 即 } m^2 + n^2 = 48 + 2m \cos \theta + 2n \sin \theta.$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = |(\vec{a} - \vec{c}) - (\vec{b} - \vec{c})| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{c})^2 - 2(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) + (\vec{b} - \vec{c})^2} = \sqrt{48 + 2m \cos \theta + 2n \sin \theta}$$

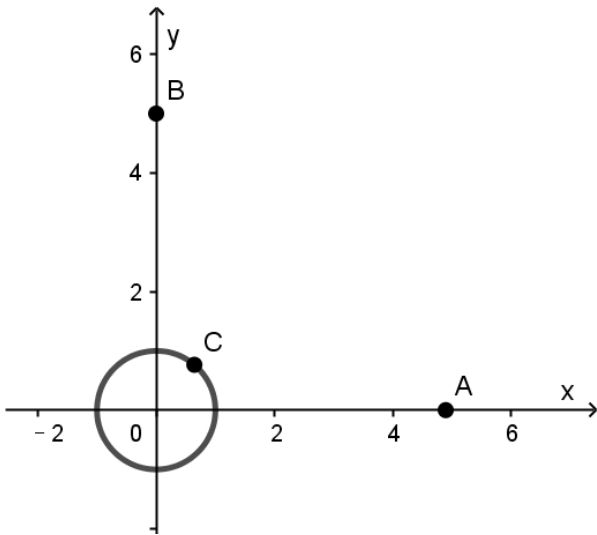
$$= \sqrt{m^2 + n^2} \geq \sqrt{2mn}. \text{ 当且仅当 } m = n \text{ 时取得最小值, 此时由 } m^2 + n^2 = 48 + 2m \cos \theta + 2n \sin \theta \text{ 得}$$

$$2m^2 = 48 + 2m(\sin \theta + \cos \theta) = 48 + 2\sqrt{2}m \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), \text{ 当 } \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ 时, } 2m^2 \text{ 有最小值为 } 48 - 2\sqrt{2}m, \text{ 即}$$

$$2m^2 = 48 - 2\sqrt{2}m, \quad m^2 + \sqrt{2}m - 24 = 0, \text{ 解得 } m = 3\sqrt{2}. \text{ 所以当且仅当 } m = n = 3\sqrt{2}, \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ 时 } |\vec{a} - \vec{b}| \text{ 有最小值为}$$

$$\sqrt{2 \times (3\sqrt{2})^2} = 6.$$

故选：B



【点睛】

本小题主要考查向量的位置关系、向量的模，考查基本不等式的运用，考查数形结合的数学思想方法，属于难题.

2、A

【解析】

由题意得 $||\vec{MB}| - |\vec{MA}|| = |\vec{BQ}| = 2|\vec{OP}|$ ，即可得点 M 的轨迹为以 A, B 为左、右焦点， $a=1$ 的双曲线，根据双曲线的性质即可得解.

【详解】

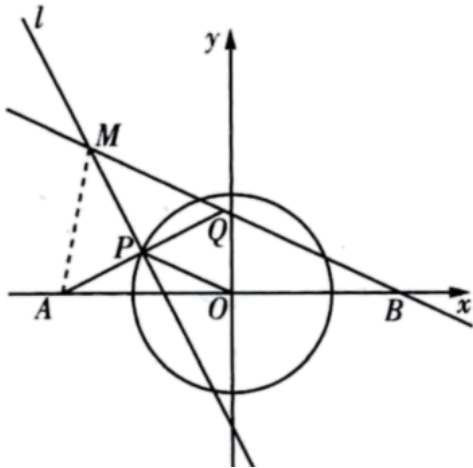
如图，连接 OP ， AM ，

由题意得 $\|MB\| - \|MA\| = \|BQ\| = 2\|OP\| = 2$ ，

$\therefore$ 点 M 的轨迹为以 A ， B 为左、右焦点， $a=1$ 的双曲线，

$\therefore |x| \geq 1$ 。

故选：A.



【点睛】

本题考查了双曲线定义的应用，考查了转化化归思想，属于中档题.

3、A

【解析】

$\sqrt{x-2} > 0$ 可得集合 B ，求出补集 $C_R B$ ，再求出 $A \cap (C_R B)$ 即可.

【详解】

由 $\sqrt{x-2} > 0$ ，得 $x > 2$ ，即 $B = (2, +\infty)$ ，

所以 $C_R B = (-\infty, 2]$ ，

所以 $A \cap (C_R B) = (1, 2]$ 。

故选:A

【点睛】

本题考查了集合的补集和交集的混合运算,属于基础题.

4、C

【解析】

结合题意，根据题目中的 20 天的 AQI 指数值，判断选项中的命题是否正确.

【详解】

对于 A ，由图可知 20 天的 AQI 指数值中有 10 个低于 100，10 个高于 100，其中第 10 个接近 100，第 11 个高于 100，所以中位数略高于 100，故 A 正确。

对于 B ，由图可知 20 天的 AQI 指数值中高于 150 的天数为 5，即占总天数的 $\frac{1}{4}$ ，故 B 正确。

对于 C ，由图可知该市 10 月的前 4 天的空气质量越来越好，从第 5 天到第 15 天空气质量越来越差，故 C 错误。

对于 D ，由图可知该市 10 月上旬大部分指数在 100 以下，中旬大部分指数在 100 以上，所以该市 10 月上旬的空气质
量比中旬的空气质量好，故 D 正确。

故选： C

【点睛】

本题考查了对折线图数据的分析，读懂题意是解题关键，并能运用所学知识对命题进行判断，本题较为基础。

5、 A

【解析】

由已知，圆心 M 到渐近线的距离为 $\sqrt{3}$ ，可得 $\sqrt{3} = \frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ，又 $c = 2 = a^2 + b^2$ ，解方程即可。

【详解】

由已知， $c = 2$ ，渐近线方程为 $bx \pm ay = 0$ ，因为圆 M 被双曲线的一条渐近线截得的弦长为 $2\sqrt{2}$ ，

所以圆心 M 到渐近线的距离为 $\sqrt{r^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3} = \frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2b}{c} = b$ ，故 $a = \sqrt{c^2 - b^2} = 1$ ，

所以离心率为 $e = \frac{c}{a} = 2$ 。

故选： A 。

【点睛】

本题考查双曲线离心率的问题，涉及到直线与圆的位置关系，考查学生的运算能力，是一道容易题。

6、 A

【解析】

准确画图，由图形对称性得出 P 点坐标，代入圆的方程得到 c 与 a 关系，可求双曲线的离心率。

【详解】

设 PQ 与 x 轴交于点 A ，由对称性可知 $PQ \perp x$ 轴，

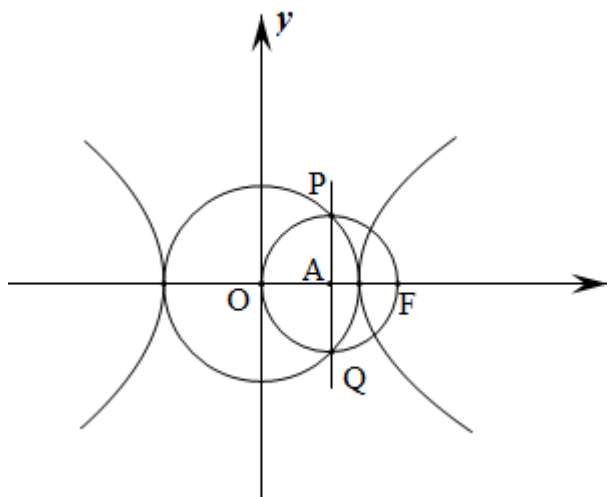
又 $Q|PQ| = |OF| = c$ ， $\therefore |PA| = \frac{c}{2}$ ， $\therefore PA$ 为以 OF 为直径的圆的半径，

$$\therefore A \text{ 为圆心 } |OA| = \frac{c}{2}.$$

$$\therefore P\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right), \text{ 又 } P \text{ 点在圆 } x^2 + y^2 = a^2 \text{ 上,}$$

$$\therefore \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} = a^2, \text{ 即 } \frac{c^2}{2} = a^2, \therefore e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 2.$$

$$\therefore e = \sqrt{2}, \text{ 故选 A.}$$



【点睛】

本题为圆锥曲线离心率的求解，难度适中，审题时注意半径还是直径，优先考虑几何法，避免代数法从头至尾，运算繁琐，准确率大大降低，双曲线离心率问题是圆锥曲线中的重点问题，需强化练习，才能在解决此类问题时事半功倍，信手拈来。

7、B

【解析】

由题意可知“屯”卦符号“䷂”表示二进制数字 010001，将其转化为十进制数即可。

【详解】

由题意类推，可知六十四卦中的“屯”卦符号“䷂”表示二进制数字 010001，转化为十进制数的计算为 $1 \times 2^0 + 1 \times 2^4 = 17$ 。

故选：B。

【点睛】

本题主要考查数制是转化，新定义知识的应用等，意在考查学生的转化能力和计算求解能力。

8、B

【解析】

根据三角函数的对称轴、对称中心和图象变换的知识，判断出正确的结论。

【详解】

因为 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$,

又 $f(\frac{5\pi}{12}) = 2\sin(2 \times \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3}) = 2\sin \frac{3\pi}{6} = 2$, 所以①正确.

$f(-\frac{\pi}{3}) = 2\sin(2 \times \frac{-\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = 2\sin(-\pi) = 0$, 所以②正确.

将 $y = 2\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得 $y = 2\sin[2(x - \frac{\pi}{3})] = 2\sin(2x - \frac{2\pi}{3})$, 所以③错误.

所以①②正确, ③错误.

故选:B

【点睛】

本小题主要考查三角函数的对称轴、对称中心, 考查三角函数图象变换, 属于基础题.

9、C

【解析】

先根据直线 $x - ay + 1 = 0$ 与直线 $x + a^2y - 1 = 0$ 平行确定 a 的值, 进而即可确定结果.

【详解】

因为直线 $x - ay + 1 = 0$ 与直线 $x + a^2y - 1 = 0$ 平行,

所以 $a^2 + a = 0$, 解得 $a = 0$ 或 $a = -1$; 即 $q: a = 0$ 或 $a = -1$;

所以由 P 能推出 q ; q 不能推出 P ;

即 P 是 q 的充分不必要条件.

故选 C

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判定, 熟记概念即可, 属于基础题型.

10、B

【解析】

由于实际问题中扇形弧长较小, 可将导线的长视为扇形弧长, 利用弧长公式计算即可.

【详解】

因为弧长比较短的情况下分成 6 等分,

所以每部分的弦长和弧长相差很小, 可以用弧长近似代替弦长,

故导线长度约为 $\frac{2\pi}{3} \times 30 = 20\pi \approx 63$ (厘米).

故选: B.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/887061144033006161>