重庆市南开中学校2023-2024学年高三第六次质量检测（2月）数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合 $A=\{x|-1<x<3\}, B=\{x\in\mathbf{N}^{*} \mid x^{2}-3x<0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{x|0<x<3\}$　　B．$\{x|-1<x<3\}$　　C．$\{1,2\}$　　D．$\{0,1,2\}$

2．已知复数 z 满足 $(z+1)\mathrm{i}=2z-1$，则复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限

C．第三象限　　D．第四象限

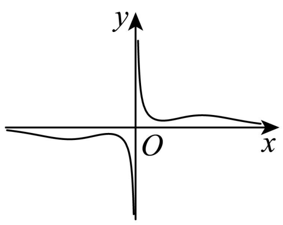
3．已知非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{b}|=2\sqrt{3}|\vec{a}|$，且 $\vec{a}\perp(3\vec{a}+\vec{b})$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为（　　）

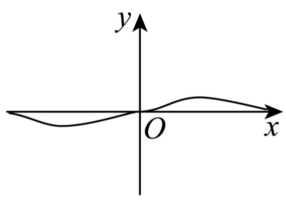
A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　　D．$\dfrac{5\pi}{6}$

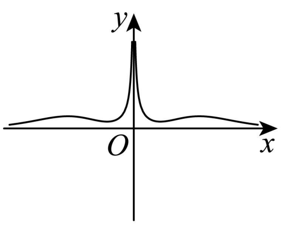
4．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足 $a_2=3$，$3S_4=4S_3+12$，则 a_7 等于（　　）

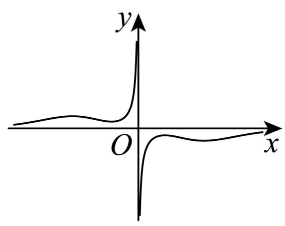
A．10　　B．11　　C．12　　D．13

5．函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}\left(x^{2}+\dfrac{1}{2}-\sin^{2}x\right)}{\mathrm{e}^{2x}-1}$ 的部分图像大致为（　　）

A．


B．


C．


D．


6．已知三棱锥 $O-ABC$ 的体积是 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，A,B,C 是球 O 的球面上的三个点，且 $\angle ACB=120^{\circ}, AB=\sqrt{3}$，$AC+BC=2$，则球 O 的表面积为（　　）

A．36π　　B．24π　　C．12π　　D．8π

7．已知双曲线：$\dfrac{x^{2}}{a^{2}}-\dfrac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，过点 F_2 作直线交双曲线

右支于M,N两点（M点在x轴上方），使得$\overrightarrow{MF_2}=3\overrightarrow{F_2N}$.若$\left(\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MN}\right)\cdot\overrightarrow{F_1N}=0$，则双曲线的离心率为（   ）

A．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　　　B．$\sqrt{2}$　　　　C．$\sqrt{3}$　　　　D．2

8．对于正数a,b，有$(2ab+1)(a+b)=6ab$，则$a+b$的取值范围是（   ）

A．$(0,1]$　　　　B．$\left[1,\sqrt{3}\right]$　　　　C．$[1,2]$　　　　D．$[2,+\infty]$

二、多选题

9．某射箭俱乐部举行了射箭比赛，甲、乙两名选手均射箭6次，结果如下，则（   ）

次数第x/次	1	2	3	4	5	6
环数y/环	7	8	6	7	8	9

甲选手

次数第x/次	1	2	3	4	5	6
环数y/环	9	7	6	8	6	6

乙选手

A．甲选手射击环数的第九十百分位数为8.5

B．甲选手射击环数的平均数比乙选手的大

C．从发挥的稳定性上看，甲选手优于乙选手

D．用最小二乘法求得甲选手环数y关于次数x的经验回归方程为$y=0.3x+\hat{a}$，则$\hat{a}=6.45$

10．已知一圆锥的底面半径为$\sqrt{3}$，其侧面展开图是圆心角为$\sqrt{3}\pi$的扇形，A,B为底面圆的一条直径上的两个端点，则（   ）

A．该圆锥的母线长为2

B．该圆锥的体积为π

C．从A点经过圆锥的表面到达B点的最短距离为$2\sqrt{3}$

D．过该圆锥的顶点作圆锥的截面，则截面面积的最大值为$\sqrt{3}$

11．平面解析几何的结论很多可以推广到空间中，如：（1）平面上，过点$Q(x_0,y_0)$，且以$\vec{m}=(a,b)(ab\neq 0)$为方向向量的平面直线l的方程为$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$；在空间中，过点

$Q(x_0,y_0,z_0)$，且以$\vec{m}=(a,b,c)(abc\neq 0)$为方向向量的空间直线$l$的方程为

$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$.（2）平面上，过点$Q(x_0,y_0)$，且以$\vec{u}=(m,n)(mn\neq 0)$为法向量的直线$l$的方程为$m(x-x_0)+n(y-y_0)=0$；空间中，过点$Q(x_0,y_0,z_0)$，且以$\vec{u}=(m,n,p)(mnp\neq 0)$为法向量的平面$\alpha$的方程为$m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0$.

现已知平面$\alpha:2x+3y+4z=5$，平面$\beta:-x-2y+2z=0$，$l_1:\begin{cases}2x-y=10\\y+z=-1\end{cases}$，

$l_2:6x=4y+1=3z-1$，则（　）

A．$l_1//\alpha$　　B．$\alpha//\beta$　　C．$l_1\perp\beta$　　D．$l_2\perp\beta$

三、填空题

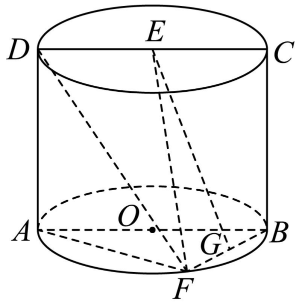
12．已知圆$C:x^2+y^2+2x-4y+3=0$，直线$l:mx+2y+m-2=0$，若直线l与圆C交于A,B两点，则$|AB|$的最小值为__________.

13．2024年伊始，随着“广西沙糖桔”“马铃薯公主”等热梗的不断爆出，哈尔滨火爆出圈，成为旅游城市中的“顶流”.某班级五位同学也准备共赴一场冰雪之约，制定了“南方小土豆，勇闯哈尔滨”的出游计划，这五位同学准备在行程第一天在圣索菲亚教堂，冰雪大世界，中央大街三个景点中选择一个去游玩，已知每个景点至少有一位同学会选，五位同学都会进行选择并且只能选择其中一个景点，若学生甲和学生乙准备选同一个景点，则不同的选法种数是__________.

14．设$f(x)$是定义在**R**上的单调增函数，且满足$f(-1-x)+f(x)=-7$，若对于任意非零实数x都有$f\left[f(x)+\frac{1}{f(x)+3}-x-\frac{1}{x}+2\right]=-4$，则$f(2024)=$__________.

四、解答题

15．如图，四边形$ABCD$是圆柱OE的轴截面，点F在底面圆O上，$OB=BF=1$，点G是线段BF的中点



(1)证明：$EG//$平面DAF；

(2)若直线DF与圆柱底面所成角为45°，求点G到平面DEF的距离.

16．设函数$f\left(x\right)=\cos\omega x\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{1}{4}(\omega>0)$，且函数$f\left(x\right)$的图像相邻两条对成轴之间的距离为$\dfrac{\pi}{2}$

(1)若$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，求$f\left(x\right)$的取值范围；

(2)把函数$f\left(x\right)$图像上所有点的横坐标变为原来的$\dfrac{1}{2}$倍（纵坐标不变），再将所得图像向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位长度，得到函数$g\left(x\right)$的图像，讨论函数$g\left(x\right)$的单调性；

(3)在$\triangle ABC$中，记$A、B、C$所对的边分别为$a、b、c, f\left(A\right)=-\dfrac{1}{2}$，外接圆面积为$4\pi,\tan B=\left(2-\sqrt{3}\right)\tan C$，$\angle BAC$的内角平分线与外角平分线分别交直线$BC$于$D、E$两点，求$DE$的长度.

17．设$f\left(x\right)=ax+ax\ln x,a>0$.

(1)求$f\left(x\right)$的极值；

(2)若对于$\forall x\in\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，有$f\left(x\right)\leq \mathrm{e}^{2x}$恒成立，求$a$的最大值.

18．已知定点$A\left(1,0\right),B\left(-1,0\right)$，若动点$P$到$A\left(1,0\right)$与到定直线$l_1:x=4$的距离之比为$\dfrac{1}{2}$.

(1)求动点P的轨迹C的方程；

(2)过点B作直线l_2交C于$M、N$两点（M点在x轴的上方），过点M作l_1的垂线，垂足为Q.是否存在点P，使得四边形$MNPQ$为菱形？若存在，请求出此时l_2的斜率；若不存在，请说明理由；

(3)若动点P在第一象限，延长$PA、PB$交C于$R、K$两点，求$\triangle PAK$与$\triangle PBR$内切圆半径的差的绝对值的最大值.

19．已知正项数列$\left\{a_n\right\}$满足：$4a_{n+1}^2a_n-5a_{n+1}a_n^2+4a_n-5a_{n+1}=0,n\in\mathbf{N}^*,a_1=2$.

(1)设$b_n = a_n + \frac{1}{a_n}$，试证明$\left\{ b_n \right\}$为等比数列；

(2)设$c_n = \frac{b_n}{b_n^2 - 4}$，试证明$c_1 + c_2 + \cdots + c_n < \frac{50}{9}$；

(3)设$A_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2, B_n = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2}$，是否存在$n$使得$32^{n-2}\left(A_n + B_n \right)$为整数？如果存在，则求出$n$应满足的条件；若不存在，请给出理由.

参考答案：

1．C

【分析】先求出集合B，然后利用集合的交集运算即可求解.

【详解】由题意知$A=\{x|-1<x<3\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}^*|\ x^2-3x<0\}=\{x\in\mathbf{N}^*|0<x<3\}=\{1,2\}$，

所以$A\cap B=\{1,2\}$，故C正确.

故选：C.

2．D

【分析】由复数相等的条件列出方程组即可得$x=\frac{1}{5},y=\frac{3}{5}$，进一步由复数概念、几何意义即可得解.

【详解】由题意设$z=x+y\mathrm{i},x,y\in\mathrm{R}$，所以$(z+1)\mathrm{i}=-y+(x+1)\mathrm{i}=2x-1+2y\mathrm{i}=2z-1$，

所以$\begin{cases}-y=2x-1\\x+1=2y\end{cases}$，解得$x=\frac{1}{5},y=\frac{3}{5}$，所以$\bar{z}=\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$对应点$\left(\frac{1}{5},-\frac{3}{5}\right)$位于第四象限.

故选：D.

3．D

【分析】根据数量积的运算律及向量夹角的运算公式求解.

【详解】解：因为$\vec{a}\perp(3\vec{a}+\vec{b})$，

所以$\vec{a}\cdot(3\vec{a}+\vec{b})=3|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

设$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，

所以$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-3|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|\times2\sqrt{3}|\vec{a}|}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$\theta=\frac{5\pi}{6}$.

故选：D

4．D

【分析】根据等差数列的通项公式和求和公式以及等差数列的性质进行计算.

【详解】因为数列$\{a_n\}$为等差数列，

$3S_4=4S_3+12\Rightarrow3S_4-3S_3=S_3+12\Rightarrow3a_4=3a_2+12=3\times3+12=21\Rightarrow a_4=7$，

所以：$d=\dfrac{a_4-a_2}{2}=\dfrac{7-3}{2}=2$.

所以：$a_7=a_2+5d=3+5\times2=13$.

故选：D

5．A

【分析】由$f\left(x\right)$的定义域排除B；由$f\left(x\right)$是奇函数排除C；由$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)>0$排除D，从而得出答案.

【详解】由$e^{2x}-1\neq0$，得$x\neq0$，则$f\left(x\right)$的定义域是$\left\{x\middle|\,x\neq0\right\}$，排除B；

分子分母同时除以e^x得$f\left(x\right)=\dfrac{x^2+\dfrac{1}{2}-\sin^2x}{e^x-e^{-x}}$，

$$f\left(-x\right)=\frac{(-x)^2+\dfrac{1}{2}-\sin^2(-x)}{e^{-x}-e^x}=-\frac{x^2+\dfrac{1}{2}-\sin^2x}{e^x-e^{-x}}=-f\left(x\right),$$

所以函数$f\left(x\right)$是奇函数，排除C；

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{e^{\frac{\pi}{4}}\left[\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2+\dfrac{1}{2}-\sin^2\dfrac{\pi}{4}\right]}{e^{\frac{\pi}{2}}-1}=\frac{e^{\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2}{e^{\frac{\pi}{2}}-1},$$

$\because e^{\frac{\pi}{4}}>0,\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2>0,e^{\frac{\pi}{2}}-1>e^0-1=0$，$\therefore f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)>0$，排除D，

故选：A.

6．A

【分析】根据正弦定理得到外接圆半径，由余弦定理得到$AC\cdot BC=1$，由三角形面积公式得到$S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，结合三棱锥体积得到球心到底面$ABC$的距离，得到球的半径，得到表面积.

【详解】因为$AB=\sqrt{3},\angle ACB=120^\circ$，所以$\triangle ABC$的外接圆半径为$r=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin120^\circ}=1$，

在$\triangle ABC$中，由余弦定理可得$3=AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos120^\circ=(AC+BC)^2-AC\cdot BC$，

所以$AC\cdot BC=(AC+BC)^2-3=1$，所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC\sin120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

设球心O到平面ABC的距离为h，

$\because V_{O-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}h=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

$\therefore h=2\sqrt{2}$，

球半径 $R=\sqrt{h^2+r^2}=3$，所以球面积 $S=4\pi R^2=36\pi$.

故选：A

7．D

【分析】根据题意求得 $|MF_1|=|MN|$，得到 $|F_1N|=4a,|MF_2|=3|NF_2|=6a,|MF|_1=8a$，在 $\triangle MF_1F_2$ 与 $\triangle NF_1F_2$ 中,结合 $\cos\angle F_1F_2M+\cos\angle F_1F_2N=0$ 和余弦定理，列出方程得到 $c^2=4a^2$，即可求解.

【详解】如图所示，取 F_1N 的中点 E，连接 ME，可得 $\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{ME}$，

由 $\left(\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MN}\right)\cdot\overrightarrow{F_1N}=0$，可得 $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{F_1N}=0$，所以 $\overrightarrow{ME}\perp\overrightarrow{F_1N}$，则 $|MF_1|=|MN|$，

可得 $|F_2N|=|MN|-|MF_2|=|MF_1|-|MF_2|=2a$，

则 $|F_1N|=4a,|MF_2|=3|NF_2|=6a,|MF|_1=8a$，

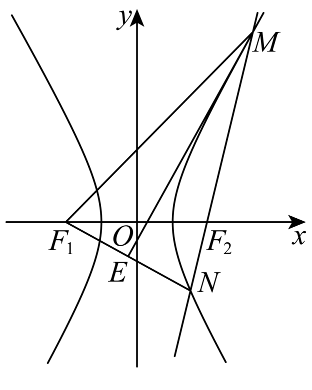
在 $\triangle MF_1F_2$ 与 $\triangle NF_1F_2$ 中,

由余弦定理可得：$\cos\angle F_1F_2N=\dfrac{4a^2+4c^2-16a^2}{8ac},\cos\angle F_1F_2M=\dfrac{4c^2+36a^2-64a^2}{24ac}$，

因为 $\angle F_1F_2M+\angle F_1F_2N=\pi$，所以 $\cos\angle F_1F_2M+\cos\angle F_1F_2N=0$，

即 $\dfrac{4a^2+4c^2-16a^2}{8ac}=\dfrac{4c^2+36a^2-64a^2}{24ac}$，解得 $c^2=4a^2$，即 $e=\dfrac{c}{a}=2$.

故选：D.



8．C

【分析】根据题意可得利用基本不等式可得 $a+b=\dfrac{6ab}{2ab+1}\le 3-\dfrac{3}{2\cdot\dfrac{(a+b)^2}{4}+1}$，再结合二次函数不等式求解方法即可求解.

【详解】由题可知：$a+b=\frac{6ab}{2ab+1}=3-\frac{3}{2ab+1}$，

因为a,b都是正数，所以$ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{\left(a+b\right)^2}{4}$（当且仅当$a=b$时取等），

所以$a+b=3-\frac{3}{2ab+1}\le3-\frac{3}{2\cdot\frac{\left(a+b\right)^2}{4}+1}$（当且仅当$a=b$时取等），

化简可得$\left(a+b\right)^2-3\left(a+b\right)+2\le0$，解得$1\le a+b\le2$，故C正确.

故选：C.

9．BCD

【分析】根据题意，利用数据平均数，方差，以及百分位数的定义和计算方法，以及回归直线方程的特征，逐项判定，即可求解.

【详解】对于A中，由甲选手射击环数从小到大排列为：$6,7,7,8,8,9$，

又由$6\times90\%=5.4$，所以甲选手射击环数的第九十百分位数为9，所以A错误；

对于B中，根据题意，可得甲的射击环数的平均数为$\overline{y_1}=\frac{1}{6}\left(6+7+7+8+8+9\right)=7.5$，

乙的射击环数的平均数为$\overline{y_2}=\frac{1}{6}\left(9+7+6+8+6+6\right)=7$，

因为$\overline{y_1}>\overline{y_2}$，所以甲选手射击环数的平均数比乙选手的大，所以B正确；

对于C中，由题意，甲的射击环数的方差为

$s_1^2=\frac{1}{6}[(7-7.5)^2+(8-7.5)^2+(6-7.5)^2+(7-7.5)^2+(8-7.5)^2+(9-7.5)^2]=\frac{11}{12}$，

乙的射击环数的方差为$s_2^2=\frac{1}{6}[(9-7)^2+(7-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2+(6-7)^2+(6-7)^2]=\frac{4}{3}$，

因为$s_1^2<s_2^2$，所以从发挥的稳定性上看，甲选手优于乙选手，所以C正确；

对于D中，由甲的射击环数的数据，可得$\overline{x_1}=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$，

所以样本中心为$(\frac{7}{2},\frac{15}{2})$，代入回归方程为$y=0.3x+\hat{a}$，可得$\frac{15}{2}=0.3\times\frac{7}{2}+\hat{a}$，

解得$\hat{a}=6.45$，所以D正确.

故选：BCD.

10．AB

【分析】根据题意，结合圆台的几何结构特征，逐项计算，即可求解.

【详解】对于A中，由圆锥的底面半径$r=\sqrt{3}$，可得底面圆周长为$2\pi r=2\sqrt{3}\pi$，

又由其侧面展开图是圆心角为$\sqrt{3}\pi$的扇形，

设圆锥的母线长为l，则$\sqrt{3}\pi \cdot l = 2\sqrt{3}\pi$，解得$l=2$，所以 A 正确；

对于 B 中，因为$r=\sqrt{3}$，且母线长为$l=2$，

所以该圆锥的高为$h=\sqrt{l^2-r^2}=1$，所以其体积为$\frac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2\times 1=\pi$，所以 B 正确；

对于 C 中，假设该圆锥的轴截面将该圆锥分成两部分，将其中的一部分展开，

则其侧面展开图是一个圆心角为$\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$的扇形，

所以从 A 点经过圆锥的表面到达B点的最短距离为$2\times 2\times \sin\frac{\frac{\sqrt{3}\pi}{2}}{2}=4\sin\frac{\sqrt{3}\pi}{4}\neq 2\sqrt{3}$，所以 C 不正确；

对于 D 中，过该圆锥的顶点作圆锥的截面，则截面为腰长为 2 的等腰三角形，

设其顶角为θ，则该三角形的面积为$S=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sin\theta$，

当截面为轴截面时，$\theta=\frac{2}{3}\pi$，则$0<\theta\le\frac{2}{3}\pi$，

所以，当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$S_{\max}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 1=2\neq\sqrt{3}$，所以 D 不正确.

故选：AB.

11．AC

【分析】求出平面α、β的法向量，以及直线l_1、l_2所过定点坐标及其方向向量，利用空间中线面、面面位置关系与空间向量的关系可得出结论.

【详解】由题可知：平面α的法向量$\vec{m}=(2,3,4)$，平面β的法向量$\vec{n}=(-1,-2,2)$，

直线l_1的方程可化为$\frac{x-5}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{1}=\frac{z-(-1)}{-1}$，直线$l_1$恒过$(5,0,-1)$，方向向量为$\vec{u}=\left(\frac{1}{2},1,-1\right)$，

直线l_2的方程可化为$\frac{x}{2}=\frac{y+\frac{1}{4}}{3}=\frac{z-\frac{1}{3}}{4}$，直线$l_2$恒过$\left(0,-\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$，方向向量$\vec{v}=(2,3,4)$，

对于 A 选项，因为$\vec{u}\cdot\vec{m}=1+3-4=0$，则$\vec{u}\perp\vec{m}$，

且$2\times 5+3\times 0+4\times(-1)\neq 5$，故$l_1\not\subset\alpha$，则$l_1/\!/\alpha$，A 正确；

对于 B 选项，$\vec{m}\cdot\vec{n}=-2-6+8=0$，则$\vec{m}\perp\vec{n}$，所以，$\alpha\perp\beta$，B 错；

对于 C 选项，因为$\vec{n}=-2\vec{u}$，则$l_1\perp\beta$，C 对；