

考点 05 一元二次方程



一、一元二次方程的概念

1. 一元二次方程

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是2 的整式方程叫做一元二次方程.

2. 一般形式

$ax^2 + bx + c = 0$ (其中 a, b, c 为常数, $a \neq 0$), 其中 ax^2, bx, c 分别叫做二次项、一次项和常数项, a, b 分别称为二次项系数和一次项系数.

注意: (1) 在一元二次方程的一般形式中要注意 $a \neq 0$, 因为当 $a = 0$ 时, 不含有二次项, 即不是一元二次方程;

(2) 一元二次方程必须具备三个条件:

- ①必须是整式方程;
- ②必须只含有一个未知数;
- ③所含未知数的最高次数是 2.

二、一元二次方程的解法 1

1. 直接开平方法

适合于 $(x \pm a)^2 = b (b \geq 0)$ 或 $(ax \pm b)^2 = (cx \pm d)^2$ 形式的方程.

2. 配方法

- (1) 化二次项系数为 1;
- (2) 移项, 使方程左边只含有二次项和一次项, 右边为常数项;
- (3) 方程两边同时加上一次项系数一半的平方;
- (4) 把方程整理成 $(x \pm a)^2 = b (b \geq 0)$ 的形式;
- (5) 运用直接开平方法解方程.

3. 公式法

- (1) 把方程化为一般形式, 即 $ax^2 + bx + c = 0$;
- (2) 确定 a, b, c 的值;

(3) 求出 $b^2 - 4ac$ 的值;

(4) 将 a, b, c 的值代入 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 即可.

4. 因式分解法

基本思想是把方程化成 $(ax + b)(cx + d) = 0$ 的形式, 可得 $ax + b = 0$ 或 $cx + d = 0$.

三、一元二次方程根的判别式及根与系数关系

1. 根的判别式

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 是否有实数根, 由 $b^2 - 4ac$ 的符号来确定, 我们把 $b^2 - 4ac$

叫做一元二次方程根的判别式.

2. 一元二次方程根的情况与判别式的关系

(1) 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时, 方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个不相等的实数根;

(2) 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时, 方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有 1 个 (两个相等的) 实数根;

(3) 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, 方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 没有实数根.

3. 根与系数关系

对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ (其中 a, b, c 为常数, $a \neq 0$), 设其两根分别为 x_1, x_2 , 则

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

四、利用一元二次方程解决实际问题

列一元二次方程解应用题步骤和列一元一次方程(组)解应用题步骤一样, 即审、设、列、解、验、答六步. 列一元二次方程解应用题, 经济类和面积类问题是常考内容.

1. 增长率等量关系

(1) 增长率=增长量 $\div$ 基础量.

(2) 设 a 为原来量, m 为平均增长率, n 为增长次数, b 为增长后的量, 则 $a(1 + m)^n = b$; 当

m 为平均下降率时, 则有 $a(1 - m)^n = b$.

2. 利润等量关系

(1) 利润=售价-成本.

(2) 利润率= $\frac{\text{利润}}{\text{成本}} \times 100\%$.

3. 面积问题

(1) 类型 1: 如图 1 所示的矩形 $ABCD$ 长为 a , 宽为 b , 空白“回形”道路的宽为 x , 则阴影部分的面积为 $(a-2x)(b-2x)$.

(2) 类型 2: 如图 2 所示的矩形 $ABCD$ 长为 a , 宽为 b , 阴影道路的宽为 x , 则空白部分的面积为 $(a-x)(b-x)$.

(3) 类型 3: 如图 3 所示的矩形 $ABCD$ 长为 a , 宽为 b , 阴影道路的宽为 x , 则 4 块空白部分的面积之和可转化为 $(a-x)(b-x)$.

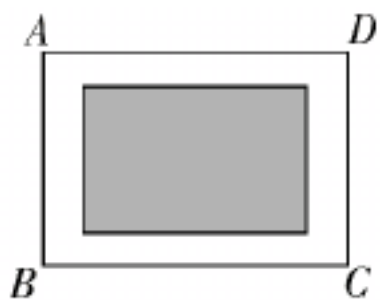


图 1

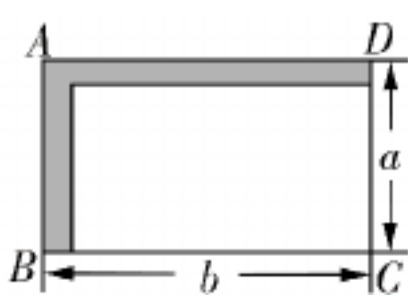


图 2

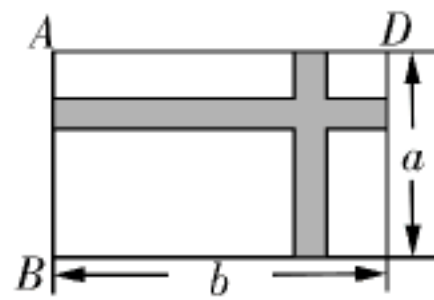


图 3



考向一 一元二次方程的概念

一元二次方程必须具备三个条件:

①必须是整式方程; ②必须只含有一个未知数; ③所含未知数的最高次数是2.

典例引领

典例 1 【江西省赣州市蓉江新区潭东中学 2019 - 2020 学年九年级上学期期中数学试题】方程

$2x^2 - 5x = 4$ 的二次项系数、一次项系数、常数项分别为

A. 2, 5, 4

B. 2, -5, 4

C. -2, -5, 4

D. 2, -5, -4

【答案】D

【解析】 $2x^2 - 5x = 4$ 可变形为: $2x^2 - 5x - 4 = 0$,

$\therefore$ 二次项系数为: 2, 一次项系数为: -5, 常数项为: -4,

故选 D.

【名师点睛】 本题考查了一元二次方程的定义, 解题的关键是熟记定义.

变式拓展

1. 下列方程中，是关于 x 的一元二次方程的是

A. $ax^2 + bx + c = 0$ (a 是实数)

B. $(x+1)(x+2) = (x+1)^2$

C. $x^2 + \frac{1}{x} - 3 = 0$

D. $2x^2 - 1 = 0$

考向二 解一元二次方程

一元二次方程的常见解法及适用情形：

一般形式： $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$	
直接开平方 法	形如 $(x+m)^2 = n (n \geq 0)$ 的方程，可直接开方求解，则 $x_1 = -m + \sqrt{n}$ ， $x_2 = -m - \sqrt{n}$
因式分解法	可化为 $a(x+m)(x+n) = 0$ 的方程，用因式分解法求解，则 $x_1 = -m$ ， $x_2 = -n$
配方法	若不易于使用分解因式法求解，可考虑配方为 $a(x+h)^2 = k$ ，再直接开方求解
公式法	利用求根公式： $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} (\Delta = b^2 - 4ac \geq 0)$

典例引领

典例 2 若 $x = -2$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 + \frac{3}{2}ax - a^2 = 0$ 的一个根，则 a 的值为_____.

【答案】 1 或 -4

【解析】 因为 $x = -2$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 + \frac{3}{2}ax - a^2 = 0$ 的一个根，
所以 $(-2)^2 + \frac{3}{2}a \times (-2) - a^2 = 0$ ，即 $a^2 + 3a - 4 = 0$ ，整理得 $(a+4)(a-1) = 0$ ，
解得 $a_1 = -4$ ， $a_2 = 1$ 。故 a 的值是 1 或 -4。

典例 3 用配方法解方程 $x^2 + 2x - 1 = 0$ 时，配方结果正确的是

A. $(x+2)^2 = 2$

B. $(x+1)^2 = 2$

C. $(x+2)^2 = 3$

D. $(x+1)^2 = 3$

【答案】B

【解析】因为 $x^2 - 2x - 1 = 0$ ，所以 $x^2 - 2x - 1 = 2$ ，即 $(x - 1)^2 = 2$ 。

故选 B。

变式拓展

2. 一元二次方程 $3x^2 - 8x - 3 = 0$ 的解是_____。

3. 方程 $3x(x - 1) = 2(x - 1)$ 的根是_____。

考向三 一元二次方程根的判别式

对于方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ， $\Delta = b^2 - 4ac$ ，

①若 $\Delta > 0$ ，方程有两个不相等的实数根；

②若 $\Delta = 0$ ，方程有两个相等的实数根；

③若 $\Delta < 0$ ，方程没有实数根。

典例引领

典例 4 【四川省成都市部分学校 2019-2020 学年九年级上学期期中数学试题】一元二次方程

$x^2 - 7x + 1 = 0$ 的根的情况是

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 只有一个实数根

D. 没有实数根

【答案】A

【解析】对于方程 $x^2 - 7x + 1 = 0$ ，因为 $a=1$ ， $b=-7$ ， $c=1$ ，所以 $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 49 - 4 = 45 > 0$ ，

所以方程有两个不相等的实数根。故选 A。

【名师点睛】本题考查了一元二次方程的根的判别式，属于基本题型，熟练掌握一元二次方程根的判别式与方程根的个数的关系是关键。

典例 5 有两个一元二次方程：① $ax^2 + bx + c = 0$ ，② $cx^2 + bx + a = 0$ ，其中 $a \neq c \neq 0$ ，以下四个结论中，错误的是

A. 如果方程①有两个相等的实数根，那么方程②也有两个相等的实数根

B. 如果方程①和方程②有一个相同的实数根，那么这个根必定是 $x = 1$

C. 如果 4 是方程①的一个根, 那么 $\frac{1}{4}$ 是方程②的一个根

D. 方程①的两个根的符号相异, 方程②的两个根的符号也相异

【答案】B

【解析】选项A, $\Delta_1 = b^2 - 4ac$, $\Delta_2 = b^2 - 4ac$, $\Delta_1 = \Delta_2$, 所以 A 正确;

选项 B, 因为将 ± 1 分别代入方程, 值相等, 结合 $a + c = 0$, 可知 B 不正确;

选项 C, 因为 $16a + 4b + c = 0$, $\frac{1}{16}c + \frac{1}{4}b + a = 0$, 即 $16a + 4b + c = 0$, 故 C 正确;

选项 D, 由根与系数关系可知 D 正确.

故选 B.

变式拓展

4. 下列方程中, 没有实数根的是

A. $x^2 + x = 0$

B. $x^2 + x + 2 = 0$

C. $x^2 - x - 2 = 0$

D. $x^2 + x - 2 = 0$

5. 【安徽省芜湖市部分学校 2019 - 2020 学年九年级上学期期中数学试题】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (k+1)x + k = 0$.

(1) 求证: 方程总有两个实数根;

(2) 若该方程有一个根是正数, 求 k 的取值范围.

考向四 根与系数关系

设一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根分别为 x_1 , x_2 , 则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

典例引领

典例 6 若 $1-\sqrt{3}$ 是方程 $x^2-2x+c=0$ 的一个根, 则 c 的值为

A. -2

B. $4\sqrt{3}-2$

C. $3-\sqrt{3}$

D. $1+\sqrt{3}$

【答案】 A

【解析】 由根与系数的关系可得另一个根为 $2-(1-\sqrt{3})=1+\sqrt{3}$, 所以 $c=(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=-2$.

故选 A.

典例 7 如果 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2-6x-5=0$ 的两个实根, 那么 $x_1^2+x_2^2=\square$.

【答案】 46

【解析】 由根与系数关系, 可得 $x_1+x_2=6$, $x_1x_2=-5$,

则 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=36+5\times 2=46$.

变式拓展

6. 若方程 $x^2-4x+1=0$ 的两根是 x_1, x_2 , 则 $x_1(1+x_2)+x_2$ 的值为_____.

7. 关于 x 的方程 $2x^2+mx+n=0$ 的两个根是 -2 和 1 , 则 n^m 的值为

A. -8

B. 8

C. 16

D. -16

考向五 一元二次方程在实际问题中的应用

列一元二次方程解实际问题的关键是找出题中的等量关系, 利用等量关系列出方程. 其中分析实际问题为解决问题的前提和基础, 解一元二次方程是重要方法和手段, 并注意解出的方程的解是否符合实际问题.

典例引领

典例 8 【山东省滨州市博兴县 2019-2020 学年九年级上学期期中数学试题】某地区 2018 年投入教育经费 5000 万元, 预计 2020 年投入 7200 万元, 设这两年投入教育经费的年平均增长百分率为 x , 由题意可列方程为_____.

【答案】 $5000(1+x)^2=7200$

【解析】由题意得 $5000(1+x)^2 = 7200$ ，故答案为 $5000(1+x)^2 = 7200$ 。

【名师点睛】 本题考查一元二次方程的应用，掌握增长率问题的方程形式是关键.

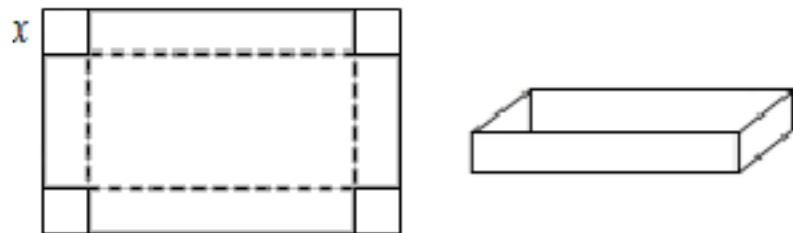
典例 9 经过两次连续降价，某药品销售单价由原来的 50 元降到 32 元，设该药品平均每次降价的百分率为 x ，根据题意可列方程是_____.

【答案】 $50(1-x)^2 = 32$

【解析】由题意可得 $50(1-x)^2 = 32$.

变式拓展

8. 某商店今年 1 月份的销售额是 2 万元, 3 月份的销售额是 4.5 万元, 从 1 月份到 3 月份, 该店销售额平均每月的增长率是
- A. 20% B. 25%
- C. 50% D. 62.5%
9. 【湖北省孝感市云梦县 2019 - 2020 学年九年级上学期期中数学试题】如图是一张长 12dm, 宽 6dm 的长方形纸板, 将纸板四个角各剪去一个同样的边长为 x dm 的正方形, 然后将四周突出部分折起, 可制成一个无盖长方体纸盒.



- (1) 无盖方盒盒底的长为_____dm, 宽为_____dm (用含 x 的式子表示).
- (2) 若要制作一个底面积是 40dm^2 的一个无盖长方体纸盒, 求剪去的正方形边长 x .

考点冲关



1. 关于 x 的一元二次方程 $(a^2 - 1)x^2 - 3x + a^2 + 3a - 4 = 0$ 的一个根为 0, 则 a 的值是
- A. -4
- C. 4 或 -1
2. 方程 $x_2 = x$ 的根是

B. 1

D. -4或1

A. 1

B. ± 1

C. 0 和 1

D. 0

3. 已知关于 x 的一元二次方程 $(k+1)x^2+2x-1=0$ 有实数根，则 k 的取值范围是

A. $k \geq -2$

B. $k \geq -2$ 且 $k \neq -1$ D.

C. $k \geq 2$

$k \leq -2$

4. 用“配方法”解一元二次方程 $x^2-16x+24=0$ ，下列变形结果，正确的是

A. $(x-4)^2=8$

B. $(x-4)^2=40$

C. $(x-8)^2=8$

D. $(x-8)^2=40$

5. 同学聚会，每两人都握手一次，共握手 45 次，设 x 人参加聚会，列方程为

A. $x(x-1)=45$

B. $x(x-1)=\frac{45}{2}$

C. $\frac{1}{2}x(x-1)=45$

D. $x(x+1)=45$

6. 制造某种产品成本 100 元，计划经过两年成本降低为 64 元，则平均每年降低

A. 18%

B. 20%

C. 36%

D. 以上答案均错

7. 一个大正方形内放入两个同样大小的小正方形纸片，按如图1 放置，两个小正方形纸片的重叠部分面积为 4；按如图 2 放置（其中一小张正方形居大正方形的正中），大正方形中没有被小正方形覆盖的部分（阴影部分）的面积为 44，则把两张小正方形按如图 3 放置时，两个小正方形重叠部分的面积为

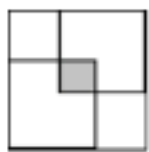


图1

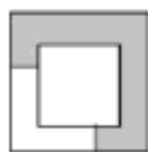


图2

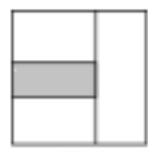


图3

A. 11 C.

B. 12

20

D. 24

8. 已知 m, n 是方程 $x^2+x-3=0$ 的两个实数根，则 $m^2-n+2019$ 的值是

A. 2023

B. 2021

C. 2020

D. 2019

9. 若关于 x 的方程 $(x-4)(x^2-8x+m)=0$ 的三个根恰好可以成为某直角三角形的三边长，则 m 的值为

A. 24

B. 15

C. 15 或 24

D. 无解

10. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 8x + q = 0$ 有两个不相等的实数根，则 q 的取值范围是

A. $q < 16$

B. $q > 16$

C. $q \leq 4$

D. $q \geq 4$

11.

已知 a, b, c 为常数，点 $P(a, c)$ 在第二象限，则关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 根的情况是

A. 有两个相等的实数根

B. 有两个不相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法判断

12. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (a^2 - 2a)x + a - 1 = 0$ 的两个实数根互为相反数，则 a 的值为

A. 2

B. 0

C. 1

D. 2 或 0

13. 如果 2 是方程 $x^2 - 3x + k = 0$ 的一个根，则此方程的另一根为

A. 2

B. 1

C. -1

D. -2

14. 设 α, β 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两根，则代数式 $\alpha + \beta + \alpha\beta$ 的值是

A. 1

B. -1

C. 3

D. -3

15. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - bx + c = 0$ 的两个实数根分别为 2 和 -4，则 $b + c =$

A. -10

B. 10

C. -6

D. -1

16. 已知一元二次方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两根分别为 x_1, x_2 ，则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值为

A. 2

B. -1

C. $-\frac{1}{2}$

D. -2

17. 2018 年某市人民政府投入 1000 万元用于改造乡村小学班班通工程建设，计划到 2020 年再追加

投资 210 万元，如果每年的平均增长率相同，那么该市这两年该项投入的平均增长率为

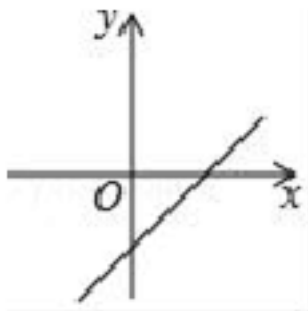
A. 10%

B. 8%

C. 1.21%

D. 12.1%

18. 已知一次函数 $y=kx+b$ 的大致图象如图所示，则关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x+kb+1=0$ 的根的情况是



- A. 有两个不相等的实数根
B. 没有实数根
C. 有两个相等的实数根
D. 有一个根是 0
19. 用配方法解方程 $x^2+6x - 5=0$ 时，应该变形为_____.
20. 【江苏省常州市常州市新北区实验学校2019 - 2020 学年九年级上学期期中数学试题】关于 x 的方程 $(a+1)x^{a^2-2a-1} + x - 5 = 0$ 是一元二次方程，则 $a=$ _____.
- 21 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x - m = 0$ 有两个相等的实数根，则 m 的值是_____.
- 22 在一次聚会中，参加聚会的人每两位都相互握一次手，一共握手 28 次，设参加聚会有 x 人，则可列方程_____.
- 23 若 $x = -1$ 是方程 $x^2+px+q=0$ 的解，则 $p - q$ 的值是_____.
24. 方程 $2x^2 + 4x - 3 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ，则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} =$ _____.
25. 设 α, β 是方程 $(x+1)(x-4) = -5$ 的两实数根，则 $\frac{\beta^3}{\alpha} + \frac{\alpha^3}{\beta} =$ _____.

26. 解下列方程：

(1) $2(x - 3)^2 = 5$;

(2) $2x^2 - 3x - 3 = 0$;

(3) $(x - 3)^2 - x + 3 = 0$.

27. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (k + 3)x + 2k + 2 = 0$.

- (1) 求证：方程总有两个实数根；
- (2) 若方程有一根小于 1，求 k 的取值范围.

28. 已知，关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根.

- (1) 求 m 的取值范围；
- (2) 如果 m 为非负整数，且该方程的根都是整数，求 m 的值.

29. 根据要求，解答下列问题.

(1) 根据要求，解答下列问题.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/887200112001006060>