

云南省宾川县 2024 年高三二诊模拟考试数学试卷

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + 1$ ，则下列判断错误的是（ ）

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π B. $f(x)$ 的值域为 $[-1, 3]$
- C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称 D. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 对称

2. 关于圆周率 π ，数学发展史上出现过许多很有创意的求法，如著名的蒲丰实验和查理斯实验。受其启发，我们也可以通过设计下面的实验来估计 π 的值：先请全校 m 名同学每人随机写下一个都小于 1 的正实数对 (x, y) ；再统计两数能与 1 构成钝角三角形三边的数对 (x, y) 的个数 a ；最后再根据统计数 a 估计 π 的值，那么可以估计 π 的值约为（ ）

- A. $\frac{4a}{m}$ B. $\frac{a+2}{m}$ C. $\frac{a+2m}{m}$ D. $\frac{4a+2m}{m}$

3. 若非零实数 a 、 b 满足 $2^a = 3^b$ ，则下列式子一定正确的是（ ）

- A. $b > a$ B. $b < a$
- C. $|b| < |a|$ D. $|b| > |a|$

4. 已知向量 $\vec{a} = (-m, 4)$ ， $\vec{b} = (m, 1)$ （其中 m 为实数），则“ $m = 2$ ”是“ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ”的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 已知平面 α 和直线 a ， b ，则下列命题正确的是（ ）

- A. 若 $a \parallel b$ ， $b \parallel \alpha$ ，则 $a \parallel \alpha$ B. 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ， $b \perp \alpha$ ，则 $a \parallel \alpha$
- C. 若 $a \parallel b$ ， $b \perp \alpha$ ，则 $a \perp \alpha$ D. 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ， $b \parallel \alpha$ ，则 $a \perp \alpha$

6. 已知点 P 不在直线 l 、 m 上，则“过点 P 可以作无数个平面，使得直线 l 、 m 都与这些平面平行”是“直线 l 、 m 互相平行”的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 设集合 $M = \{x | 1 < x \leq 2\}$, $N = \{x | x < a\}$, 若 $M \cap N = M$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(2, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$

8. 设 i 为虚数单位, 若复数 $z(1-i) = 2+2i$, 则复数 z 等于 ()

- A. $-2i$ B. $2i$ C. $-1+i$ D. 0

9. 若函数 $f(x) = a^{2x-4}$ ($a > 0, a \neq 1$) 满足 $f(1) = \frac{1}{9}$, 则 $f(x)$ 的单调递减区间是 ()

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[2, +\infty)$
C. $[-2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2]$

10. 把满足条件 (1) $\forall x \in R, f(-x) = f(x)$, (2) $\forall x_1 \in R, \exists x_2 \in R$, 使得 $f(x_1) = -f(x_2)$ 的函数称为“D 函数”, 下列函数是“D 函数”的个数为 ()

- ① $y = x^2 + |x|$ ② $y = x^3$ ③ $y = e^x + e^{-x}$ ④ $y = \cos x$ ⑤ $y = x \sin x$

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

11. 若圆锥轴截面面积为 $2\sqrt{3}$, 母线与底面所成角为 60° , 则体积为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}\pi$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

12. 若 AB 为过椭圆 $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ 中心的弦, F_1 为椭圆的焦点, 则 ΔF_1AB 面积的最大值为 ()

- A. 20 B. 30 C. 50 D. 60

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知直线 $4x - y = b$ 被圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 截得的弦长为 2, 则 b 的值为__

14. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, 且 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \lambda \vec{b})$, 则实数 $\lambda =$ __.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, BC 为定长, $|\vec{AB} + 2\vec{AC}| = 3|\vec{BC}|$, 若 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 2, 则边 BC 的长为__.

16. 已知不等式 $|x+2| + |x| \leq a$ 的解集不是空集, 则实数 a 的取值范围是__; 若不等式

$|x^2 + x - 1| + |x^2 + x + 1| \geq \frac{|a+1| - |3a-1|}{|a|}$ 对任意实数 a 恒成立, 则实数 x 的取值范围是__

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 角 A 、 B 、 C 的度数成等差数列, $b = \sqrt{13}$.

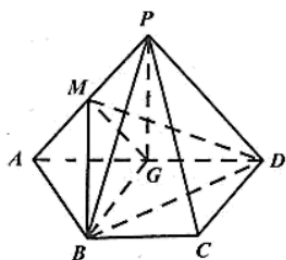
(1) 若 $3\sin C = 4\sin A$, 求 c 的值;

(2) 求 $a+c$ 的最大值.

18. (12分) 已知函数 $f(x) = a \ln(1+x)$, $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax$, $h(x) = e^x - 1$.

- (1) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq h(x)$ 恒成立, 求 a 的取值范围;
 (2) 当 $x < 0$ 时, 研究函数 $F(x) = h(x) - g(x)$ 的零点个数;
 (3) 求证: $\frac{1095}{1000} < \sqrt[10]{e} < \frac{3000}{2699}$ (参考数据: $\ln 1.1 \approx 0.0953$).

19. (12分) 如图, 已知四边形 $ABCD$ 的直角梯形, $AD \parallel BC$, $AD \perp DC$, $AD = 4$, $DC = BC = 2$, G 为线段 AD 的中点, $PG \perp$ 平面 $ABCD$, $PG = 2$, M 为线段 AP 上一点 (M 不与端点重合).



- (1) 若 $AM = MP$,
 (i) 求证: $PC \parallel$ 平面 BMG ;
 (ii) 求平面 PAD 与平面 BMD 所成的锐二面角的余弦值;

(2) 是否存在实数 λ 满足 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AP}$, 使得直线 PB 与平面 BMG 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$, 若存在, 确定的 λ 值,

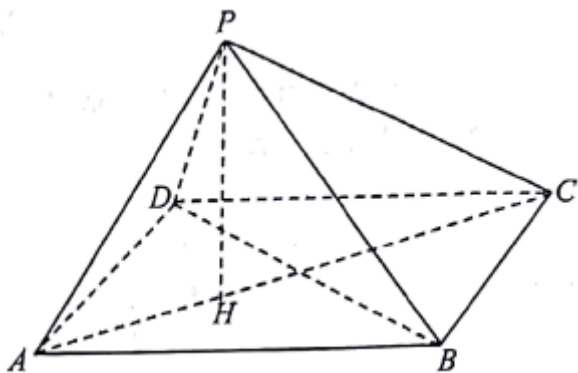
若不存在, 请说明理由.

20. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t, \\ y = 4 - \sqrt{3}t \end{cases}$ (t 为参数), 圆 C 的方程为

$x^2 + (y-1)^2 = 1$, 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

- (1) 求 l 和 C 的极坐标方程;
 (2) 过 O 且倾斜角为 α 的直线与 l 交于点 A , 与 C 交于另一点 B , 若 $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{12}$, 求 $\frac{|OB|}{|OA|}$ 的取值范围.

21. (12分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面是边长为 2 的菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $PB = PD = \sqrt{2}$.



(1) 证明：平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2) 设 H 在 AC 上， $AH = \frac{1}{3}AC$ ，若 $PH = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，求 PH 与平面 PBC 所成角的正弦值.

22. (10 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，且椭圆 C 的一个焦点与抛物线 $y^2 = 4\sqrt{3}x$ 的

焦点重合. 过点 $E(1, 0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ 两点， O 为坐标原点.

(1) 若直线 l 过椭圆 C 的上顶点，求 $\triangle MON$ 的面积；

(2) 若 A ， B 分别为椭圆 C 的左、右顶点，直线 MA ， NB ， MB 的斜率分别为 k_1 ， k_2 ， k_3 ，求 $k_3(k_1 + k_2)$ 的值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

先将函数 $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + 1$ 化为 $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ ，再由三角函数的性质，逐项判断，即可得出

结果.

【详解】

Q $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + 1$

$$\text{可得 } f(x) = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 2x \right) + 1 = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 1$$

对于 A, $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 故 A 正确;

对于 B, 由 $-1 \leq \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$, 可得 $-1 \leq f(x) \leq 3$, 故 B 正确;

对于 C, Q 正弦函数对称轴可得: $2x_0 + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$

$$\text{解得: } x_0 = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{6}, (k \in \mathbb{Z}),$$

当 $k=0$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$, 故 C 正确;

对于 D, Q 正弦函数对称中心的横坐标为: $2x_0 + \frac{\pi}{6} = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$$\text{解得: } x_0 = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{12}, (k \in \mathbb{Z})$$

若图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 对称, 则 $\frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{4}$

解得: $k = -\frac{2}{3}$, 故 D 错误;

故选: D.

【点睛】

本题考查三角恒等变换, 三角函数的性质, 熟记三角函数基本公式和基本性质, 考查了分析能力和计算能力, 属于基础题.

2、D

【解析】

由试验结果知 m 对 $0 \sim 1$ 之间的均匀随机数 x, y , 满足 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$, 面积为 1, 再计算构成钝角三角形三边的数对

(x, y) , 满足条件的面积, 由几何概型概率计算公式, 得出所取的点在圆内的概率是圆的面积比正方形的面积, 即可估计 π 的值.

【详解】

解: 根据题意知, m 名同学取 m 对都小于 1 的正实数对 (x, y) , 即 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$,

对应区域为边长为 1 的正方形, 其面积为 1,

若两个正实数 x, y 能与 1 构成钝角三角形三边, 则有
$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 1 \\ x + y > 1 \\ 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases},$$

其面积 $S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$; 则有 $\frac{a}{m} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$, 解得 $\pi = \frac{4a + 2m}{m}$

故选: D.

【点睛】

本题考查线性规划可行域问题及随机模拟法求圆周率的几何概型应用问题. 线性规划可行域是一个封闭的图形, 可以直接解出可行域的面积; 求解与面积有关的几何概型时, 关键是弄清某事件对应的面积, 必要时可根据题意构造两个变量, 把变量看成点的坐标, 找到试验全部结果构成的平面图形, 以便求解.

3、C

【解析】

令 $2^a = 3^b = t$, 则 $t > 0$, $t \neq 1$, 将指数式化成对数式得 a, b 后, 然后取绝对值作差比较可得.

【详解】

令 $2^a = 3^b = t$, 则 $t > 0$, $t \neq 1$, $\therefore a = \log_2 t = \frac{\lg t}{\lg 2}$, $b = \log_3 t = \frac{\lg t}{\lg 3}$,

$\therefore |a| - |b| = \frac{|\lg t|}{\lg 2} - \frac{|\lg t|}{\lg 3} = \frac{|\lg t|(\lg 3 - \lg 2)}{\lg 2 \cdot \lg 3} > 0$, 因此, $|a| > |b|$.

故选: C.

【点睛】

本题考查了利用作差法比较大小, 同时也考查了指数式与对数式的转化, 考查推理能力, 属于中等题.

4、A

【解析】

结合向量垂直的坐标表示, 将两个条件相互推导, 根据能否推导的情况判断出充分、必要条件.

【详解】

由 $m = 2$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2, 4) \cdot (2, 1) = -4 + 4 = 0$, 所以 $\vec{a} \perp \vec{b}$; 而

当 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-m, 4) \cdot (m, 1) = -m^2 + 4 = 0$, 解得 $m = 2$ 或 $m = -2$. 所以

“ $m = 2$ ”是“ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ”的充分不必要条件.

故选: A

【点睛】

本小题考查平面向量的运算，向量垂直，充要条件等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，应用意识.

5、C

【解析】

根据线面的位置关系，结合线面平行的判定定理、平行线的性质进行判断即可.

【详解】

A: 当 $a \subset \alpha$ 时，也可以满足 $a \parallel b$ ， $b \parallel \alpha$ ，故本命题不正确；

B: 当 $a \subset \alpha$ 时，也可以满足 $a \perp b$ ， $b \perp \alpha$ ，故本命题不正确；

C: 根据平行线的性质可知：当 $a \parallel b$ ， $b \perp \alpha$ ，时，能得到 $a \perp \alpha$ ，故本命题是正确的；

D: 当 $a \subset \alpha$ 时，也可以满足 $a \perp b$ ， $b \parallel \alpha$ ，故本命题不正确.

故选：C

【点睛】

本题考查了线面的位置关系，考查了平行线的性质，考查了推理论证能力.

6、C

【解析】

根据直线和平面平行的性质，结合充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【详解】

Q 点 P 不在直线 l 、 m 上，

$\therefore$ 若直线 l 、 m 互相平行，则过点 P 可以作无数个平面，使得直线 l 、 m 都与这些平面平行，即必要性成立，

若过点 P 可以作无数个平面，使得直线 l 、 m 都与这些平面平行，则直线 l 、 m 互相平行成立，反证法证明如下：

若直线 l 、 m 互相不平行，则 l ， m 异面或相交，则过点 P 只能作一个平面同时和两条直线平行，则与条件矛盾，即充分性成立

则“过点 P 可以作无数个平面，使得直线 l 、 m 都与这些平面平行”是“直线 l 、 m 互相平行”的充要条件，

故选：C.

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断，结合空间直线和平面平行的性质是解决本题的关键.

7、C

【解析】

由 $M \cap N = M$ 得出 $M \subseteq N$ ，利用集合的包含关系可得出实数 a 的取值范围.

【详解】

$Q M = \{x | 1 < x \leq 2\}$, $N = \{x | x < a\}$ 且 $M \cap N = M$, $\therefore M \subseteq N$, $\therefore a > 2$.

因此, 实数 a 的取值范围是 $(2, +\infty)$.

故选: C.

【点睛】

本题考查利用集合的包含关系求参数, 考查计算能力, 属于基础题.

8、B

【解析】

根据复数除法的运算法则, 即可求解.

【详解】

$$z(1-i) = 2+2i, z = \frac{2+2i}{1-i} = 2i.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查复数的代数运算, 属于基础题.

9、B

【解析】

$$\text{由 } f(1) = \frac{1}{9} \text{ 得 } a^2 = \frac{1}{9},$$

$$\therefore a = \frac{1}{3} \text{ 或 } a = -\frac{1}{3} \text{ (舍),}$$

即 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|2x-4|}$. 由于 $y = |2x-4|$ 在 $(-\infty, 2]$ 上单调递减, 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2]$ 上单调递增, 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减, 故选 B.

10、B

【解析】

满足 (1) (2) 的函数是偶函数且值域关于原点对称, 分别对所给函数进行验证.

【详解】

满足 (1) (2) 的函数是偶函数且值域关于原点对称, ①不满足 (2); ②不满足 (1);

③不满足 (2); ④⑤均满足 (1) (2).

故选: B.

【点睛】

本题考查新定义函数的问题, 涉及到函数的性质, 考查学生逻辑推理与分析能力, 是一道容易题.

11、D

【解析】

设圆锥底面圆的半径为 r ，由轴截面面积为 $2\sqrt{3}$ 可得半径 r ，再利用圆锥体积公式计算即可.

【详解】

设圆锥底面圆的半径为 r ，由已知， $\frac{1}{2} \times 2r \times \sqrt{3}r = 2\sqrt{3}$ ，解得 $r = \sqrt{2}$ ，

所以圆锥的体积 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times \sqrt{3}r = \frac{2\sqrt{6}}{3} \pi$.

故选：D

【点睛】

本题考查圆锥的体积的计算，涉及到圆锥的定义，是一道容易题.

12、D

【解析】

先设 A 点的坐标为 (x, y) ，根据对称性可得 $B(-x, -y)$ ，在表示出 ΔF_1AB 面积，由图象遏制，当点 A 在椭圆的顶点时，此时 ΔF_1AB 面积最大，再结合椭圆的标准方程，即可求解.

【详解】

由题意，设 A 点的坐标为 (x, y) ，根据对称性可得 $B(-x, -y)$ ，

则 ΔF_1AB 的面积为 $S = \frac{1}{2} \times |OF| \times |2y| = c|y|$ ，

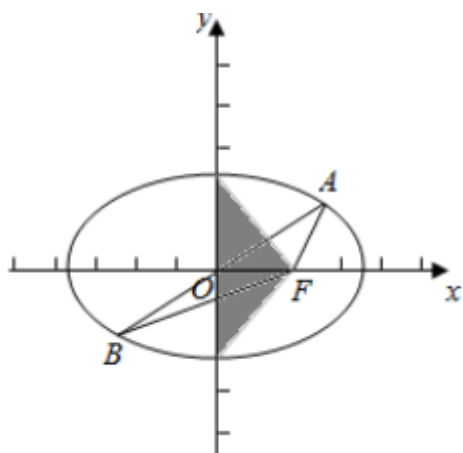
当 $|y|$ 最大时， ΔF_1AB 的面积最大，

由图象可知，当点 A 在椭圆的上下顶点时，此时 ΔF_1AB 的面积最大，

又由 $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ ，可得椭圆的上下顶点坐标为 $(0, -5), (0, 5)$ ，

所以 ΔF_1AB 的面积的最大值为 $S = cb = \sqrt{169 - 25} \times 5 = 60$.

故选：D.



【点睛】

本题主要考查了椭圆的标准方程及简单的几何性质，以及三角形面积公式的应用，着重考查了数形结合思想，以及化归与转化思想的应用.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、 1

【解析】

根据弦长为半径的两倍，得直线经过圆心，将圆心坐标代入直线方程可解得.

【详解】

解：圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 的圆心为 $(1, 1)$ ，半径 $r = 1$ ，

因为直线 $4x - y = b$ 被圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 截得的弦长为 2，

所以直线 $4x - y - b = 0$ 经过圆心 $(1, 1)$ ，

$\therefore 4 - 1 - b = 0$ ，解得 $b = 3$.

故答案为： 1.

【点睛】

本题考查了直线与圆相交的性质，属基础题.

14、 1

【解析】

根据条件即可得出 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ ， $|\vec{a}| = 1$ ，由 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \lambda \vec{b})$ 即可得出 $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) = 0$ ，进行数量积的运算即可求出 λ .

【详解】

$\because$ 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ ， $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ，且 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \lambda \vec{b})$ ；

$\therefore \vec{a} \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) = \vec{a}^2 - \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 - \frac{\lambda}{2} = 0$ ；

$\therefore \lambda = 1$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/887163026151010035>